105 025 497 863

510.5
A673

Digitized by Google

510.5
A673

Digitized by Google

# ARCHIV

der

# MATHEMATIK UND PHYSIK

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Gegründet von

**J. A. Grunert,**

fortgesetzt von

**R. Hoppe.**

Sechsundsechzigster Teil.

Leipzig.

C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,

J. Sengbusch.

1881.

Digitized by Google

162493

STANFORD LIBRARY

Digitized by Google

# Inhalts-Verzeichniss

## des sechsundsechzigsten Teils.


| № der Abhandlung. | | Heft. | Seite. |
|---|---|---|---|
| | **Arithmetik, Algebra und reine Analysis ohne Integralrechnung.** | | |
| V. | Ueber die Auflösung der trinomischen Gleichungen durch kettenbruchähnliche Algorithmen. Von K. E. Hoffmann | I. | 33 |
| IX. | Beitrag zu den Gleichungen des zweiten, dritten und vierten Grades mit rationalen Wurzeln. Von Th. Sinram | I. | 94 |
| XXI. | Ueber magische Quadrate und ähnliche Zahlenfiguren. Von Th. Harmuth | III. | 286 |
| XXII. | Zur Zerlegung einer rationalen algebraischen Function in Partialbrüche. Von Heinrich v. Hoepflingen-Bergendorf | III. | 314 |
| XXIII. | Zum Beweise des Satzes, dass jede Primzahl $p = 4n + 1$ Summe zweier Quadrate ist. Von Th. Harmuth | III. | 327 |
| XXIII. | Ueber die Gleichung $x^y = y^x$. Von M. Luxenberg | III. | 332 |
| XXV. | Einige Eigenschaften der Zahlen, welche zum Product der ersten $n$ Primzahlen prim und kleiner als dasselbe sind. Von Franz Walla | IV. | 353 |
| XXXII. | Ueber magische Rechtecke mit ungeraden Seitenzahlen. Von Th. Harmuth | IV. | 413 |

| № der Abhandlung. | | Heft. | Seite. |
|---|---|---|---|

## Integralrechnung.

| | | | |
|---|---|---|---|
| VIII. | Ueber eine Verallgemeinerung der Gauss'schen Methode der mechanischen Quadratur. Von F. August in Berlin | I. | 72 |
| X. | Ueber die von Challis vorgeschlagene neue Integrationsmethode von gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung und ihre Anwendung auf gewisse ungelöste Aufgaben aus der Variationsrechnung. Von Magnus Ehrhorn | II. | 113 |
| XIV. | Beitrag zu einer Classe von bestimmten Integralen complexer Functionen. Von Niemöller | III. | 225 |
| XV. | Sur des polynômes de deux variables analogues aux polynômes de Jacobi. Par P. Appell | III. | 238 |

## Geometrie der Ebene.

| | | | |
|---|---|---|---|
| I. | Zur Construction der Schnittpunkte von Geraden mit Kegelschnitten. Von Prof. Carl Pelz | I. | 1 |
| II. | Lieu des centres des cercles tangents intérieurement à un demi-cercle, et extérieurement aux deux demi-cercles, qui ont pour diamètres les deux segments du diamètre du premier demi-cercle. Par Georges Dostor | I. | 17 |
| III. | Distances des trois sommets d'un triangle au centre du cercle, qui passe par les pieds des trois hauteurs du triangle. Par Georges Dostor | I. | 24 |
| IV. | Les trois quadrilatères convexes d'Albert Girard, qui ont mêmes côtés, même surface et sont inscriptibles dans le même cercle. Par Georges Dostor | I. | 27 |
| XIII. | Ein Beitrag zur Theorie der merkwürdigen Punkte im Dreieck. Von J. Lange | II. | 220 |
| XVI. | Ueber einen speciellen Fall des Apollonischen Tactionsproblems. Von K. E. Hoffmann | III. | 246 |
| XVIII. | Zur Polaritätstheorie der Kegelschnitte. Von Emil Hain | III. | 274 |
| XIX. | Ueber das Transversalensystem zweier Punkte. Von Emil Hain | III. | 280 |

| № der Abhandlung. | | Heft. | Seite. |
|---|---|---|---|
| XX. | Ueber eine Verwandtschaft ersten Grades. Von Emil Hain | III. | 282 |
| XXIII. | Eine Tangentenconstruction zur Astroide. Von A. Sucharda | III. | 321 |
| XXIII. | Einige Sätze aus der Kreislehre. Von W. Jeřábek | III. | 325 |
| XXIII. | Zu dem Aufsatze T. LXV. S. 218. über den Schwerpunkt des Vierecks. Von R. Hoppe | III. | 330 |
| XXIII. | Anzahl der innern Diagonalschnitte eines Vierecks. Von L. Saalschütz | III. | 331 |
| XXIII. | Ueber die Tangenten der hyperbolischen Spirale. Von Fr. Schiffner | III. | 334 |
| XXIV. | Erweiterung des Satzes von der Sichel des Archimedes und sein Zusammenhang mit dem Satze von den Möndchen des Hippokrates; Schwerpunkte der Flächen. Von F. W. Fischer | IV. | 337 |
| XXVI. | Ueber gewisse Systeme von Kegelschnitten, die mit einander projectivisch sind, und deren Erzeugniss. Von Eduard Mahler | IV. | 358 |
| XXVII. | Zur allgemeinen Theorie der Curven. Von Eduard Mahler | IV. | 365 |


## Geometrie des Raumes.


| | | | |
|---|---|---|---|
| VI. | Ueber Parallelen geschlossener Curven. Von R. Hoppe | I. | 46 |
| XXIX. | Das Aoust'sche Problem in der Curventheorie. Von R. Hoppe | IV. | 386 |
| XXXIII. | Ueber den Winkel von $n$ Dimensionen. Von R. Hoppe | IV. | 448 |


## Mechanik.


| | | | |
|---|---|---|---|
| IX. | Ueber die Ausdehnung der Kepler'schen Gesetze. Von R. Hoppe | I. | 107 |
| XXIII. | Fortsetzung | III. | 330 |
| XII. | Wälzung eines cylindrisch begrenzten Körpers auf Horizontalebene. Von R. Hoppe | II. | 213 |
| XVII. | Ueber das Rollen eines seiner Schwere überlassenen Körpers auf horizontaler Ebene. Von R. Hoppe | III. | 260 |

| № der Abhandlung. | | Heft. | Seite. |
|---|---|---|---|
| XXVIII. | Wälznng eines von einer Tangentenfläche begrenzten Körpers anf Horizontalebene. Von R. Hoppe . | IV. | 373 |

## Optik, Akustik und Elasticität.

| | | | |
|---|---|---|---|
| VII. | Bestimmung und Untersnchung der Curve, welche die Pnnkte verbindet, die auf concentrischen, reflectirenden Schalen liegen nnd der Bedingung genügen, dass die von einem festen Punkte ausgehenden Lichtstrahlen daselbst so reflectirt werden, dass sie alsdann durch einen zweiten festen Pnnkt gehen. Von Wilhelm Werner. . . . | I. | 56 |
| XI. | Theorie der elastischen Schwingungen. Von Franz Tendering . . . . . . . . . . . . . . . . | II. | 147 |
| XXX. | Bewegungen des Aethers im freien Raume, welche ein continnirliches Farbenspectrum verursachen. Von Eduard Maiss . . . . . . . . . . . . . | IV. | 397 |
| XXXI. | Construction der Cardinalpnnkte eines Linsensystems. Von M. Koppe . . . . . . . . . . | IV. | 405 |

## Litterarische Berichte.

CCLXI. Frege (Krit.). Coppernicns-Verein (Mitteil. II.). Genocchi (cart. Sofia Germain, Ganss). Soph. Germain (an Ganss). Scheffler (polydim. Gröss.). Dellingshansen (Gravit.). Kirsch (Mech.). Brand (Diff. R. I.).

CCLXII. Worpitzky (Diff. n. Int. R.). Scott (Determ.). Radicke (Bernonll. Z.). Rnbini (calc. inf.). Spitzer (Diff. Gl.). Schüler (Pkt., Ger. n. Kegschn.). Gallenkamp (Geom.). Ehel (graph. Meth.). Schell (Tachymetrie). Delabar (rechtw. Proj. — Steinconstr.). Vogler (Barom. Taf.).

CCLXIII. Kossmann (Terrainl.). Weyranch (Erddruck). Habich (ciném.). Carl (Zschr. angew. Elcktr.). Schwirkns (Zschr. Instrum.). Pnschl (lat. Wärme d. Dämpfe). Planck (2. Hpts. Wärmeth.). Schoop (Dpfdicht.). Gibbs (dsgl.). Loth. Meyer (Th. Chem.). Gintl (Crookes). Catalan (N. Corr. VI. 7—12.). Nova Acta R. Soc. sc. Upsal. (X.).

CCLXIV. Dvorsky (Kepler). Rubini (Libri). Boncompagni (Bull. XIII. 1—6.). Bindego (Maggi). Rubini (Boole). Spitz (Ar. — Anh. — eb. Geom. — Anh.). Helmling (Riccat. Glch.). Götting (Anal.). Spitzer (Leibrenten). Ruchonnet (calc. approx.). Buys (sc. quant.). Teixeira (dériv.). Bierens de Haan (N. Arch. v. Wisk. VII.). Philos. Soc. of Washington (Bull. I. II. III.). Pfeil (math. u. phys. Entdeck.).

Digitized by Google

## Berichtigungen

im 64. Teile:

S. 224. Z. 14 v. u. statt $u$ setze $\sin u$

im 65. Teile:

S. 169. Z. 16 v. u. statt Bildebene setze Spur

| | | | |
|---|---|---|---|
| 409. | 8 v. o. | $\overset{m}{\mathfrak{a}_1}$ | $\overset{m}{\mathfrak{a}_2}$ |
| 410. | 8 | $\frac{a}{a_0{}^t}$ | $\frac{1}{a_0}$ |
| 412. | 5 | $\binom{m}{r}$ | $\left(\frac{r}{m}\right)$ |
| | 10 | $r,1$ | $s,r$ |
| 414. | 13 | $\frac{\psi\mathfrak{z}_m}{\mathfrak{z}_m}$ | $\frac{\psi\mathfrak{z}_m}{\mathfrak{z}_m{}^m}$ |
| | 7 v. u. | 2,8 | 2,4 |
| 417. | 12 v. o. | $(\mathfrak{a}'_t$ | $(< \mathfrak{a}_t'$ |
| 418. | 1 v. u. | $x_2 \gtrless 0$ | $x_2 \gtrless c$ |

445. 2 v. u. einzuschalten:

die des Durchschnittspunkts der Diagonalen mit $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{y}_1$;

| | | | |
|---|---|---|---|
| S. 447. Z. 1 u. 5 v. o. | statt | $\partial$ | setze $D$ |
| 4 | | $\gamma$ | je |
| 14 | | $\Sigma(n-1)$ | $\Sigma n$ |
| 8 v. u. | | $\binom{m}{n}$ | $\binom{n}{m}$ |

im litt. Bericht 258:

S. 22. Z. 1 v. u. statt C. L. Landré setze J. H. Schäfer

23. Z. 2 v. o. zu Anfang hinzuzufügen C. L. Landré:

im 66. Teile:

| | | | |
|---|---|---|---|
| S. 77. Z. 9 v. u. statt | | $(\varepsilon-2)$ | setze $(\varepsilon+n)$ |
| | 7 | $(\varepsilon-n)$ | $(\varepsilon+n)$ |
| 82. | 1 | $(\varepsilon+k+n-1)$ | $(\varepsilon+k+n)$ |
| 86. | 5 v. o. | $\psi(\xi)$ | $\psi_1(\xi)$ |
| | 6 | $P(\xi)$ | $\psi_1(\xi)$ |

STANFORD LIBRARY



I.

# Zur Construction der Schnittpunkte von Geraden mit Kegelschnitten.

Von

Prof. **Carl Pelz**

in Graz.

---

Die graphische Bestimmung der einer Geraden und einem Kegelschnitte gemeinschaftlichen Punkte kommt — wie schon Steiner in seiner „Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander“ und in den „geometrischen Constructionen“ gezeigt hatte — in dem allgemeinen Falle, wenn der Kegelschnitt durch fünf Punkte gegeben ist, bekanntlich auf die Construction der Doppelpunkte zweier projectivischen Punktreihen hinaus, deren Träger die gegebene Gerade $P$ ist. Die Punktreihen werden dadurch erhalten, dass man aus irgend zweien der gegebenen fünf Punkte Strahlen nach den übrigen drei zieht und die so entstandenen Strahlenbüschel mit $P$ zum Schnitt bringt.

Je zwei nach demselben Punkte des Kegelschnittes gehende Strahlen liefern ein Paar homologer Punkte.

Für die Bestimmung der Doppelpunkte selbst hat Steiner eine Construction angegeben, die mit Benutzung eines Hilfskreises durchgeführt wird, und vermöge ihrer Allgemeinheit vor jeder anderen diesbezüglichen den Vorzug verdient. Trotzdem kann nicht in Abrede gestellt werden, dass diese allgemeine Bestimmungsart der Schnittpunkte einer Geraden und eines Kegelschnittes für besondere Fälle,



Digitized by Google

STANFORD LIBRARY



wenn z. B. der Kegelschnitt durch die Axen oder ein Paar conjugirter Diameter bestimmt ist, zurecht gelegt, nicht die einfachsten Lösungen des Problems liefert, und im Gegenteil einigen für jene Specialfälle, von anderen Gesichtspunkten bereits gelieferten, in praktischer Hinsicht nachsteht.

Im LIX. Teil dieses Archivs hat sich Herr Professor Peschka in dem Aufsatze: „Construction der Durchschnittspunkte von Geraden mit Kegelschnitten" ebenfalls mit der constructiven Lösung der vorliegenden Aufgabe beschäftigt, und daselbst alle bisher bekannten Lösungsweisen des Problems mit hinreichender Ausführlichkeit vorgeführt. Nebst den aus der collinearen, respective affinen Beziehung des Kegelschnittes zum Kreise entspringenden Constructionen wird für den Fall, wenn die Axen des Kegelschnittes gegeben sind, die bekannte zuerst von Steiner gegebene — aus der Definition des Kegelschnittes als geometrischen Ortes der Mittelpunkte aller Kreise, die durch einen Punkt gehen und einen gegebenen Kreis berühren resultirende — Lösung des Problems erörtert und auch der eingangs berührten Bestimmungsart der Schnittpunkte Erwähnung getan.

Zu diesen bekannten Lösungen des Problems der Bestimmung der einer Geraden und einem Kegelschnitte gemeinschaftlichen Punkte erlaube ich mir für den besonderen Fall, wenn der Kegelschnitt durch seine Axen oder ein paar conjugirter Diameter gegeben ist, eine neue Construction dieser gemeinschaftlichen Punkte anzureihen, die, wenn auch sehr nahe liegend, bisher keine Anwendung gefunden hatte, wiewohl sie, meiner Ansicht nach, aus verschiedenen Gründen einer Beachtung würdig erscheint. Einen Hauptvorteil der nachfolgenden Construction glaube ich darin finden zu können, dass sie auf ziemlich einfachem Wege zum Ziele führt, und nicht blos die Schnittpunkte der Geraden mit dem Kegelschnitte, sondern auch die Tangenten der gefundenen Punkte direct liefert.

Ueberhaupt dürften in den nachstehenden Constructionen die einfachsten Lösungen für die Bestimmung des Poles einer Geraden in Bezug auf einen Kegelschnitt, sowie auch die der dualen Aufgabe — für den Fall, wenn der Kegelschnitt durch die erwähnten Bestimmungsstücke gegeben ist — mit enthalten sein.

Das Princip, auf dem unsere Lösungen des Problems beruhen, ist ein allgemein bekanntes. Die Schnittpunkte eines Kegelschnittes mit einer Geraden können bekanntlich nicht nur in der bereits angeführten Weise als Doppelpunkte zweier projectivischen Punktreihen, die zwei den Kegelschnitt erzeugende Strahlenbüschel auf der gegebenen Geraden hervorbringen, sondern auch als Doppelpunkte einer Punktinvolution definirt werden, in welche die beiden projectivischen

Digitized by Google

Punktreihen für gewisse specielle Lagen der Scheitel der sie erzengenden Strahlenbüschel übergehen. Wie männiglich bekannt, werden zwei solche Strahlenbüschel erhalten, wenn man aus einem beliebigen Punkte der Geraden die möglichen Tangenten an den Kegelschnitt legt und aus den erhaltenen Berührungspunkten die sämmtlichen Punkte der Curve projicirt. Je zwei entsprechende Strahlen dieser beiden projectivischen Strahlenbüschel treffen die Gerade in zwei homologen Punkten der betreffenden (von der Lage der beiden erwähnten Tangenten unabhängigen) Punktinvolution. Da ein Paar conjugirter Punkte dieser Involution zugleich ein Paar conjugirter Punkte in Bezug auf den Kegelschnitt ist, so wird die Punktinvolution auf $P$ auch dann erzeugt, wenn man zu jedem Punkte $q$ der Geraden die Polare $Q$ in Bezug auf den Kegelschnitt construirt und diese mit $P$ zum Schnitt bringt. Die Polare $Q$ läuft bekanntlich durch einen festen Punkt, den Pol $p$ der gegebenen Geraden, und trifft dieselbe in demjenigen Punkte $q'$, welcher der conjugirte zu $q$ ist, in der erwähnten der Geraden bezüglich des Kegelschnittes $C$ zugehörigen Punktinvolution.

Wiewohl nun in dem Falle, wenn die Schnittpunkte $d$, $d_1$ der Geraden $P$ mit $C$ als Doppelpunkte der involutorischen Punktreihe, die $P$ bezüglich $C$ zugehört, construirt werden sollen, diese Involution zuvörderst durch Ermittelung zweier Paare conjugirter Punkte festgestellt werden muss, während die projectivischen Punktreihen als deren Doppelpunkte — wie im Vorangehenden berührt wurde — die Schnittpunkte $d$, $d_1$ ebenfalls auftreten, meist direct gegeben sind, so entsteht doch die Frage, ob es in gewissen speciellen Fällen dennoch nicht vorteilhafter erscheinen dürfte, die Punkte $d$, $d_1$ als Doppelpunkte des der Geraden $P$ in Bezug auf $C$ entsprechenden Punktsystems zu construiren.

Da bekanntlich die zur Bestimmung der Doppelpunkte zweier projectivischen Punktreihen führenden Methoden im Allgemeinen complicirter sind im Vergleiche zu den bekannten Constructionen dieser Doppelpunkte für den Fall, wenn die Punktreihen in involutorischer Lage sich befinden, und insbesondere dann, wenn der Centralpunkt der Involution direct gegeben sein sollte, so dürfte die Bejahung der aufgeworfenen Frage von dem Umstande abhängen, ob aus den, den Kegelschnitt bestimmenden Daten ein Paar conjugirter Punkte und der Centralpunkt des der Geraden bezüglich $C$ zugehörigen Punktsystems, durch einfache Constructionen ermittelt werden können.

Dies ist bei den im Nachfolgenden getroffenen Propositionen in der Tat der Fall; wir werden daher die Schnittpunkte einer Geraden mit einem Kegelschnitte als Doppelpunkte des erwähnten Punktsystems

construiren nnd dieses stets durch den Centralpnnkt nnd ein Paar conjugirter Punkte feststellen.

1. Von einer Ellipse $C$ sind (siehe Fig. 1.) die Axen $aa_1$, $bb_1$ gegeben; man bestimmt dio Schnittpunkte $d$, $d_1$ der Ellipse mit der Geraden $P$.

Der Centralpunkt $c$ des der Geraden bezüglich $C$ zugehörigen Punktsystems ist der Schnittpunkt von $P$ mit der Polare $D$ des unendlich fernen Pnnktes der gegebenen Geraden in Bezng auf dio Ellipse. $D$ ist daher der zu $P$ conjugirte Dnrchmesser der Ellipse und demzufolge der Punkt $c$ anch der Centralpunkt jener Involution, in welcher das Strahlensystem conjugirter Durchmesser des gegebenen Kegelschnittes $C$ die Gerade $P$ schneidet. Hier handelt es sich also vor allem um die Construction des Durchmessers $D$ und diese dürfte am einfachsten mit Zuhilfenahme einer Leitlinie durchzuführen sein. Denn schneidet das vom Brennpunkte $f$ der Ellipse auf $P$ gefällte Perpendikel die Leitlinie $F$ dieses Brennpunktes in $t$, so ist $t$ ein Punkt des Durchmessers $D$. Der Beweis hierfür resultirt ans der bekannten Steiner'schen Definition der Brennpunkte als Kreise von Radien Null, dio den Kegelschnitt doppelt berühren. Dio Directrix $F$ ist die gemeinsame Berührungssehne des Pnnktkreises $f$ und der Ellipso $C$. Nach bekannten Eigenschaften doppelt berührender Kegelschnitte müssen sich daher die Polaren eines beliebigen Pnnktes bezüglich $f$ und $C$ auf der Directrix $F$ treffen. Nun ist aber $ft$ die Polare des unendlich fernen Punktes $v$ von $P$ in Bezug auf den Pnnktkreis $f$ und folglich die Gerade $D$, die $t$ mit dem Mittelpnnkte $o$ von $C$ verbindet, die Polare von $v$ bezüglich $C$.

In ähnlicher Weise kann auch gezeigt werden, dass $D$ senkrecht steht auf jener Geraden, die $f$ mit dem Schnittpunkte $s$ der Directrix $F$ nnd des zu $P$ parallelen Durchmessers der Ellipso verbindet. Dies erklärt sich anch direct, da $f$ offenbar Höhenschnitt des Dreiecks $ost$ ist.

Schneidet $P$ die Directrix in $q$, so folgt aus den Brennpnnktseigenschaften des Kegelschnittes unmittelbar, dass die anf $fq$ in $f$ errichtete Normale die Polare von $q$ bezüglich $C$ ist.

Diese Polare geht daher durch den Pol $p$ der Geraden $P$ nnd schneidet dieselbe in $q'$, dem zu $q$ conjugirten Punkte jener Involution, die $P$ mit $C$ hervorbringt. Da wir also nnn den Centralpunkt $c$ nnd ein Paar conjugirter Punkte der Involution auf $P$ kennen, so branchen wir blos die mittlere geom. Proportionale aus $cq$, $cq'$ zu construiren und dieso beiderseits $c$ auf $P$ aufzutragen, um die verlangten Schnittpunkte $d$, $d_1$ zu erhalten.

Zu diesem Zwecke haben wir $q'n = cq$ gemacht, aus $n$ und $q$ mit dem Radius $cq$ Kreisbögen beschrieben und die Entfernung $ch$ ihres Schnittpunktes $h$ von $c$, beiderseits dieses Punktes auf $P$ aufgetragen.

Die Geraden $D$ und $fq'$ müssen sich als Polaren zweier auf $P$ liegender Punkte $v$, $q$ im Pol $p$ von $P$ bezüglich $C$ schneiden. Die Verbindungsgeraden des Punktes $p$ mit den gefundenen Schnittpunkten $d$, $d_1$ liefern daher die Tangenten dieser Punkte.

Wir können auch die Directrix $F_1$ des Brennpunktes $f_1$ zur Lösung der Aufgabe verwerten. Die Polare des Schnittpunktes $r$ von $P$ mit $F_1$ steht in $f_1$ senkrecht auf $f_1r$, geht durch den Pol $p$ und bestimmt auf $P$ den zu $r$ conjugirten Punkt $r'$ des der Geraden bezüglich $C$ zugehörigen Punktsystems.

Um den Pol $p$ einer Geraden $P$ bezüglich eines Kegelschnittes $C$ zu erhalten, haben wir also $P$ mit den Leitlinien von $C$ in $q$, $r$ zum Schnitt zu bringen, $fp$ normal auf $fq$ und $f_1p$ senkrecht auf $f_1r$ zu errichten.

Die Lösung der dualen Aufgabe ist hiermit ebenfalls gegeben.

Was die Bestimmung der Leitlinien selbst betrifft, so geht eine einfache Construction derselben aus der Relation hervor, dass die Leitlinie mit dem zugehörigen Brennpunkte die Scheitel der Hauptaxe harmonisch trennt. Es ist daher die Entfernung des Mittelpunktes $o$ des Kegelschnittes von der Directrix $F$ gleich

$$\frac{oa^2}{of}$$

welcher Bedingung die Strecke $ae$ Genüge leistet, die man erhält, wenn durch $a$ die Parallele zu $fb_1$ gezogen wird.

2. Von einer Hyperbel $C$ sind (siehe Fig. 2.) die Axen $aa_1$, $bb_1$ gegeben; man bestimme die Schnittpunkte $d$, $d_1$ der Geraden $P$ mit der Hyperbel.

Der Centralpunkt $c$ des der Geraden $P$ bezüglich $C$ entsprechenden Involution halbirt die Strecke, welche durch die Asymptoten der Hyperbel auf $P$ ausgeschnitten wird. Wie im vorangehenden Artikel gezeigt wurde, kann dieser Punkt jedoch auch dadurch erhalten werden, dass man vom Brennpunkte $f_1$ die Normale auf $P$ bis zu ihrem Schnittpunkte $t$ mit der Directrix $F_1$ dieses Brennpunktes zieht, und $ot$ mit $P$ zum Schnitt bringt.

Die Polare des Schnittpunktes $q$ von $F_1$ mit $P$ steht in $f_1$ nor-

Digitized by Google

mal auf $f_1 q$ schneidet $ct$ im Pol $p$ von $P$ nnd trifft $P$ in $q'$ derart, dass $qq'$ ein conjugirtes Punktepaar der Involution auf $P$ ist.

Die Punkte $d$, $d_1$ sind an die Relation

$$cd^2 = cd_1{}^2 = cq \,.\, cq'$$

gebunden nud folglich leicht zu construiren.

Wird von $o$ auf $ab_1$ die Normale $oe$ gefällt, so ist $ae$ gleich der Entfernung der Directrix $F_1$ vom Mittelpunkte $o$ der Hyperbel. Denn es ist

$$ae = \frac{oa^2}{of_1}.$$

Die Tangenten der Punkte $d$, $d_1$ gehen durch $p$.

3. Von einer Parabel $C$ sind (siehe Fig. 3.) die Axe $A$, der Brennpunkt $f$ und die Directrix $F$ gegeben; man bestimmt die Schnittpunkte $d$, $d_1$ der Geraden $P$ mit der Parabel.

Das Punktsystem, das der Geraden $P$ bezüglich $C$ zugehört, hat den Punkt $c$, in dem der zu $P$ conjugirte Durchmesser $D$ den Träger $P$ schneidet, zum Centralpunkt. Die Polare des unendlich fernen Punktes $v$ der Geraden $P$ in Bezug auf den Punktkreis $f$ steht normal auf $P$ und schneidet $F$ in dem — wie im Artikel 1. dargetau wurde — auf $D$ liegenden Punkte $t$; durch $t$ ist daher $D$ parallel zu $A$ zu ziehen.

Die Polare $fp$ des Schnittpunktes $q$ von $F$ und $P$ geht durch den zu $q$ conjugirten Punkt $q'$ des Punktsystems und durch den Pol $p$ von $P$.

Wir erhalten die gesuchten Schnittpunkte, indem wir $q'n = cq$ machen, aus $n$ und $q$ die Kreisbögen $q'h$, $ch$ beschreiben und die Sehne $ch$ beidersoits $c$ auf $P$ auftragen. Die Tangenten der Punkte $d$, $d_1$ gehen durch den Pol $p$.

4. Unter den besonderen Lagen, welche die Gerade $P$ bei der Lösung des vorliegenden Problems annehmen kann, wären insbesondere zwei Fälle hervorzuheben.

a. Die Gerade geht (siehe Fig. 4.) durch den Brennpunkt $f$ des Kegelschnittes.

Dann liegt bekanntlich der Pol $p$ von $P$ auf der Directrix $F$ dieses Brennpunktes und wird als Schnittpunkt derselben mit der in $f$ auf $P$ errichteten Normale erhalten. Die Gerade $op$ schneidet $P$

Digitized by Google

im Centralpunkt $c$ der hier in Betracht kommenden Involution und es ist

$$cd^2 = cd_1^2 = cf.cq,$$

wo $q$ den Schnittpunkt von $P$ mit $F$ bezeichnet.

Für die hier getroffene Annahme können die Punkte $d$, $d_1$ bekanntlich auch folgendermassen erhalten werden.

Wir beschreiben um $f$ mit dem Radius $aa_1$ einen Kreis $K_1$ und verbinden die Punkte $g$, $g_1$ in denen $K_1$ von $P$ geschnitten wird mit $f_1$. Sind $i$, $i_1$ die zweiten Schnittpunkte der Geraden $f_1 g$ und $f_1 g_1$ mit $K_1$, so ist $f_1 d_1$ parallel zu $fi$ und $f_1 d$ parallel zu $fi_1$.

Denn $d$, $d_1$ sind Mittelpunkte von Kreisen, die durch $f_1$ gehen und $K_1$ berühren, folglich Punkte der gegebenen Ellipse.

Bei der Parabel (Fig. 5.) ist in diesem Falle blos $fp$ normal auf die gegebene Gerade, ferner $pc$ parallel zur Axe $A$ zu ziehen und mit dem Radius $pc$ ein Kreis um $c$ zu beschreiben. Dieser schneidet $P$ in den gesuchten Punkten.

b. Die Gerade $P$ geht (siehe Fig. 6.) durch den Mittelpunkt des Kegelschnittes.

Hier haben wir also die Schnittpunkte eines Durchmessers $P$ mit der Ellipse $aa_1$, $bb_1$ zu construiren.

Das Punktsystem, welches dem Durchmesser in Bezug auf $C$ zugehört, hat den Mittelpunkt $o$ zum Centralpunkt und es handelt sich daher nur um ein Paar conjugirter Punkte desselben. Um ein solches zu erhalten, suchen wir etwa zu dem Schnittpunkte $q$ von $P$ mit der Directrix $F_1$ den conjugirten Punkt $q'$, indem wir $f_1 q'$ senkrecht auf $f_1 q$ errichten. Wird die Strecke $q'n = qo$ gemacht, und werden aus den Punkten $n$, $q$ mit dem Radius $oq$ Kreisbögen bis zu ihrem Schnittpunkt in $h$ beschrieben, so ist

$$bd = od_1 = oh.$$

Die Tangenten der gefundenen Punkte sind normal auf $f_1 g$. Denn der zu $P$ conjugirte Durchmesser wird erhalten, indem man entweder $f_1 t$ normal auf $P$ zieht und $t$ mit $o$ verbindet, oder direct von $o$ die Senkrechte auf $f_1 g$ fällt.

Fig. 7. zeigt die Lösung derselben Aufgabe für die Hyperbel, wenn letztere durch ihre Axen $aa_1$, $bb_1$ gegeben ist.

5. Zwei conjugirte Durchmesser $aa_1$, $bb_1$ (Fig. 8.) einer Ellipse $C$ sind gegeben; man construire die Schnittpunkte $d$, $d_1$ der Ellipse mit der Geraden $P$.

Digitized by Google

So wie im Vorangehenden suchen wir auch hier zunächst den Centralpunkt $c$ des der Geraden $P$ bezüglich $C$ zugehörigen Punktsystems, als Schnittpunkt der gegebenen Geraden mit dem ihr conjugirten Durchmesser der Ellipse. Wie schon im Vorangehenden angeführt wurde, ist dieser Centralpunkt identisch mit dem Centralpunkte jener Involution, nach welcher das Strahlensystem conjugirter Durchmesser der Ellipse die Gerade $P$ schneidet. Die letzt genannte Punktinvolution ist elliptisch, und wir erhalten zwei Paare von conjugirten Punkten derselben, indem wir die gegebenen Diameter und das zu $ab$, $ab_1$ parallele Durchmesserpaar mit $P$ zum Schnitt bringen. Das erste Paar liefert die Punkte $q$, $\beta$, während das zweite die conjugirten Punkte $\varepsilon$, $\varepsilon_1$ ergibt. Dabei wurde $\varepsilon_1$, da zur weiteren Construction nicht erforderlich, nicht gezeichnet. Ist $\varepsilon\gamma$ parallel zu $aa_1$ und $\beta\gamma$ parallel zu $ab$, so ist $o\gamma$ der gesuchte durch $c$ gehende Durchmesser. Denn betrachten wir das durch die Geraden $\beta\gamma$, $\gamma\varepsilon$ und die unendlich ferne Gerade der Ebene der Ellipse gebildete Dreieck, und $P$ als Transversale derselben, so ist in Folge eines bekannten Satzes $c$ der Centralpunkt der durch die Punktepaare $\beta q$, $\varepsilon\varepsilon_1$ bestimmten Involution.

Um ein conjugirtes Punktepaar des der Geraden bezüglich $C$ entsprechenden Punktsystems zu erhalten, construiren wir die Polare von $q$ in Bezug auf die gegebene Ellipse. Wir ziehen durch $q$ eine Parallele zu $ab_1$ bis zum Schnitt $r$ mit der Tangente des Punktes $a$ und verbinden $r$ mit $b$. Der Schnittpunkt $s$ der Geraden $br$ mit $aa_1$ ist (da $a$, $a_1$, $q$, $s$ vier harmonische Punkte sind) ein Punkt der gesuchten Polare. Sie schneidet $P$ in dem zu $q$ conjugirten Punkte $q'$ und geht durch den Pol $p$ von $P$. Nun haben wir wieder blos die mittlere geometrische Proportionale aus den Strecken $cq$, $cq'$ beiderseits $c$ auf $P$ aufzutragen. Die Tangenten der gefundenen Punkte $d$, $d_1$ gehen durch den Pol $P$.

6. Eine Hyperbel $C$ ist durch einen reellen Diameter $aa_1$ (siehe Fig. 9.) und den diesem conjugirten imaginären Durchmesser $bb_1$ gegeben; man construire die Schnittpunkte $d$, $d_1$ der Geraden $P$ mit der Hyperbel.

Der Centralpunkt $c$ des der Geraden bezüglich $C$ zugehörigen Punktsystems halbirt die zwischen den Asymptoten der Hyperbel enthaltene Strecke $\delta\delta_1$ von $P$. Hierbei ist $o\delta$ parallel zu $ab_1$ und $o\delta_1$ parallel zu $ab$. Der zum Schnittpunkt $q$ von $aa_1$ mit $P$ conjugirte Punkt $q'$ ergibt sich wie im Vorangehenden. Wir ziehen durch $q$ die Parallele zu $ab_1$ bis die Tangente des Punktes $a$ in $r$ getroffen wird, und bringen die Gerade $br$ mit $aa_1$ in $s$ zum Schnitt. Die durch $s$ parallel zu $bb_1$ gezogene Gerade geht durch $q'$ und schneidet $oc$

im Pol $p$ von $P$. Die Entfernung der gesuchten Schnittpunkte $d$, $d_1$ vom Centralpunkte $c$ ist gleich der mittleren geometrischen Proportionale aus den Strecken $cq$ und $cq'$.

7. Eine Parabel $C$ (siehe Fig. 10.) ist durch die Richtung der Axe, eine Tangente $T$ sammt ihrem Berührungspunkte $a$ und einen Punkt $b$ gegeben; man bestimme die Schnittpunkte $d$, $d_1$ der Parabel mit der Geraden $P$.

Wird durch den Berührungspunkt $a$ der Tangente $T$ die Parallele $A$ zu der gegebenen Axenrichtung gezogen, so liefert uns diese den der Tangente $T$ conjugirten Durchmesser der Parabel. Um den Centralpunkt $c$ des der Geraden $P$ in Bezug auf $C$ entsprechenden Punktsystems zu bestimmen, ist es nötig jenen Durchmesser $D$ der Parabel zu ermitteln, welcher der Geraden $P$ conjugirt ist. Einen Punkt $\gamma$ dieses Durchmessers erhält man, wenn man durch den Schnittpunkt $\beta$ der Geraden $A$, $P$ die Parallele zu $ab$ und durch den Punkt $\varepsilon$, in dem der zu $ab$ conjugirte Durchmesser der Parabel die Gerade $P$ schneidet, die Parallele zu $T$ zieht. Der Beweis, dass $\gamma$ in der Tat ein Punkt von $D$ ist, folgt direct, wenn man die in Fig. 8. zur Bestimmung des Centralpunktes $c$, also zur Ermittelung des zu $P$ conjugirten Durchmessers $o\gamma$ führende Construction für die Parabel zurecht legt. Schneidet die Polare des Punktes $\beta$ die Gerade $P$ in $\beta'$, so ist $\beta\beta'$ ein conjugirtes Punktepaar der Involution auf $P$ und die Entfernung der gesuchten Schnittpunkte $d$, $d_1$ vom Centralpunkte $c$, daher gleich der mittleren geom. Proportionale aus den Strecken $c\beta$ und $c\beta'$. Wie aus der Polarentheorie bekannt ist, halbirt der Schnittpunkt $t$ der Geraden $P$, $T$ die Strecke $\beta\beta'$, und es ist daher die Entfernung der Punkte $d$, $d_1$ vom Centralpunkte $c$ auch gleich der Länge der Tangente, die von $c$ an den mit $\beta t$ um $t$ beschriebenen Kreis gelegt werden kann. Wir erhalten diese Länge jedoch auch, wenn wir $mt = \beta c$ machen, um den Punkt $m$ mit dem Radius $tc$ einen Kreis $K$ beschreiben und diesen mit der in $c$ auf $P$ errichteten Normale in $h$ zum Schnitt bringen. Denn da $K$ durch $\beta'$ hindurch geht, so ist $ch$ die mittlere geom. Proportionale aus $c\beta'$ und $cn$, daher in Folge der Construction auch die mittlere geom. Proportionale aus $c\beta'$ und $c\beta$.

Die Tangenten der gefundenen Punkte geben durch den Pol $p$ der Geraden $P$. Dieser Pol liegt auf der Polare des Punktes $\beta$ und wir haben daher blos $rp = a\beta$ zu machen, um $p$ zu erhalten.

8. Zwei conjugirte Diameter $aa_1$, $bb_1$ (siehe Fig. 12.) einer Ellipse $C$ sind gegeben; man construire die Schnittpunkte des Durchmessers $P$ mit der Ellipse.

Digitized by Google

Der Mittelpunkt $o$ der Ellipse ist der Centralpunkt des Punktsystems, das der Geraden $P$ in Bezug auf $C$ zugehört. Um ein conjugirtes Punktepaar dieses Punktsystems zu erhalten, construiren wir beispielsweise den conjugirten Punkt $q'$ zu dem Schnittpunkte $q$ des Durchmessers $P$ mit der Tangente des Punktes $a$. Die Polare des Punktes $q$ geht durch $a$ und ist parallel dem zu $P$ conjugirten Durchmesser der Ellipse. Wir ziehen durch den Schnittpunkt $e$ der Geraden $P$ und $ab$ die Parallele zu $bb_1$ und schneiden dieselbe mit dem zu $ab$ conjugirten Durchmesser in $g$. Die Gerade $ag$ ist die gesuchte Polare. Denn betrachten wir das durch $ae$, $eg$, $ag$ und die unendlich ferne Gerade der Ebene des Kegelschnittes gebildete vollständige Vierseit, so werden die Verbindungsgeraden gegenüber liegender Ecken desselben mit dem Punkte $o$ Strahlenpaare einer Involution bilden, welche $ag$ in einer Punktinvolution schneiden, die $q'$ zum Centralpunkt besitzt.

Vermöge der Construction ist diese Strahleninvolution identisch mit der Involution conjugirter Durchmesser der Ellipse $C$ und folglich $ag$ parallel zu jenem Diameter der Ellipse, der conjugirt ist zu $P$. Die gesuchten Schnittpunkte $d$, $d_1$ genügen der Relation

$$od^2 = od_1^2 = oq.oq'.$$

Die Tangenten der Punkte $d$, $d_1$ sind parallel zu $ag$.

9. Von einer Ellipse (siehe Fig. 13.) sind zwei conjugirte Diameter $aa_1$, $bb_1$ gegeben; man bestimme die Schnittpunkte $d$, $d_1$ der Ellipse mit einer zu $aa_1$ parallelen Geraden $P$.

Es wurde bereits hervorgehoben, dass zwei einen Kegelschnitt erzeugende Strahlenbüschel auf einer Geraden $P$ dann eine involutorische Punktreihe hervorbringen, wenn die Verbindungsgerade ihrer Scheitel durch den Pol $p$ der Geraden geht.

Hieraus folgt, dass die Schnittpunkte $q$, $q'$ der Geraden $ac$, $ab_1$ mit $P$ ein conjugirtes Punktepaar des der Geraden $P$ zugehörigen Punktsystems bilden. Der Schnittpunkt $c$ von $P$ mit $bb_1$ ist der Centralpunkt dieses Punktsystems, und folglich

$$cd^2 = cd_1^2 = cq.cq'.$$

Der Polarentheorie zufolge schneiden sich die Geraden $b_1q$, $bq'$ in einem Punkte $i$ der Ellipse $C$, während $ai$ durch den Pol $p$ von $P$ geht. Hiermit sind auch die Tangenten der Punkte $d$, $d_1$ bestimmt.

10. Eine Hyperbel $C$ ist durch ein Paar conjugirter Diameter $aa_1$, $bb_1$ gegeben; man bestimme die Schnittpunkte $d$, $d_1$ derselben mit einer zu dem reellen Durchmesser $aa_1$ parallelen Geraden $P$.

Digitized by Google

Die Gerade $P$ wird vom Durchmesser $bb_1$ im Centralpunkte $c$ des Punktsystems geschnitten, welches $P$ bezüglich $C$ zugehört. Um ein Paar conjugirter Punkte dieses Punktsystems zu erhalten, suchen wir beispielsweise zum Schnittpunkte $q$ der Geraden $P$ mit der Tangente des Punktes $a$ den conjugirten Punkt $q'$; indem wir die Polare des Punktes $q$ mit $P$ zum Schnitt bringen. Diese Polare wird parallel sein zu jenem Diameter der Hyperbel, der zu $oq$ conjugirt ist, daher mit $oq$ die Asymptoten harmonisch trennt. Schneidet also die zu $ab$ parallele Asymptote $o\delta_1$ die Gerade $a_1c$ in $g$, so ist die gesuchte Polare $aq'$ parallel zu $bg$.

Wird die mittlere geom. Proportionale aus den Strecken $cq$, $cq'$ beiderseits $c$ auf $P$ aufgetragen, so erhalten wir die verlangten Punkte $d$, $d_1$, und da die Polare des Punktes $q$ durch den Pol $p$ der Geraden $P$ geht, so sind hierdurch auch die Tangenten der construirten Schnittpunhte bestimmt.

Bemerkung. Zur Bestimmung der Schnittpunkte $d$, $d_1$ der Geraden $P$ mit der Hyperbel $C$ (Fig. 14.) führt auch eine bekannte Relation, zu der man gelangt, wenn man die Punkte als Doppelpunkte zweier projectivischen Punktreihen auffast, welche durch zwei besondere die Hyperbel erzeugende Strahlenbüschel auf $P$ hervorgebracht werden. Projiciren wir nämlich die sämmtlichen Punkte der Hyperbel aus ihren unendlich fernen Punkten, so schneiden die so erzeugten Parallel-Strahlenbüschel die Gerade $P$ in zwei projectivischen Punktreihen, deren Gegenpunkte die Schnittpunkte $\delta$, $\delta_1$ der Asymptoten der Hyperbel mit $P$ sind. Schneiden die nach $a_1$ gehenden Strahlen der Büschel die Gerade $P$ in $\alpha$, $\alpha'$, so gilt bekanntlich die Relation

$$\alpha\delta\,.\,\alpha'\delta_1 = d_1\delta\,.\,d_1\delta_1$$

und da einerseits

$$\alpha\delta = \alpha'\delta_1 = oa$$

ist (weil $a$, $\alpha$ parallel zu $o\delta$ und $a_1\alpha'$ parallel zu $o\delta_1$ ist) und anderseits die beiden Doppelpunkte zu $\delta$, $\delta_1$ symmetrisch liegen *), daher

$$d\delta = d_1\delta_1 \quad \text{und} \quad d_1\delta = d\delta_1$$

sein muss, so folgt

$$ao^2 = d_1\delta_1\,.\,\delta_1 d$$

Wird also in $\delta_1$ die Normale auf $P$ errichtet und auf dieselbe der halbe reelle Diameter aufgetragen, daher

$$\delta_1\varepsilon = oa$$

gemacht, so ist

$$c\varepsilon = cd = cd_1.$$

---

*) Siehe Steiner's Vorlesungen pag 42.

11. Fig. 15. enthält die Lösung derselben Frage für den Fall, wenn die Gerade $P$ dem imaginären Durchmesser $bb_1$ parallel ist.

Hier wurde die Polare $bq$ des Punktes $b_1$ mit $P$ zum Schnitt gebracht und zu $q$ der conjugirte Punkt $q'$ in dem $P$ bezüglich der Hyperbel $C$ zugehörigen Punktsystem ermittelt.

Man erhält $q'$ am einfachsten als Schnitt von $P$ mit der Polare des Punktes $q$ in Bezug auf die Hyperbel. Diese Polare geht durch $b_1$ und ist parallel zu der Verbindungsgeraden des Punktes $a$ und des Schnittpunktes $g$ der Asymptote $o\delta$ mit der Geraden $b_1c$.

Die Entfernung der Punkte $d$, $d_1$ vom Centralpunkte $c$ ist der mittleren geom. Proportionale aus den Strecken $cq$, $cq'$ gleich, während die Tangenten der Punkte durch den Schnittpunkt $p$ von $b_1q'$ mit $aa_1$ hindurch gehen.

Wird der mit dem Radius $c\delta$ um $c$ als Mittelpunkt beschriebene Kreis $K$ von der in $d_1$ auf $P$ errichteten Senkrechten in $\varepsilon$ geschnitten, so gelangen wir durch dieselben Folgerungen wie bei Fig. 14. zu dem Resultate, dass $d_1\varepsilon$ gleich ist dem halben imaginären Diameter $ob_1$.

Aus dieser Relation geht eine einfache Construction der Schnittpunkte $d$, $d_1$ hervor.

12. Von einer Parabel $C$ sind (siehe Fig. 11.) eine Tangente $T$, ihr Berührungspunkt $a$, die Richtung der Axe und ein Punkt $b$ gegeben; man bestimme die Schnittpunkte $d$, $d_1$ von $C$ mit einer zu $T$ parallelen Geraden $P$.

Wird der Punkt $b$ aus $a$ und aus dem unendlich fernen Punkte der Parabel auf $P$ projicirt, so erhalten wir hierdurch zwei conjugirte $q$, $q'$ des Punktsystems, das $P$ mit $C$ hervorbringt.

Da der durch $a$ gehende Durchmesser der Parabel die Gerade $P$ im Centralpunkte $c$ dieses Punktsystems schneidet, so ist

$$cd^2 = cd_1^2 = cq.cq'.$$

Die Tangenten der Punkte $d$, $d_1$ werden erhalten, wenn man diese Punkte mit dem Pole $p$ der Geraden verbindet. Um $p$ zu erhalten, haben wir die Strecke $ac$ über $a$ hinaus um ihre eigene Länge zu verlängern.

13. Von einer Ellipse sind zwei conjugirte Diameter $aa_1$, $bb_1$ gegeben; man bestimme die Berührungspunkte $d$, $d_1$ der vom Punkte $p$ an $C$ gehenden Tangenten.

Digitized by Google

Wir construiren die Polare $P$ von $p$ in Bezug auf die Ellipse und bestimmen die Schnittpunkte von $P$ mit $C$.

Diese Polare ist parallel zu jenem Diameter von $C$, der dem nach $p$ gehenden conjugirt ist; schneidet also $op$ die Gerade $ab_1$ in $e$, während $g$ den Schnittpunkt der durch $e$ und $o$ parallel zu $aa_1$ und $ab$ respective gezogenen Geraden bezeichnet, so ist dem Vorangehenden zufolge $P$ parallel zu $b_1g$. Einen zweiten Punkt der Geraden $P$ erhalten wir, indem wir den Pol $q'$ der durch $p$ parallel zu $aa_1$ gezogenen Geraden $Q$ bezüglich $C$ construiren. Sind $r$, $r'$ die Schnittpunkte von $Q$ mit $ab$, $ab_1$ respective, so treffen sich die Geraden $br'$, $b_1r$ in dem auf $C$ liegenden Punkte $i$, und $ai$ schneidet $bb_1$ in $q'$. Die Gerade $P$ wird vom Diameter $op$ im Centralpunkte $c$ jenes Punktsystems geschnitten, das $P$ in Bezug auf $C$ zugehört. Der Punkt $q'$ bildet mit dem Punkte $PQ$ ein conjugirtes Punktepaar $qq'$ dieses Punktsystems, und es ist dem zufolge

$$cd^2 = cd_1{}^2 = cq.cq'.$$

14. Denken wir uns um den Punkt $p$ in der Ebene des Kegelschnittes $C$ (siehe Fig. 17.) einen Strahl gedreht, und für jede Lage desselben den conjugirten normalen Strahl construirt, so schneidet der letztere bekanntlich eine Parabel $\Pi$, welche wie man für specielle Lagen des beweglichen Strahls sofort findet, die Axen $A$, $B$ des Kegelschnittes $C$, die Polare $P$ von $p$ und die Normalstrahlen $N$, $N_1$ der dem Punkte $p$ bezüglich $C$ zugehörigen Strahleninvolution zu Tangenten besitzt*). Diese Parabel hat, da die Tangenten $A$, $B$ und $N$, $N_1$ aufeinander senkrecht stehen, die Diagonale $op$ des vollständigen Vierseits $ABNN_1$ zur Directrix $D$, während ihr Brennpunkt $F$ mit dem dieser Diagonale gegenüber liegenden Diagonalpunkte zusammenfällt.

Die Geraden $N$, $N_1$ bilden mit der Axe $B$ ein Dreieck, dessen umschriebener Kreis $K$ — da $N$, $N_1$ zwei conjugirte normale Strahlen in Bezug auf $C$ sind — einerseits durch die Brennpunkte $f$, $f_1$ des Kegelschnittes $C$ und anderseits — da $BNN_1$ ein der Parabel $\Pi$ umschriebenes Dreiseit ist — durch den Parabel-Brennpunkt $F$ geht.

Die Normalen $\varDelta$, $\varDelta_1$ der Berührungspunkte $d$, $d_1$ der von $p$ an $C$ gehenden Tangenten $F$, $F_1$ bilden mit diesen Tangenten ein Sehnenviereck; dessen umschriebener Kreis $K_1$ — da $\varDelta$, $\varDelta_1$ vermöge der Erzeugungsweise der Parabel gleichfalls Tangenten von $\Pi$ sind, und mit $P$ daher ein der Parabel umschriebenes Dreiseit bilden — durch den Parabelbrennpunkt $F$ gehen wird.

*) Siehe Steiner's Vorlesungen pag. 206. der zweiten Auflage.

Digitized by Google

In diesen Relationen ist eine nicht uninteressante Lösung unseres Problems für den Fall enthalten, wenn von dem Kegelschnitte, dessen Schnittpunkte mit einer Geraden construirt werden sollen, die Axen gegeben sind.

Wäre beispielsweise in Fig. 17. die Gerade $P$, der Kegelschnitt $C$ aber blos durch seine Axen gegeben, so können wir die Schnittpunkte $d$, $d_1$ folgendermassen ermitteln. Wir suchen die Parabeldirectrix $D$, indem wir jenen Durchmesser des Kegelschnittes $C$ ermitteln, der conjugirt ist zu $P$. Die Directrix schneidet $P$ in $c$, und die in $c$ auf $P$ errichtete Senkrechte $R$ liefert uns eine Tangente der Parabel $\Pi$. Da wir nun von $\Pi$ vier Tangenten $A$, $B$, $P$, $R$ kennen, so kann der Parabelbrennpunkt $F$ leicht construirt werden. Er ist der Schnittpunkt der Diagonalen $\pi q$ und $qr_1$ des vollständigen Vierseits $ABPR$, und ausserdem ist aus sehr nahe liegenden Gründen $R$ die Halbirungsgerade des Winkels $ocF$ und $A$ jene von $poF$, aus welcher Beziehung ebenfalls eine Construction für $F$ resultirt. Ist $F$ gefunden, so ist der Kreis $K$ und hierdurch auch $p$ auf $D$ bestimmt, und wir brauchen blos durch die Punkte $p$, $F$ jenen Kreis $K_1$ zu beschreiben, dessen Mittelpunkt auf $R$ liegt, um in seinen Schnittpunkten mit $P$ die gesuchten Punkte $d$, $d_1$ zu erhalten.

15. Fig. 18. zeigt die Construction der Schnittpunkte $d$, $d_1$ einer Ellipse $aa_1$, $bb_1$ mit der Geraden $P$, im Sinne der dem vorangehenden Artikel besprochenen Lösungsweise.

Wir ziehen durch $o$ die Parallele $oe$ zu $a_1b$ und durch den Schnittpunkt $q$ von $P$ mit $aa_1$ die Parallele zu $ab$. Wird die zuletzt gezogene Gerade von der Ordinate des Punktes $e$ in $\gamma$ getroffen, so ist $o\gamma$ der zu $P$ conjugirte Durchmesser $D$ der Ellipse. Den Beweis für diese Construction haben wir im Vorangehenden bereits geliefert; ihre Richtigkeit erhellt auch unmittelbar, wenn wir die Ellipse als orthogonale Projection des Kreises auffassen, den wir uns über $aa_1$ beschrieben und so lange um dieselben gedreht denken, bis sich der zu $aa_1$ normale Durchmesser desselben als die kleine Axe der Ellipse projicirt. Betrachten wir dann das Dreieck $oeq$ im Raume, so ist $\gamma$ die Projection seines Höhenschnittes und folglich steht $o\gamma$ im Raume senkrecht auf $P$. Von der Parabel $\Pi$ kennen wir nun die Directrix $D$ und die Tangenten $aa_1$, $bb_1$, $P$. Die im Schnittpunkte $c$ der Geraden $D$, $P$ auf $P$ errichtete Normale $R$ ist ebenfalls eine Tangente der Parabel, und folglich fällt der Parabelbrennpunkt $F$ mit jenem Diagonalpunkte des vollständigen Vierseits $aa_1$, $bb_1$, $P$, $R$ zusammen, welcher der Diagonale $D$ gegenüber liegt. Die Brennpunkte $f$, $f_1$ von $C$ liegen mit $F$ und dem Pole $p$ von $P$ auf einem Kreise $K$. Der Pol $p$ kann daher mit Hilfe dieses Kreises leicht ermittelt werden.

Digitized by Google

Da aber die Geraden $D$, $oF$ mit den Axen der Ellipse gleiche Winkel bilden, so folgt hieraus, dass die Punkte $f$, $f_1$, $p$, $F$ vier harmonische Punkte des Kreises $K$ sind, und dass

$$op = \frac{of^2}{oF} \quad \text{ist.}$$

Wird daher $og = oF$ gemacht und $f_1h$ normal auf $f_1g$ errichtet, so ist $oh = op$.

Durch die Punkte $p$, $F$ haben wir schliesslich jenen Kreis $K_1$ zu beschreiben, dessen Mittelpunkt auf $R$ liegt, um die Punkte $d$, $d_1$ auf $P$ zu erhalten.

Nebenbei sei noch bemerkt, dass, da $co$ und $cF$ gleiche Winkel mit $R$ einschliessen, auch $d$, $d_1$, $F$, $p$ vier harmonische Punkte des Kreises $K_1$ sein müssen.

16. Von einer Hyperbel $C$ (Fig. 19.) sind die reelle Axe $aa_1$ und die Asymptoten $G$, $G_1$ gegeben; man bestimme die Schnittpunkte $d$, $d_1$ der Geraden $P$ mit $C$.

Wir construiren den Brennpunkt $F$ jener Parabel $\Pi$, welche die Axen $A$, $B$ der gegebenen Hyperbel und die Gerade $P$ zu Tangenten, den zu $P$ conjugirten Durchmesser jedoch zur Directrix besitzt. $D$ halbirt die zwischen den Asymptoten $G$, $G_1$ enthaltene Strecke der Geraden $P$ in $c$ und ist daher direct gegeben. Die in $c$ auf $P$ errichtete Normale $R$ berührt die Parabel $\Pi$ ebenfalls, und $F$ ist infolge dessen der der Diagonale $D$ gegenüberliegende Diagonalpunkt des vollständigen Vierseits $ABPR$.

Wird durch $F$ und die Brennpunkte $f$, $f_1$ der Hyperbel ein Kreis $K$ gelegt, so geht dieser durch den Pol $p$ der Geraden $P$. Wir construiren $p$ jedoch mit Hilfe der Directrix $\Phi$ des Brennpunktes $f$. Schneidet $\Phi$ die Gerade $P$ in $q$, so ist — wie in Fig. 1. gezeigt wurde — $fp$ senkrecht auf $fq$. Schliesslich haben wir durch die Punkte $F$, $p$ einen Kreis $K_1$ derart zu legen, dass der Mittelpunkt desselben auf $R$ zu liegen kommt. $K$ schneidet $P$ in den gesuchten Punkten.

17. Es sollen die Schnittpunkte $d$, $d_1$ der Geraden $P$ (siehe Fig. 20.) mit der Parabel $C$ construirt werden, von welcher die Leitlinie $\Phi$ und der Brennpunkt $f$ gegeben sind.

Durch Uebertragung der in Fig. 17. zur Bestimmung der Punkte $d$, $d_1$ angestellten Beobachtungen auf die Parabel gelangen wir zu dem nachfolgenden Resultate.

Digitized by Google

Schneidet der zu $P$ conjugirte Durchmesser der Parabel die Gerade $P$ in $c$ und trifft die Verbindungsgerade der Punkte $f$, $P\Phi$ die in $c$ auf $P$ errichtete Normale in $m$, so geht der mit $mp$ um $m$ beschriebene Kreis $K$ durch die Punkte $d$, $d_1$. Der Durchmesser $D$ geht durch den Punkt $t$, in welchem das von $f$ auf $P$ gefällte Perpendikel $\Phi$ schneidet, während der Pol $p$ als Schnittpunkt von $D$ mit der in $f$ auf $fq$ errichteten Senkrechten erhalten wird.

18. Aus Fig. 17. resultirt eine einfache Axenbestimmung des Kegelschnittes, wenn derselbe (siehe Fig. 21.) durch zwei Tangenten $T$, $T_1$ sammt ihren Berührungspunkten $t$, $t_1$ und den Mittelpunkt $o$ gegeben ist.

Legen wir durch den Schnittpunkt $p$ der Tangenten und durch die Punkte $t$, $t_1$ einen Kreis $K$, und bestimmen zu den drei Punkten den vierten harmonischen $p$ zugeordneten Punkt $F$, so ist durch $op$ als Directrix $D$ und $F$ als Brennpunkt eine Parabel $\Pi$ bestimmt, welche die Axen des gegebenen Kegelschnittes zu Tangenten besitzt. Man erhält daher diese Axen, wenn man von $o$ die beiden möglichen Tangenten an $\Pi$ legt, somit die Halbirungsgeraden der Winkel $poF$ und $(180^0 - poF)$ zeichnet. Durch die Punkte $p$, $F$ legen wir ferner jenen Kreis $K_1$, dessen Mittelpunkt auf der den Winkel $(180^0 - poF)$ halbirenden Axe liegt; dieser geht durch die Brennpunkte $f$, $f_1$ des gegebenen Kegelschnittes $C$. Die Bestimmung der Axenlängen von $C$ bedarf nun keiner weiteren Auseinandersetzung.

Bezüglich des Parabelbrennpunktes $F$ wäre zu bemerken, dass dasselbe am einfachsten dadurch erhalten wird, wenn man durch den zweiten Schnittpunkt $q$ von $D$ mit $K$, die Parallele $qF$ zu $tt_1$ zieht.

## II.

# Lieu des centres des cercles tangents intérieurement à un demi-cercle, et extérieurement aux deux demi-cercles, qui ont pour diamètres les deux segments du diamètre du premier demi-cercle.

Par

**Georges Dostor.**

1. **Rayon du cercle tangent aux trois demi-cercles.** Sur le diamètre $EF = 2a$ d'un demi-cercle $ELF$ prenons un point quelconque $D$, et sur les deux parties $ED = 2b$ et $DF = 2c$, prises comme diamètres, traçons les deux demi-cercles intérieurs $EMD$ et $DNF$, dont les centres sont en $B$ et $C$. Nous nous proposons de calculer le rayon $AM = AN = z$ du cercle $A$, qui est tangent aux trois demi-cercles.

Joignons les centres $O$, $B$, $C$ des trois demi-cercles au centre $A$ du cercle inscrit, et tirons la perpendiculaire $AP$ sur $EF$.

Les deux triangles $ABO$ et $ACO$ nous donnent

$$\overline{AB}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{BO}^2 + 2BO.OP,$$
$$\overline{AC}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{CO}^2 - 2CO.OP.$$

Puisque

$$AB = b + z,\quad AO = a - z,\quad AC = c + z,$$
$$BO = a - b = c,\quad CO = a - c = b,$$

ces égalités reviennent à

$$(b+z)^2 = (a-z)^2 + c^2 + 2c . OP,$$
$$(c+z)^2 = (a-z)^2 + b^2 - 2b . OP,$$

ou à

$$b^2 + 2bz = a^2 - 2az + c^2 + 2c . OP,$$
$$c^2 + 2cz = a^2 - 2az + b^2 - 2b . OP.$$

Si nous observons que les identités

$$a - c = b, \quad a - b = c$$

donnent

$$a^2 + c^2 - b^2 = 2ac, \quad a^2 + b^2 - c^2 = 2ab,$$

nos deux relations deviendront

(1)
$$\begin{cases} (a+b)z = ac + c . OP, \\ (a+c)z = ab - b . OP. \end{cases}$$

Divisons respectivement par $c$ et $b$, puis ajoutons; nous obtenons l'équation

$$\left(\frac{a+b}{c} + \frac{a+c}{b}\right)z = 2a,$$

qui nous donne enfin

(I)
$$z = \frac{2abc}{a(b+c) + b^2 + c^2} = \frac{2abc}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{abc}{a^2 - bc}$$

pour la valeur cherchée du rayon $z$.

2. **Coordonnées du centre du cercle tangent aux trois demi-cercles.** Prenons le centre $O$ du demi-cercle donné pour origine des coordonnées, le diamètre $EF$ pour axe des $x$ et la perpendiculaire élevée en $O$ sur ce diamètre pour axe des $y$. Les coordonnées du centre $A$ du cercle inscrit seront

$$OP = x, \quad AP = y.$$

Nous avons

$$\overline{AP}^2 = \overline{AO}^2 - \overline{OP}^2 = (AO + OP)(AO - OP).$$

Puisque $AO = a - z$ et que les égalités (1) donnent

$$OP = \frac{a+b}{c} z - a, \qquad -OP = \frac{a+c}{b} - a,$$

il vient

$$AO + OP = a - z + \frac{a+b}{c} z - a = \frac{a+b-c}{c} z = \frac{2bz}{c},$$

$$AO - OP = a - z + \frac{a+c}{b} z - a = \frac{a+c-b}{b} z = \frac{2cz}{b}.$$

Nous en concluons que

$$y^2 = \overline{AP}^2 = \frac{2bz}{c} \cdot \frac{2cz}{b} = 4z^2,$$

d'où

(II) $$y = 2z = \frac{4abc}{a^2+b^2+c^2} = \frac{2abc}{a^2-bc}.$$

Ainsi la perpendiculaire abaissée du centre du cercle inscrit sur le diamètre du demi-cercle donné est égale au diamètre du cercle inscrit.

L'abscisse $OP = x$ est donnée par l'une ou l'autre des deux égalités (1), desquelles on tire

$$x = \frac{a+b}{c} z - a = \frac{2(a+b)ab}{a^2+b^2+c^2} - a$$

ou, puisque $a - b = 0$, d'où $2ab - a^2 = b^2 - c^2$,

(III) $$x = \frac{4a(b^2-c^2)}{a^2+b^2+c^2} = \frac{2a^2(b-c)}{a^2-bc}$$

3. **Lieu des centres du cercle tangent aux trois demi-cercles.** Pour avoir l'équation de ce lieu, il nous suffirait d'éliminer $b$ et $c$ entre les deux égalités (II) et (III) et l'identité $b + c = a$. Nous l'obtiendrons plus rapidement de la manière suivante.

Dans les deux relations (1) remplaçons $z$ par $\frac{y}{2}$ et $OP$ par $x$; elles deviennent

$$(a+b)y = 2ac + 2cx,$$
$$(a+c)y = 2ab - 2bx.$$

Ajoutant et retranchant successivement, nous obtenons

$$3ay = 2a^2 - 2(b-c)x,$$
$$(b-c)y = -2a(b-c) + 2ax,$$

d'où nous tirons

$$2(b-c)x = 2a^2 - 3ay,$$
$$(b-c)(y+2a) = 2ax.$$

Il nous suffira de multiplier en croix, pour éliminer $b - c$. Nous trouvons ainsi, en divisant par $a$, que

$$4x^2 = (2a - 3y)(2a + y),$$

ou

(IV) $$4x^2 + 3y^2 + 4ay - 4a^2 = 0$$

est l'équation du lieu cherché.

Ainsi, lorsque le point de division $D$ du diamètre $EF$ se meut sur ce diamètre, le centre $A$ du cercle tangent

aux trois demi-cercles décrit nne ellipse, dont les axes sont l'un parallèle au diamètre *EF*, et l'autre dirigé suivant la perpendiculaire menée à *EF* par le centre *O* du demi-cercle donné.

Cette ellipse coupe les deux axes de coordonnées aux points $y=0,\ x=\pm a;\ x=0,\ y=\frac{2a}{3}$ et $y=2a$.

4. **Elements de l'ellipse.** Le centre de notro lieu géométrique (IV) s'obtient en égalant à zéro les deux dérivées

$$8x,\quad 6y+4a$$

de son équation. Les coordonnées du centre de l'ellipse sont donc

$$x=0,\quad y=-\frac{2a}{3}. \tag{2}$$

Ainsi le centre de l'ellipse est sitné sur la perpendiculaire menée par le centre *O* au diamètre *EF*, à une distance au-dessous de ce centro *O* égale au tiers du diamètre *EF*.

L'équation de l'ellipse rapportée à son centro sora par suito

$$4x^2+3y'^2-\frac{16a^2}{3}=0 \tag{3}$$

ou

$$12x^2+9y'^2-16a^2=0,$$

où l'on a

$$y'=y+\frac{2a}{3}. \tag{4}$$

Les deux demi-axes de l'ellipse sont

$$A=\frac{2a}{\sqrt{3}},\qquad B=\frac{4a}{3}, \tag{5}$$

d'où on tire pour la demi-distance focale

$$C=\sqrt{B^2-A^2}=\frac{2a}{3}. \tag{6}$$

Nous voyons ainsi que le centre du demi-cercle donné est l'un des foyers de l'ellipse.

Les équations des deux directrices, rapportées au centro do l'ellipse, sont

$$y'=\pm\frac{B^2}{C}=\pm\frac{8a}{3}. \tag{7}$$

Rapportées au centre $O$ du demi-cercle donné, elles ont pour équations

$$y+\frac{2a}{3}=\pm\frac{8a}{3},$$

ou

(8) $$y=2a \quad \text{et} \quad y=-\frac{10a}{3}.$$

5. **Triangle dont les sommets sont le centre $A$ du cercle tangent et les centres $B$, $C$ des deux demi-cercles construits sur les diamètres $ED=2b$, $DF=2c$.** Nous avons pour la surface de ce triangle

$$S=BC.\frac{AP}{2}=(b+c)z=az$$

ou

(9) $$S=\frac{2a^2bc}{a^2+b^2-c^2}=\frac{a^2bc}{a^2-bc}.$$

Soient $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les trois côtés du $BC$, $CA$, $AB$ du triangle $ABC$, $2p$ son périmètre, $R$ le rayon du cercle circonscrit, $r$ le rayon du cercle inscrit; et $r'$, $r''$, $r'''$ les rayons des trois cercles ex-inscrits. Nous avons

$$\alpha=b+c,\quad \beta=c+z,\quad \gamma=b+z;$$

d'où nous tirons

$$p=b+c+z=a+z,$$
$$p-\alpha=z,\quad p-\beta=b,\quad p-\gamma=c.$$

Il nous vient par conséquent

$$r=\frac{S}{p}=\frac{az}{a+z},$$

$$r'=\frac{S}{p-\alpha}=\frac{az}{z},$$

$$r''=\frac{S}{p-\beta}=\frac{az}{b},$$

$$r'''=\frac{S}{p-\gamma}=\frac{az}{c}.$$

Puisque

$$r=\frac{az}{a+z}=\frac{a}{1+\frac{a}{z}},$$

et que

$$1+\frac{a}{z}=1+\frac{a^2+b^2+c^2}{2bc}=\frac{a^2+(b+c)^2}{2bc}=\frac{a^2}{bc},$$

nous trouvons que

Digitized by Google

(10) $$r = \frac{bc}{a}.$$

Ainsi le diamètre du cercle inscrit dans notre triangle est la quatrième proportionnelle au diamètre du demi-cercle donné et aux diamètres des deux autres demi-cercles.

L'égalité

(11) $$r' = \frac{az}{z} = a$$

prouve que le cercle ex-inscrit, qui est opposé à l'angle *BAC* a même rayon que le demi-cercle donné.

Les deux autres relations nous donnent

(12) $$r'' = \frac{2a^2c}{a^2+b^2+c^2} = \frac{a^2c}{a^2-bc}, \quad r''' = \frac{2a^2b}{a^2+b^2+c^2} = \frac{a^2b}{a^2-bc}.$$

Le rayon $R$ du cercle circonscrit est donné par la formule $2R.AP = AB.AC$ ou

$$4Rz = (b+z)(c+z),$$

que l'on peut écrire

$$4R = z\left(1+\frac{b}{z}\right)\left(1+\frac{c}{z}\right);$$

mais il est aisé de voir, d'après la valeur (I), que

$$1+\frac{b}{z} = \frac{a^2+c^2}{ac}, \quad 1+\frac{c}{z} = \frac{a^2+b^2}{ab};$$

il vient donc

$$4R = \frac{2abc}{a^2+b^2+c^2} \cdot \frac{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}{a^2bc},$$

ou

(13) $$2aR = \frac{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}{a^2+b^2+c^2}.$$

Les valeurs (12) ou leurs équivalentes $r'' = \frac{az}{b}$, $r''' = \frac{az}{c}$ nous donnent

$$\frac{1}{r''} + \frac{1}{r'''} = \frac{b}{az} + \frac{c}{az} = \frac{b+c}{az},$$

ou

(14) $$\frac{1}{r''} + \frac{1}{r'''} = \frac{1}{z}.$$

Ainsi l'inverse du rayon du cercle tangent aux trois demi-cercles est égale à la somme des inverses des ray-

ons des deux cercles ex-inscrits au triangle $ABC$, qui sont opposés aux angles $B$ et $C$.

Puisque

$$z = \frac{abc}{a^2 - bc}, \quad bc = ar,$$

il vient aussi

$$\frac{1}{z} = \frac{a^2 - ar}{a^2 r} = \frac{a - r}{ar},$$

ou

(15)
$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r} - \frac{1}{a}.$$

6. **Volume engendré par la surface comprise entre les trois demi-cercles, en tournant autour du diamètre** $EF$. Ce surface a d'abord pour expression

(16)
$$S = \tfrac{1}{2}\pi(a^2 - b^2 - c^2) = \pi bc.$$

Dans sa révolution elle engendre le volume

$$V = \tfrac{4}{3}\pi(a^3 - b^3 - c^3);$$

mais, puisque $a = b + c$, nous avons

$$a^3 - b^3 - c^3 = 3b^2c + 3bc^2 = 3bc(b + c) = 3abc.$$

Il nous vient donc pour ce volume l'expression remarquable

(17)
$$V = 4\pi abc.$$

On a par suite

$$V = S' \times 4a.$$

Le volume $V'$, qui est engendré par la révolution du cercle $A$, tangent aux trois demi-cercles, est d'ailleurs

$$V' = \pi z^2 . 4\pi z = 4\pi^2 z^3$$

ou

$$V' = (2\pi z)^2 . z;$$

il a donc pour mesure le produit du carré de la circonférence par le rayon.

Digitized by Google

## III.

# Distances des trois sommets d'un triangle au centre du cercle, qui passe par les pieds des trois hauteurs du triangle.

Par

**Georges Dostor.**

1. Désignons par $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ les trois côtés du triangle $ABC$. Des sommets $A$, $B$, $C$ abaissons, sur les côtés opposés, les perpendiculaires $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$; les points $A_1$, $B_1$, $C_1$ seront les pieds des trois hauteurs du triangle donné; ils sont les sommets d'un trianglo $A_1B_1C_1$, qu'en Allemagne on appelle Hoehendreieck et que les Anglais nomment Triangle orthocentrique. Le cercle circonscrit à ce triangle, ou le cercle des neufs points, a fixé l'attention do beaucoup do géométres.

Nous nous proposons de déterminer les distances des sommets $A$, $B$, $C$ du triangle donné au centre $O_1$ du cercle circonscrit à ce triangle $A_1B_1C_1$; ainsi que la distance de ce centre $O_1$ au point de concours $H$ des hauteurs $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$.

2. Représentons par $R_1$ le rayon du cercle circonscrit au triangle $A_1B_1C_1$; par $r_1$ le rayon du cercle inscrit; et par $r_1'$, $r_1''$, $r_1'''$ les rayons des cercles ex-inscrits.

Les points $A$, $B$, $C$ étant les centres des trois cercles ex-inscrits au triangle $A_1B_1C_1$ et lo point $H$ étant le centre du cercle inscrit dans le même triangle, nous avons, d'après le théorème d'Euler

(1)
$$\overline{AO_1}^2 = R_1^2 + 2R_1r_1', \quad \overline{BO_1}^2 = R_1^2 + 2R_1r_1'', \quad \overline{CO_1}^2 = R_1^2 + 2R_1r_1''';$$

(2)
$$\overline{HO_1}^2 = R_1^2 - 2R_1r_1.$$

3. Considérons le triangle $AB_1C_1$, qui a la droite $B_1C_1$ pour base et $r_1'$ pour hauteur; nous avons sa surface

$$\tfrac{1}{2}B_1C_1 . r_1' = \tfrac{1}{2}AB_1 . AC_1 . \sin A\,;$$

mais on sait que

$$B_1C_1 = a\cos A\,;$$

d'ailleurs les deux triangles rectangles $ABB_1$, $ACC_1$ donnent

$$AB_1 = c\cos A, \quad AC_1 = b\cos A\,;$$

l'égalité précédente devient donc

$$r_1' = bc\cos A . \frac{\sin A}{a} = \frac{bc\cos A}{2R}, \tag{3}$$

en appelant $R$ le rayon du cercle circonscrit au triangle donné $ABC$.

On sait aussi que le rayon $R_1$ du cercle circonscrit au triangle $A_1B_1C_1$ est la moitié du rayon $R$ du cercle circonscrit au triangle donné $ABC$, c'est-à-dire que

$$R_1 = \frac{R}{2}.$$

Mettant, à la place de $R_1$ et $r_1$, leurs valeurs $\frac{R}{2}$ et $\frac{bc\cos A}{2R}$ dans la première des relations (1), nous obtenons l'égalité

$$\overline{AO_1}^2 = \frac{R^2}{4} + \frac{bc\cos A}{2},$$

ou bien

$$4\overline{AO_1}^2 = R^2 + 2bc\cos A.$$

Puisque $2bc\cos A = b^2 + c^2 - a^2$, nous trouvons ainsi que

$$\text{(I)} \qquad \left\{\begin{aligned} 4\overline{AO_1}^2 &= R^2 + b^2 + c^2 - a^2, \\ 4\overline{BO_1}^2 &= R^2 + c^2 + a^2 - b^2, \\ 4\overline{CO_1}^2 &= R^2 + a^2 + b^2 - c^2. \end{aligned}\right.$$

Telles sont les formules cherchées.

4. Les formules (I) étant ajoutées donnent

$$\text{(II)} \qquad 4\overline{AO_1}^2 + 4\overline{BO_1}^2 + 4\overline{CO_1}^2 = 3R^2 + a^2 + b^2 + c^2.$$

5. Dans la relation (2) remplaçons $2R_1$ par son égal $R$; elle devient

$$4\overline{HO_1}^2 = R^2 - 4Rr_1$$

ou, puisque $r_1 = r_1' + r_1'' + r_1''' - 4R_1 = r_1' + r_1'' + r_1''' - 2R$,

(4) $4\overline{HO_1}^2 = 9R^2 - 4$ [illegible] $r_1''')$.

Or de la valeur (3) on tire

$$4Rr_1' = 2bc\cos A,$$

de sorte que l'on a

$$4Rr_1' = b^2+c^2-a^2,$$
$$4Rr_1'' = c^2+a^2-b^2,$$
$$4Rr_1''' = a^2+b^2-c^2;$$

et, en ajoutant,

$$4R(r_1'+r_1''+r_1''') = a^2+b^2+c^2.$$

La relation (4) se réduit donc à

(III) $$4\overline{HO_1}^2 = 9R^2-(a^2+b^2+c^2).$$

5. Si nous faisons la somme de (II) et (III), nous trouverons que

(IV) $$\overline{AO_1}^2+\overline{BO_1}^2+\overline{CO_1}^2+\overline{HO_1}^2 = 3R^2.$$

## IV.

# Les trois quadrilatères convexes d'Albert Girard, qui ont mêmes côtés, même surface et sont inscriptibles dans le même cercle.

Par

**Georges Dostor.**

---

1. L'un des précurseurs de Descartes, Albert Girard, qui mourut à Leyde en 1633, a énoncé dans sa Trigonométrie une proposition sur le quadrilatère inscriptible, que cite M. Chasles dans son Aperçu historique (Notes, page 440), et qui, d'après lui, n'a pas été reproduite depuis.

Le théorème du géomètre hollandais exprime la solution du problème suivant:

**Construire un quadrilatère inscriptible dans un cercle avec quatre droites $a, b, c, d$, dont chacune est plus petite que la somme des trois autres.**

Albert Girard a trouvé qu'il existe trois quadrilatères inscriptibles, qui ont les mêmes côtés $a$, $b$, $c$, $d$; que ces quadrilatères ont même surface, sont inscriptibles dans le même cercle et ont deux à deux une diagonale commune.

2. Nous nous proposons de résoudre la même question d'abord par un procédé très élémentaire, puis au moyen des formules.

3. Supposons que le quadrilatère soit inscrit dans un cercle, dont nous représenterons le rayon par $R$. Soient $2\alpha$, $2\beta$, $2\gamma$, $2\delta$ les angles au centre, que l'on forme en joignant les quatre sommets au

centre $O$ du cercle circonscrit, et qui sont respectivement opposés aux côtés $a$, $b$, $c$, $d$.

Quel que soit l'ordre de succession de ces côtés, nous avons toujours

(1) $a = 2R\sin\alpha$, $b = 2R\sin\beta$, $c = 2R\sin\gamma$, $d = 2R\sin\delta$,

où les angles $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ sont assujettis à la condition

(2) $$\alpha + \beta + \gamma + \delta = \pi.$$

4. Trois cas peut se présenter pour la disposition des côtés $a$, $b$, $c$, $d$, suivant que l'un $a$ des côtés est opposé au côté $c$, au côté $d$ ou bien au côté $b$.

**Premier cas.** Les côtés se suivent dans l'ordre $a$, $b$, $c$, $d$.

Marquons des lettres $M$ et $N$ les extrémités du côté $a$ et portons les lettres $P$ et $Q$ aux deux autres sommets.

Les quatre angles conséentifs du quadrilatère seront évidemment

(3) $$M = \beta + \gamma,\quad N = \gamma + \delta,\quad P = \delta + d,\quad Q = \alpha + \beta;$$

pendant que

(4) $$QIM = NIP = \beta + \delta,\quad MIN = PIQ = \alpha + \gamma,$$

où $I$ désigne le point d'intersection des deux diagonales, seront les angles de ces diagonales.

Si $E$ et $F$ sont les angles, qui sont compris entre les côtés opposés $a$ et $c$, $b$ et $d$ du quadrilatère, nous aurons naturellement, en vertu de (2) et (3),

(5) $$\begin{cases} E = \pi - (N + P) = \pi - (\gamma + 2\delta + \alpha) = \beta - \delta, \\ F = \pi - (M + N) = \pi - (\beta + 2\gamma + \delta) = \alpha - \gamma. \end{cases}$$

Les longueurs des diagonales, qui sont issues des sommet $M$ et $N$, c'est-à-dire, des extrémités du côté $a$, sont d'ailleurs

(6) $$x = 2R\sin(\gamma + \delta),\quad y = 2R\sin(\delta + \alpha).$$

5. **Deuxième cas.** Les côtés sont rangés dans l'ordre $a$, $b$, $d$, $c$.

Marquons les sommets consécutifs des lettres $M'$, $N'$, $P'$, $Q'$; et soient $I'$ l'intersection des diagonales, $x'$ et $y'$ les longueurs de ces diagonales.

Dans le quadrilatère $M'N'P'Q'$ les angles compris entre les côtés adjacents sont

(7) $M' = \beta + \delta, \quad N' = \delta + \gamma, \quad P' = \gamma + \alpha, \quad Q' = \alpha + \beta;$

ceux des diagonales sont

(8) $Q'I'M' = N'I'P' = \beta + \gamma, \quad M'I'N' = P'I'Q' = \alpha + \delta;$

et les angles $E'$ et $F'$ compris entre les côtés opposés $a$ et $d$, $b$ et $c$ ont pour valeur

(9) $$\begin{cases} E' = \pi - (N' + P') = \pi - (\delta + 2\gamma + \alpha) = \beta - \gamma, \\ F' = \pi - (M' + N') = \pi - (\beta + 2\delta + \gamma) = \alpha - \delta. \end{cases}$$

Les diagonales, issues des sommets $M'$ et $N'$, seront

(10) $x' = 2R\sin(\gamma + \delta), \quad y' = 2R\sin(\alpha + \gamma).$

Si nous comparons (7) et (3), nous voyons que, par la permutation des côtés $c$ et $d$, les angles $N$ et $Q$ se conservent dans le nouveau quadrilatère $M'N'P'Q$, mais que les deux autres angles $M'$ et $P'$ deviennent égaux aux angles des diagonales dans le quadrilatère $MNPQ$. D'ailleurs les angles des diagonales dans le quadrilatère $M'N'P'Q'$ sont précisement égaux aux angles $M$ et $P$ dans le quadrilatère $MNPQ$.

Si l'on rapproche (10) de (6), on verra que l'une $x$ des diagonales se conserve, mais que l'autre change.

6. **Troisième cas.** Les quatre côtés consécutifs sont $a$, $c$, $b$, $d$.

Soient $M''$, $N''$, $P''$, $Q''$ les sommets consécutifs de ce quadrilatère; $I''$ l'intersection des diagonales; $x''$, $y''$ les longueurs de ces diagonales.

Dans le quadrilatère $M''N''P''Q''$ les angles formés par les côtés adjacents sont

(11) $M'' = \gamma + \beta, \quad N'' = \beta + \delta, \quad P'' = \delta + \alpha, \quad Q'' = \alpha + \gamma;$

ceux des diagonales sont

(12) $Q''I''M'' = N''I''P'' = \gamma + \delta, \quad M''I''N'' = P''I''Q'' = \alpha + \beta.$

Les angles $E''$ et $F''$, compris entre les côtés opposés $a$ et $b$, $c$ et $d$, ont pour valeur

(13) $$\begin{cases} E'' = \pi - (N'' + P'') = \pi - (\beta + 2\delta + \alpha) = \gamma - \delta, \\ F'' = \pi - (M'' + N'') = \pi - (\gamma + 2\beta + \delta) = \alpha - \beta. \end{cases}$$

Les diagonales, issues des sommets $M''$ et $N''$, ont pour longueur

(14) $$x'' = 2R\sin(\alpha+\gamma),\quad y'' = 2R\sin(\beta+\gamma).$$

Si nous comparons ces résultats à ceux du premier cas, nous voyons que, par la permutation des côtés $b$ et $c$, les angles $M''$ et $P''$ restent égaux aux angles $M$ et $P$; les angles $N''$ et $Q''$ deviennent égaux aux angles compris entre les diagonales du quadrilatère $MNPQ$; tandisque les angles formés par les diagonales se transforment dans les angles $N$ et $Q$ de ce quadrilatère $MNPQ$.

La diagonale $y$ se conserve, attendu que

$$\sin(\beta+\gamma) = \sin(\alpha+\delta);$$

l'autre diagonale $x$ devient précisément la diagonale $y'$, dans laquelle s'est changé $y$, en passant du premier quadrilatère au second.

7. Dans le premier et le second quadrilatère, les cercles circonscrits passent par les sommets de triangles dont les côtés sont $a$, $b$ et $x$; de même dans le premier et le troisième quadrilatère, les cercles circonscrits passent par les sommets de triangles, dont les trois côtés sont $b$, $c$ et $y$. Donc les cercles circonscrits aux trois quadrilatères sont tracés avec le même rayon.

8. Les hauteurs des triangles $OMN$, $ONP$, $OPQ$, $OQM$ sont respectivement

$$R\cos\alpha,\quad R\cos\beta,\quad R\cos\gamma,\quad R\cos\delta;$$

les surfaces de ces triangles sont par suite

$$\tfrac{1}{2}R^2\sin 2\alpha,\quad \tfrac{1}{2}R^2\sin 2\beta,\quad \tfrac{1}{2}R^2\sin 2\gamma,\quad \tfrac{1}{2}R^2\sin 2\delta.$$

Donc les trois quadrilatères ont même surface.

9. On peut arriver très rapidement aux mêmes résultats à l'aide des formules que nous avons données dans ces Archives (Tome XLVIII, 1868, page 245 et suivantes).

1⁰ Si les côtés consécutives du quadrilatère sont $a$, $b$, $c$, $d$, on a, comme l'on sait

(15) $$xy = ac+bd,\quad \frac{x}{y} = \frac{ad+bc}{ab+cd},$$

d'où l'on tire

(I) $$x^2 = \frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd},\quad y^2 = \frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}.$$

Si nous remplaçons le produit $xy$ par s'a valeur (15) dans la formule générale de la surface

$$S = \tfrac{1}{4}\sqrt{4x^2y^2 - (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2},$$

nous trouverons que

$$16S^2 = (2ac + 2bd)^2 - (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2$$
$$= (2ac + 2bd + a^2 - b^2 + c^2 - d^2)(2ac + 2bd - a^2 + b^2 - c^2 + d^2)$$
$$= [(a+c)^2 - (b-d)^2]\,[(b+d)^2 - (a-c)^2].$$

Décomposant en facteurs et posant

$$a + b + c + d = 2p,$$

on a

(II) $$S = (p-a)(p-b)(p-c)(p-d).$$

Cette expression est indépendante de l'ordre de succession des côtés $a$, $b$, $c$, $d$; donc les quadrilatères inscriptibles qui ont mêmes côtés, ont aussi même surface.

La surface du quadrilatère, dont les côtés consécutifs sont $a$, $b$, $c$, $d$, se compose de deux triangles, ayant pour côtés $a$, $b$, $x$ et $c$, $d$, $x$; on a donc, d'après un théorème connu,

$$S = \frac{abx}{4R} + \frac{cdx}{4R} = \frac{(ab+cd)x}{4R}.$$

On en déduit

$$R^2 = \frac{(ab+cd)^2x^2}{16S^2},$$

et, en remplaçant $x^2$ et $S$ par leurs valeurs (I) et (II),

(III) $$R^2 = \frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{16(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

Les expressions (II) et (III) ne changent pas par la permutation arbitraire des côtés $a$, $b$, $c$, $d$. Donc

Tous les quadrilatères inscriptibles, qui ont les mêmes côtés mais disposés dans un ordre quelconque, ont aussi même surface et se trouvent inscrits dans le même cercle.

Les diagonales du quadrilatère

$(a, b, c, d)$ ont le produit $xy = ac + bd$,
$(a, b, d, c)$ „ „ „ $xy = ad + bc$,
$(a, c, b, d)$ „ „ „ $yz = ab + cd$;

on a donc, en multipliant,

$$x^2y^2z^2 = (ab+cd)(ac+bd)(ad+bc),$$

ou, en vertu de (III)

$$x^2y^2z^2 = 16R^2S^2\,;$$

on en tire

(IV) $$xyz = 2S.2R.$$

Ainsi le produit des trois diagonales de nos quadrilatères est égal au double produit de leur surface commune par le diamètre du cercle circonscrit.

Des recherches curieuses peuvent être entreprises au sujet de ces quadrilatères; nous en laissons le soin au lecteur.

V.

# Ueber die Auflösung der trinomischen Gleichungen durch kettenbruchähnliche Algorithmen.

Von

**K. E. Hoffmann.**

Bei Gelegenheit der 34. Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner, welche im vorigen Jahre in Trier stattfand, machte Herr Dr. S. Günther auf die schon im Jahre 1834 von Stern [Theorie der Kettenbrüche, Berlin, G. Reimer] angegebene Methode der Auflösung trinomischer Gleichungen durch unendliche kettenbruchähnliche Algorithmen aufmerksam; wie in dem Bericht über die Verhandlungen der Versammlung [Leipzig bei Teubner 1880, Seite 190] zu sehen, erklärten sämmtliche anwesenden Herren, von einer solchen allgemeinen Näherungslösung keine Kenntniss zu besitzen, was umso mehr zu bedauern ist, als dadurch gewiss mehrere Ungenauigkeiten, die sich in dem Bericht vorfinden, vermieden worden wären. Ungenau ist z. B. die Bemerkung, dass die reducirte trinomische Gleichung:

$$x^m \pm px - q = 0$$

für ungerade $m$ drei, für gerade $m$ zwei reelle Wurzeln besitze, was durchaus nicht allgemein der Fall ist, wie z. B. bei Serret (Höhere Algebra, deutsch von Wertheim, Leipzig 1868, I. Seite 218) zu finden; ferner wurde in der Versammlung das Bedenken geäussert, ob nicht der Algorithmus bei Auflösung der bekannten Formel aus der Rentenrechnung:



Digitized by Google

$$aq^n = \frac{r(q^n-1)}{q-1}$$

nach $q$ den offenbar unbrauchbaren Wert $q = 1$ liefere, was mit der Bemerkung abgetan wurde, dass dieser Wert durch die Structur des Ausdrucks ausgeschlossen erscheine, während im Gegenteil die von Herrn Günther angegebene Formel:

$$q = \lim \sqrt[n]{\frac{-\frac{r}{a}}{-\frac{a+r}{a}+\sqrt[n]{\frac{-\frac{r}{a}}{-\frac{a+r}{a}+\cdots}}}}$$

gerade nach dem Wert $q = 1$ convergirt, wie im Folgenden gezeigt werden soll. Ferner findet sich in dem erwähnten Bericht als interessante Identität abgeleitet:

$$\frac{b}{a+\sqrt[\frac{1}{n}]{a+\frac{b}{\sqrt[\frac{1}{n}]{\cdots}}}} = \sqrt[n]{\frac{b}{a+\sqrt[n]{\frac{b}{a+\cdots}}}}$$

was aber wie ebenfalls gezeigt werden soll, gar keine Identität ist.

Schon früher beschäftigte ich mich mit solchen Algorithmen, war aber ebenfalls auf die von Herrn Günther angeführten Bedenken gestossen, weshalb ich von einer Veröffentlichung meiner darauf bezüglichen Untersuchungen Abstand nahm; angeregt durch den Bericht über die Trierer Versammlung griff ich nun das Studium dieser Functionen neuerdings auf, und da es mir gelang, die gegen den Algorithmus namentlich bezüglich der Convergenz oder Divergenz noch obwaltenden Bedenken zu beseitigen und insbesondere den Nachweis zu liefern, welche Wurzel der trinomischen Gleichung durch den betr. Algorithmus gefunden wird, glaubte ich, die Resultate meiner Untersuchungen hiermit bekannt geben zu sollen.

Um nun auf die Sache selbst zu kommen, so sind es hauptsächlich zwei wesentlich verschiedene Algorithmen, die praktische Anwendung finden können; ist nämlich die Gleichung allgemein in der Form:

$$f(x) = x^m + px^n + q = 0$$

gegeben, so kann man dieselbe in der Form:

$$x^n(x^{m-n}+p) = -q$$

darstellen und erhält:

A) $$x = \sqrt[n]{\frac{-q}{p+x^{m-n}}},$$

wobei man dem $x$ im Radical den Anfangswert $x_0 = 0$ geben, den zugehörigen Wert $x_1$ des Radicals berechnen und $x_1$ neuerdings für $x$ einsetzen kann; oder man schreibt $f(x)$ in der Form:

$$x^{m-n} = -p - \frac{q}{x^n}$$

und erhält:

B) $$x = \sqrt[m-n]{-p-\frac{q}{x^n}},$$

wobei man im Radical von dem Anfangswerte $x_0 = \infty$ ausgehend successive Näherungswerte für $x$ finden kann.

Ich betrachte sofort den allgemeinen Fall

1) $$f(x) = x^m + px^n + q = 0,$$

weil die Untersuchung sich in allgemeiner Weise durchführen lässt, und die speciellen Fälle

2) $$x^m + px + q = 0 \quad \text{und}$$

3) $$x^m + px^{m-1} + q = 0$$

sich dann leicht aus dem allgemeinen Falle ableiten lassen. Serret untersucht a. a. O. die Bedingung dafür, dass die Gleichung 1) bei ungeradem $m$ und $n$ drei reelle Wurzeln besitze; der Vollständigkeit wegen mag die Untersuchung hier kurz reproducirt werden.

Man hat

$$f'(x) = mx^{m-1} + npx^{n-1}$$

und erkennt, dass $f'(x) = 0$ ausser einer jedenfalls geraden Anzahl von Wurzeln $x = 0$ nur noch die Wurzel

4) $$x = \sqrt[m-n]{-\frac{np}{m}}$$

hat; soll diese Wurzel reell sein, so muss bei ungeraden $m$ und $n$ $p$ jedenfalls negativ sein. Ich schreibe deshalb die Gleichung in der Form:

5) $$f(x) = x^m - px^n + q = 0,$$

dann wird $f'(x)$ zu Null für

$$x = \pm \sqrt[m-n]{\frac{np}{n}}$$

und wenn dann die Gleichung 5) drei reelle Wurzeln hat; so müssen dieselben in den Intervallen

$$-\infty, \quad -\sqrt[m-n]{\frac{np}{m}}, \quad +\sqrt[m-n]{\frac{np}{m}} \quad \text{und} \quad +\infty$$

liegen; damit aber die Gleichung 5) wirklich drei reelle Wurzeln besitze, ist erforderlich, dass

$$f\left(-\sqrt[m-n]{\frac{np}{m}}\right) > 0 \quad \text{und} \quad f\left(+\sqrt[m-n]{\frac{np}{m}}\right) < 0$$

sei; beide Bedingungen liefern aber nach kurzer Reduction:

6) $$\left(\frac{np}{m}\right)^m > \left(\frac{nq}{m-n}\right)^{m-n}$$

Für den speciellen Fall:

$$x^m - px + q = 0$$

erhält man die Bedingung:

$$\left(\frac{p}{m}\right)^m > \left(\frac{q}{m-1}\right)^{m-1},$$

für den Fall:

$$x^m - px^{m-1} + q = 0$$

die Bedingung:

$$\left(\frac{p}{m}\right)^m > \frac{q}{(m-1)^{m-1}}$$

und endlich für die Gleichung 3. Grades:

$$x^3 - px + q = 0$$

die bekannte Bedingung:

$$\frac{p^3}{27} > \frac{q^2}{4}.$$

Man erkennt zugleich, dass die Gleichung 5) für positive $q$ zwei positive und eine negative, dagegen für negative $q$ zwei negative und eine positive Wurzel hat.

Wendet man nun den Algorithmus $A$ an, so wird

$$x = \sqrt[n]{\frac{-q}{-p + x^{m-n}}} = \sqrt[n]{\frac{q}{p - x^{m-n}}}$$

und die einzelnen Näherungswerte sind:

$$x_1 = \sqrt[n]{\frac{q}{p}}; \quad x_2 = \sqrt[n]{\frac{q}{p - x_1^{m-n}}}; \quad \text{etc.}$$

Man erkennt sofort, dass $x_2 > x_1$, ebenso $x_3 > x_2$ u. s. w. allgemein $x_r > x_{r-1}$ ist.

Aber aus der Bedingung 6) leitet man ab:

$$q < \frac{m-n}{n} \sqrt[m-n]{\left(\frac{n}{m}\right)^m p^m}$$

oder

$$q < \frac{m-n}{m} \sqrt[m-n]{\left(\frac{n}{m}\right)^n p^m}$$

folglich ist

$$\frac{q}{p} < \frac{m-n}{m} \sqrt[m-n]{\left(\frac{n}{m}\right)^n p^n}$$

und endlich

$$\sqrt[n]{\frac{q}{p}} < \sqrt[n]{\frac{m-n}{m}} \cdot \sqrt[m-n]{\frac{np}{m}}$$

da aber

$$\frac{m-n}{m} < 1,$$

so erkennt man, dass

$$x_1 = \sqrt[n]{\frac{q}{p}} < \sqrt[n]{\frac{m-n}{m}} \cdot \sqrt[m-n]{\frac{np}{m}}$$

ist. Setzt man nun in $x_2$ statt $x_1$ den vergrösserten Wert $\sqrt[m-n]{\frac{np}{m}}$, so folgt, dass um so mehr

$$x_2 < \sqrt[n]{\frac{q}{p - \frac{np}{m}}}$$

oder

$$x_2 < \sqrt[n]{\frac{m}{m-n} \cdot \frac{q}{p}}$$

ist; da aber

$$\sqrt[n]{\frac{q}{p}} < \sqrt[n]{\frac{m-n}{m}} \cdot \sqrt[m-n]{\frac{np}{m}}$$

ist, so folgt, dass auch

Digitized by Google

$$x_2 < \sqrt[m-n]{\frac{np}{m}}$$

sein muss; analog weiter schliessend, erkennt man leicht, dass alle folgenden

$$x_r < \sqrt[m-n]{\frac{np}{m}}$$

sein müssen; da dieselben aber, wie oben gezeigt wurde, beständig wachsen, so müssen sie sich notwendig einer festen Grenze $\xi$ nähern, d. h. es muss

$$\xi = \sqrt[n]{\frac{q}{p - \xi^{m-n}}}$$

werden; hieraus erhält man aber

$$\xi^m - p\xi^n + q = 0,$$

mithin ist $\xi$ eine Wurzel der Gleichung 5) und zwar, da alle $x_r$ in dem Intervall 0 bis $+\sqrt[m-n]{\frac{np}{m}}$ liegen, ist $\xi$ die kleinste positive Wurzel. In ganz analoger Weise lässt sich zeigen, dass für negative $q$ der Algorithmus die der Null am nächsten liegende negative Wurzel liefert.

Wendet man dagegen den Algorithmus $B$ an, so wird

$$x = \sqrt[m-n]{p - \frac{q}{x^n}}$$

und die einzelnen Näherungswerte sind:

$$x_1 = \sqrt[m-n]{p}, \quad x_2 = \sqrt[m-n]{p - \frac{q}{x_1^n}} \quad \text{etc.}$$

Man erkennt unmittelbar, dass hier $x_2 < x_1$ und ebenso $x_3 < x_2$ und allgemein $x_r < x_{r-1}$, d. h. dass die Näherungswerte beständig abnehmen; aber, da $\frac{n}{m} < 1$, sieht man auch, dass

$$x_1 = \sqrt[m-n]{p} > \sqrt[m-n]{\frac{np}{m}};$$

dann ist aber auch, wenn man in $x_2$ für $x_1$ den kleineren Wert $\sqrt[m-n]{\frac{np}{m}}$ einsetzt,

$$x_2 > \sqrt[m-n]{p - \frac{q}{\sqrt[m-n]{\left(\frac{np}{m}\right)^n}}}$$

nun folgt aber aus der Bedingung 6), dass

$$q = \frac{m-n}{n} \cdot \sqrt[m-n]{\left(\frac{np}{m}\right)^m}$$

ist; setzt man dann statt $q$ diesen grösseren Wert ein, so ist um so mehr, wie man nach kurzer Reduction findet:

$$x_2 > \sqrt[m-n]{p - \frac{m-n}{m} p} \quad \text{oder} \quad x_2 > \sqrt[m-n]{\frac{np}{m}}$$

In derselben Weise weiter schliessend, findet man nun, dass auch alle folgenden

$$x_r > \sqrt[m-n]{\frac{np}{m}}$$

sein müssen; da dieselben aber beständig abnehmen, so müssen sie sich wieder einer festen Grenze $\xi$ nähern, in welcher man dann wie oben eine Wurzel der Gleichung 5) erkennt, und zwar ist diese, da alle $x_r$ in dem Intervall $+\sqrt[m-n]{\frac{np}{m}}$ bis $+\infty$ liegen, die grösste positive Wurzel der Gleichung. In ganz ähnlicher Weise lässt sich auch zeigen, dass man die (algebraisch genommenen) kleinste negative Wurzel finden kann, wenn man die $\sqrt[m-n]{\phantom{x}}$ negativ nimmt.

Für negative $q$ erhält man bei Anwendung des Algorithmus $B$ die grösste positive Wurzel, wobei sich die $x_r$ dieser Wurzel von beiden Seiten nähern, also wie bei gewöhnlichen Kettenbrüchen; denn man hat dann

$$x_1 > \sqrt[m-n]{\frac{np}{m}}$$

also:

$$x_2 < \sqrt[m-n]{p + \frac{q}{\sqrt[m-n]{\left(\frac{np}{m}\right)^n}}}$$

also jedenfalls $x_3 > x_1$ aber auch unter einer bestimmten Grenze; dann erkennt man aber weiter, dass $x_3 < x_2$ sein muss, während es zugleich $> x_1$ ist u. s. w. Man könnte hier noch einwenden, dass sich möglicherweise die $x_r$ in diesem Falle zwei verschiedenen festen Grenzen nähern könnten; dass dies aber nicht möglich ist, sieht man aus folgendem: angenommen, es existirten zwei solche Grenzen $\xi$ und $\xi_1$, wobei man $\xi > \xi_1$ voraussetzen kann, beide aber positive Zahlen sind, so hätte man:

$$\xi = \sqrt[m-n]{p + \frac{q}{\xi_1^n}}$$

und

$$\xi_1 = \sqrt[m-n]{p + \frac{q}{\xi^n}}$$

Beide Gleichungen liefern entwickelt:

$$\xi^{m-n}\,\xi_1^n - p\xi_1^n - q = 0$$

und

$$\xi_1^{m-n}\,\xi^n - p\xi^n - q = 0$$

woraus man durch Subtraction der 2. von der 1. Gleichung

$$\xi^{m-n}\xi_1^n - \xi_1^{m-n}\xi^n + p(\xi^n - \xi_1^n) = 0$$

findet; hieraus würde aber folgen, dass

$$\frac{\xi^n}{\xi_1^n} = \frac{p - \xi^{m-n}}{p - \xi_1^{m-n}}$$

sein müsste, was nicht möglich ist, da nach der über $\xi$ und $\xi_1$ gemachten Voraussetzung der links stehende Bruch $> 1$ ist, während man rechts einen echten Bruch hat; die Annahme zweier Grenzwerte ist also unzulässig, und die $x_r$ nähern sich der grössten positiven Wurzel der Gleichung

$$x^m - px^n - q = 0$$

von beiden Seiten. Ueberhaupt kann man bemerken, dass sowohl beim Algorithmus $A$ als auch bei $B$ die Annäherung an die Wurzel der Gleichung von beiden Seiten erfolgt, also wie bei gewöhnlichen Kettenbrüchen, wenn das Radical nur positive Zeichen enthält, während im entgegengesetzten Falle die Convergenz nur von einer Seite her erfolgt.

Bis jetzt betrachtete ich nur solche trinomische Gleichungen, in welchen $m$ und $n$ beide ungerade Zahlen sind; die Behandlung der andern Fälle, in welchen eine dieser Zahlen oder auch beide gerade sind, geschieht aber genau in derselben Weise; ich übergehe deshalb

hier die Untersuchung und will nur einige allgemeine Bemerkungen über die Anzahl der reellen Wurzeln und die zugehörige Bedingung, welcher $p$ und $q$ genügen müssen, hier folgen lassen.

I. $m$ ungerade, $n$ gerade. $f(x) = x^m + px^n + q = 0$.

$f'(x)$ wird Null für $x = 0$ (eine ungerade Anzahl von Wurzeln $= 0$) und für $x = \sqrt[m-n]{-\frac{np}{m}}$. Die Intervalle, innerhalb welcher reelle Wurzeln liegen können, sind:

$$-\infty, \quad \sqrt[m-n]{-\frac{np}{m}}, \quad 0, \quad +\infty$$

Bei positivem $p$ liefert die Bedingung $f(0) < 0$ die Forderung eines negativen $q$; bei negativem $p$ muss $q$ positiv sein; ausserdem erhalt man die Bedingung 6).

II. $m$ gerade, $n$ ungerade.

$f'(x) = 0$ hat eine gerade Anzahl von Wurzeln $x = 0$, ausserdem die Wurzel $x = \sqrt[m-n]{-\frac{np}{m}}$; die Wurzelintervalle sind:

$$-\infty, \quad \sqrt[m-n]{-\frac{np}{m}}, \quad +\infty,$$

die Gleichung kann also nur 2 reelle Wurzeln haben und man findet wieder die Bedingung 6) für die Realität der Wurzeln.

III. $m$ gerade, $n$ gerade.

$f'(x)$ wird Null für eine ungerade Anzahl von Wurzeln $x = 0$, ausserdem für $x = \pm\sqrt[m-n]{-\frac{np}{m}}$; für positive $p$ kann man höchstens zwei, für negative $p$ dagegen vier reelle Wurzeln erhalten; im ersten Falle muss $q$ negativ, im andern positiv sein. Die Wurzelintervalle sind im letzteren Falle:

$$-\infty, \quad -\sqrt[m-n]{-\frac{np}{m}}, \quad 0, \quad +\sqrt[m-n]{-\frac{np}{m}}, \quad +\infty$$

und die zugehörige Bedingung ist wieder die 6).

Digitized by Google

Die Untersuchung der Näherungswerte gestaltet sich wie oben, weshalb ich die speciellere Betrachtung hier unterlassen kann.

Oben wurden nur positive Wurzeln betrachtet; man erkennt aber, dass für gerade Wurzelexponenten den Radicalen auch das negative Zeichen beigelegt werden kann, und man dadurch auch zu den negativen Wurzeln der trinomischen Gleichung gelangt; in jedem einzelnen Falle findet man aber ähnlich wie oben, dass der Algorithmus $A$ nur eine solche Wurzel liefern kann, welche in dem Intervall $-\sqrt[m-n]{\frac{np}{m}}$ bis 0 liegt, während eine Wurzel, die in dem Intervall $-\infty$ bis $-\sqrt[m-n]{\frac{np}{m}}$ liegt, nur durch den Algorithmus $B$ gefunden werden kann.

Man kann also das Resultat vorstehender Untersuchung folgendermassen aussprechen:

Alle reellen Wurzeln der trinomischen Gleichungen lassen sich durch die betrachteten kettenbruchähnlichen Algorithmen finden, so zwar, dass der Algorithmus $A$ die in dem Intervall $-\sqrt[m-n]{\frac{np}{m}}$ bis $+\sqrt[m-n]{\frac{np}{m}}$ liegenden Wurzeln liefert, während man alle ausserhalb dieses Intervalles liegenden Wurzeln durch den Algorithmus $B$ findet.

Dieser Satz lässt sich auch noch ausdehnen auf diejenigen trinomischen Gleichungen, welche nur eine reelle Wurzel besitzen.

Wendet man nun die gewonnenen Resultate auf die oben erwähnte Formel der Rentenrechnung:

$$aq = \frac{r(q^n - 1)}{q - 1}$$

an, woraus, da es sich um die Bestimmung des Zinsfactors $q$ handelt, die Gleichung:

$$q^{n+1} - \frac{a+r}{a} q^n + \frac{r}{a} = 0$$

folgt, so ist die Bedingung, dass dieselbe 3, resp. 2 reelle Wurzeln besitze:

$$\left(\frac{n}{n+1} \cdot \frac{a+r}{a}\right)^{n+1} > \left(n \cdot \frac{r}{a}\right),$$

welche aber, da $r > \frac{1}{n} a$, jederzeit erfüllt ist; das Intervall, innerhalb dessen die durch den Algorithmus $A$ gelieferten Wurzeln liegen, ist

$$0 \text{ bis } \frac{n}{n+1} \cdot \frac{a+r}{a};$$

letzterer Grenzwert ist aber, da $r > \frac{1}{n} a$, immer $> 1$; da nun, wie man sofort erkennt, die Gleichung die Wurzel 1 hat, so folgt unmittelbar, dass die von Herrn Günther gegebene Formel

$$q = \lim \sqrt[n]{\frac{-r:a}{-(a-r):a+\sqrt[n]{\frac{-r:a}{-(r-a):a+\ldots}}}} = 1$$

sein muss. Dieses Resultat ist aber auch geradezu an der Structur des ganzen Ausdrucks zu erkennen und nicht durch dieselbe ausgeschlossen, wie in Trier behauptet wurde. Man erhält vielmehr die verlangte Wurzel der Gleichung durch den Algorithmus $B$ in der Form:

$$q = \lim \frac{a+r}{a} - \frac{\frac{r}{a}}{\sqrt[\frac{1}{n}]{\frac{a+r}{a} - \frac{\frac{r}{a}}{\sqrt[\frac{1}{n}]{\ldots}}}}$$

und erkennt zugleich, dass diese Wurzel zwischen den Grenzen

$$\frac{n}{n+1} \cdot \frac{a+r}{a} \quad \text{und} \quad \frac{a+r}{a}$$

liegen muss.

Man erkennt aber auch weiter, dass die in dem öfter erwähnten Bericht gegebene Gleichung:

$$\frac{b}{\sqrt[\frac{1}{n}]{a+\frac{b}{\sqrt[\frac{1}{n}]{a+\sqrt{\ldots}}}}} = \sqrt[n]{\frac{b}{a+\sqrt[n]{\frac{b}{a+\ldots}}}}$$

unrichtig sein müsse; denn der Ausdruck auf der linken Seite stellt die nach dem Algorithmus $A$ gebildete, also kleinste positive Wurzel der Gleichung:

$$x^{n+1} + ax - b = 0$$

dar, während man rechts die nach demselben Algorithmus gebildete (also wieder die kleinste) Wurzel der Gleichung:

$$x^{n+1} + ax^n - b = 0$$

erhält; beide Wurzeln sind aber keineswegs identisch.

Der Fehler, der bei Anfstellung dieser Formel gemacht wurde, liegt darin, dass man aus der Gleichung

$$x^{n+1} + ax - b = 0$$

durch die Substitution $x = \frac{1}{\xi}$ die Gleichung

$$x^{n+1} + ax^n - b = 0$$

ableitete, während in der Tat sich durch diese Substitution die Gleichung:

$$x^{n+1} - \frac{a}{b} x^n - \frac{1}{b} = 0$$

ergibt. Man erhält aber Identitäten ganz allgemeiner Art in folgender Weise. Die Gleichung

$$x^m - px^n + q = 0$$

geht durch die Substitution $x = \frac{1}{\xi}$ über in

$$x^m - \frac{p}{q} x^{m-n} + \frac{1}{q} = 0;$$

um nun Identitäten zu erhalten, braucht man nur für die eine Gleichung den Algorithmus $A$ und für die andere $B$ anzuwenden und das eine Resultat dem reciproken Werte des anderen gleichzusetzen; man findet auf diese Weise:

$$1 : \sqrt[n]{\frac{q}{p - \sqrt[\frac{n}{m-n}]{\frac{q}{p - \sqrt{\ldots}}}}} = \sqrt[n]{\frac{p}{q} - \frac{\frac{1}{q}}{\sqrt[\frac{n}{m-n}]{\frac{p}{q} - \frac{\frac{1}{q}}{\sqrt[\frac{n}{m-n}]{\ldots}}}}}$$

ferner:

$$1 : \sqrt[m-n]{p - \frac{q}{\sqrt[\frac{m-n}{n}]{p - \frac{q}{\sqrt[\frac{m-n}{n}]{\cdots}}}}} = \sqrt[m-n]{\frac{\frac{1}{q}}{\sqrt[\frac{m-n}{n}]{\frac{p}{q} - \sqrt{\frac{\frac{1}{q}}{\sqrt[\frac{m-n}{n}]{\frac{p}{q} - \sqrt{\cdots}}}}}}}$$

---

Es liegt nun die Frage nahe, was die Algorithmen für eine Bedeutung erlangen, wenn der Ausdruck unter einem Wurzelzeichen mit geradem Exponenten negativ ausfällt, was insbesondere dann eintritt, wenn die Gleichung

$$x^m + px^n + q = 0$$

keine reellen Wurzeln besitzt; in diesem Falle bestätigt sich die sich unmittelbar aufdrängende Vermutung, dass man durch Anwendung der besprochenen Algorithmen zu imaginären Wurzeln gelangt. Die Behandlung liesse sich in ähnlicher Weise wie oben durchführen; doch will ich mich jetzt darauf beschränken, einfach auf die Tatsache hingewiesen zu haben, die eingehende Untersuchung als Gegenstand einer späteren Arbeit mir vorbehaltend.

Bei der praktischen Anwendung der Algorithmen leisten die Gauss'schen Additions-Logarithmen, bei Berechnung imaginärer Wurzeln die Moivre'sche Formel gute Dienste.

Zweibrücken, 16. Juli 1880.

Digitized by Google

VI.

# Ueber Parallelen geschlossener Curven.

Von

**R. Hoppe.**

---

Sei $s$ eine beliebige Curve, welche in $L$ anfängt und in $L$ mit derselben Tangentialrichtung und Stellung der Schmiegungsebene endigt, $fgh$, $f'g'h'$, $lmn$ die Richtungscosinus ihrer Tangente, Haupt- und Binormale nach den $xyz$; $\tau$, $\vartheta$ ihr Krümmungs- und Torsionswinkel (d. i. Integrale der Contingenzwinkel von Normal- und Schmiegungsebene), die Accente bezüglich auf Differentiation nach $\tau$. Dann sind die Gleichungen einer Parallele mit $s$ im Abstand $c$:

$$x_1 = x + c(f'\cos\vartheta - l\sin\vartheta) \tag{1}$$

analog für $y$ und $z$. Dem Punkte $L$ entspreche auf der Parallele im Anfang $M$, im Ende $N$.

Hier sind $x$, $y$, $z$, $f$, $g$, $h$, $f'$, $g'$, $h'$, $l$, $m$, $n$ periodisch, dagegen die durch Integrale definirten $s$, $\tau$, $\vartheta$ im allgemeinen nicht. Ist $s$ eine ebene Curve, so ist $\vartheta$ constant, folglich sind auch $x_1 y_1 z_1$ periodisch, und $M$, $N$ fallen zusammen: Parallelen ebener geschlossener Curven sind demnach stets geschlossen und eben, auch wenn sie nicht in derselben Ebene liegen.

Die Parallelen doppelt gekrümmter Curven $s$ werden, wie aus Gl. (1) erhellt, geschlossen sein, wenn $\vartheta$ eine gleichlange Periode mit $x$, $y$, $z$ hat, aber auch wenn es bei jedem Umlauf um 4R oder ein Vielfaches davon wächst oder abnimmt. Beide Fälle müssen indes unterschieden werden, weil eine wesentliche Folge mit einem solchen Increment verknüpft ist.

Gehen wir von einer ebenen Urcurve aus und deformiren dieselbe stetig, bezeichnen mit $\vartheta_0$ den Anfangswert von $\vartheta$, mit $\vartheta_0 + \alpha$ den Endwert, so ist ursprünglich $\alpha = 0$. Verändert sich dann $\alpha$ während der Deformation, so durchläuft $N$ in $M$ beginnend, wie Gl. (1) zeigt, stetig einen Kreis um $L$ in der Normalebene und erreicht den Anschluss in $M$ zuerst wieder für $\alpha = \pm 4$R. Denken wir nun, letzteres angenommen, die Curven $s$ und $s_1$ als undurchdringliche Fäden, so umschlingt eine die andre derart, dass sie wie unauflösliche Kettenglieder in einander hangen. Auch wenn der Kreis um $L$ mehrmals von $N$ durchlaufen wird, löst sich die Kette nicht, vielmehr wird dann die Umschlingung eine mehrfache. Da nun zwei gesondert liegende Fäden nicht ohne Durchdringung durch Bewegung und Biegung in den Kettennexus gebracht werden können, so folgt, dass die geschlossene Parallele einer geschlossenen ebenen Curve, die sie ja wegen des constanten Abstands nicht durchdringen, d. h. überschreiten, kann, im geschlossenen Zustande durch keine Deformation in eine doppelt gekrümmte für $\alpha = \pm 4$R übergehen kann.

Machen wir jetzt zur Voraussetzung, dass Urcurve und Parallele, ursprünglich eben, beständig geschlossen bleiben, so sind nur solche Deformationen möglich, für welche $\alpha = 0$, mithin $\vartheta$ periodisch ist.

Nun entsteht die Frage: Giebt es überhaupt geschlossene Curven von durchgehender Stetigkeit der Variation der Tangente und Schmiegungsebene, für welche $\vartheta$ nicht periodisch ist? Vor näherer Untersuchung wird man es für wahrscheinlich erklären, dass nur in speciellen Fällen $\vartheta$ auf seinen anfänglichen Wert gerade am Ende der Curve zurückkehrt. Gleichwol findet man für die einfachern Fälle, wo die Integrationen sich ausführen lassen, stets periodische $\vartheta$, welche auf die Vermutung eines allgemeinen Gesetzes bringen. Dass gleichwol $\vartheta$ nicht immer periodisch ist, erhellt u. a. aus folgender Betrachtung.

Die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} x &= (\mu a - b\cos\mu\varphi)\cos\varphi \\ y &= (\mu a - b\cos\mu\varphi)\sin\varphi \\ z &= b\sin\mu\varphi \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

wo $\mu$ positive ganze Zahl, stellen eine geschlossene Curve dar, welche den Kreis

$$x = \mu a\cos\varphi;\quad y = \mu a\sin\varphi;\quad z = 0 \tag{3}$$

$\mu$ mal im constanten Abstand $= b$ umwindet, und die aus $\mu$ congruenten Stücken besteht; denn sie vollendet ihren Lauf, wenn $\varphi$ um

4R wächst, erleidet aber nur eine Drehung $=\frac{4}{\mu}$R um die $z$ Axe bei einem Increment $=\frac{4}{\mu}$R.

Verlegt man den Coordinatenanfang durch Substitution von $a\mu - x$ für $x$ in den Anfang des Grundkreises (3), so geht für $\mu=\infty$ dieser in die $y$ Axe, die Curve (2) in die Schraubenlinie

$$x = b\cos\psi;\quad y = a\psi;\quad z = b\sin\psi$$

über, wo für $\mu\varphi$, das in endlicher Entfernung endlich bleibt, $\psi$ geschrieben ist; der erste der $\mu$ congruenten Teile der Curve aber bleibt in dem endlichen Intervall $\psi=0$ bis $\psi=4\text{R}$.

Die Torsion der Schraubenlinie ist bekanntlich constant, und zwar, wenn man die Krümmung negativ setzt,

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial s} = \frac{a}{a^2+b^2};\quad \text{wo}\quad \partial s = \partial\psi\sqrt{a^2+b^2}$$

demnach ist der Torsionswinkel in der Ausdehnung des genannten Curvenstücks gleich der positiven Grösse

$$\frac{4\text{R}a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

folglich ist derselbe auch für ein endliches hinreichend grosses $\mu$ noch positiv endlich und in der Ausdehnung der ganzen geschlossenen Curve $\mu$ mal so gross.

Hieraus ist zunächst ersichtlich, dass letzterer über jede Grenze hinaus Werte haben kann. Sei für irgend ein endliches $\mu$ im Anfang, d. i. für $\varphi=0$, $\vartheta=0$, am Ende, d. i. für $\varphi=4\text{R}$, $\vartheta=\vartheta_\mu$; dann ist

$$\lim\frac{\vartheta_\mu}{\mu} = \frac{4\text{R}a}{\sqrt{a^2+b^2}}\quad (\mu=\infty)$$

eine Grösse die alle Werte zwischen 0 und 4R stetig durchläuft, wenn $\frac{a}{b}$ von 0 bis $\infty$ variirt. Dies wäre aber nicht möglich, wenn nicht $\frac{\vartheta_\mu}{\mu}$ für eine unendliche Reihe von Werten $\mu$ gleichfalls mit $\frac{a}{b}$ stetig variirte. Wir können demnach schliessen, dass $\vartheta_\mu$ für kein darin begriffenes $\mu$ auf Vielfache von 4R beschränkt ist.

Machen wir hiervon Anwendung auf die ursprüngliche Frage, so ist erwiesen, dass die Parallelen geschlossener Curven nicht immer

geschlossen sind, und dass sie die Urcurve beliebig vielfach umwinden können.

Dass stets alle Parallelen derselben Curve bezüglich auf beide Fragen in gleichem Falle sind, dass sie also entweder alle geschlossen oder alle nicht geschlossen, alle von gleicher Anzahl der Umwindungen sind, ist unmittelbar aus der allgemeinen Gleichung der Parallelen zu ersehen.

Einen etwas nähern Einblick gewährt wohl die Untersuchung des Einflusses einer unendlich kleinen Deformation einer Curve auf den Torsionswinkel. Wir gehen der Einfachheit wegen von einem Kreise aus und schalten an der Stelle eines unendlich kleinen Bogenstücks eine doppelt gekrümmte Curve ein. Diese erfülle die Bedingungen, dass erstlich die Coordinaten sich nach positiven ganzen Potenzen des das ausgeschaltete Intervall gleichzeitig vollendenden Kreisbogens entwickeln lassen, und dass dann die eingeschaltete Curve in beiden Endpunkten den Kreis in 3. Ordnung osculirt. Hierdurch nämlich wird sowol die Variation der Tangente und Schmiegungsebene, was eigentlich schon hinreichte, als auch die der Torsion in durchgängiger Stetigkeit erhalten.

Die Gleichungen der eingeschalteten Curve lassen sich dann in voller Allgemeinheit folgendermassen aufstellen:

$$x = \sin\varphi + px_1; \quad y = 1 - \cos\varphi + py_1; \quad z = pz_1$$

wo

$$p = \varphi^4(\varphi - \alpha)^4$$

$\alpha$ der Endwert von $\varphi$, und $x_1$, $y_1$, $z_1$ Reihensummen von der Form $A + A_1\varphi + A_2\varphi^2 + \ldots$ Die Accente mögen sich auf Differentiation nach $\varphi$ beziehen, und $r_k$ unendlich kleine Reste $k$ter Ordnung (wenn $\alpha$, $\varphi$ erster O.) bezeichnen.

Im Anfang schreiben wir noch kürzer:

$$x = \sin\varphi + \xi; \quad y = 1 - \cos\varphi + \eta$$

wo dann $\xi$, $\xi'$, $\xi''$ ... bzbw. 8., 7., 6. ... Ordnung, und $\eta$ und $z$ in gleichem Falle mit $\xi$ sind.

Die erste Differentiation giebt:

$$x' = \cos\varphi + \xi'; \quad y' = \sin\varphi + \eta'; \quad z' = z'$$

Die Summe der Quadrate ist:

$$s'^2 = 1 + 2(\xi'\cos\varphi + \eta'\sin\varphi) + r_{14}$$

woraus:

$$\frac{1}{s'} = 1 - (\xi'\cos\varphi + \eta'\sin\varphi) + r_{14}$$

und nach Multiplication erhält man als Richtungscosinus der Tangente:

$$f = \cos\varphi + (\xi'\sin\varphi - \eta'\cos\varphi)\sin\varphi + r_{14}$$
$$g = \sin\varphi - (\xi'\sin\varphi - \eta'\cos\varphi)\cos\varphi + r_{14}$$
$$h = z' - z'(\xi'\cos\varphi + \eta'\sin\varphi) + r_{21}$$

Die neue Differentiation ergiebt:

$$f' = -\sin\varphi + \xi'\sin 2\varphi - \eta'\cos 2\varphi + (\xi''\sin\varphi - \eta''\cos\varphi)\sin\varphi + r_{13}$$
$$g' = \cos\varphi - \xi'\cos 2\varphi - \eta'\sin 2\varphi - (\xi''\sin\varphi - y''\cos\varphi)\cos\varphi + r_{13}$$
$$h' = z'' - z''(\xi'\cos\varphi + \eta'\sin\varphi) + z'(\xi'\sin\varphi - \eta'\cos\varphi)$$
$$- z'(\xi''\cos\varphi + \eta''\sin\varphi) + r_{20}$$

Die Summe der Quadrate ist:

$$\tau'^2 = 1 - 2(\xi'\cos\varphi + \eta'\sin\varphi + \xi''\sin\varphi - \eta''\cos\varphi) + r_{13}$$

woraus:

$$\frac{1}{\tau'} = 1 + \xi'\cos\varphi + \eta'\sin\varphi + \xi''\sin\varphi - \eta''\cos\varphi + r_{13}$$

und nach Multiplication erhält man die Richtungscosinus der Hauptnormale:

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = -\sin\varphi + (\xi'\sin\varphi - \eta'\cos\varphi)\cos\varphi + r_{13} \tag{4}$$
$$\frac{\partial g}{\partial \tau} = \cos\varphi + (\xi'\sin\varphi - \eta'\sin\varphi)\sin\varphi + r_{13}$$
$$\frac{\partial h}{\partial \tau} = z'' + z'(\xi'\sin\varphi - \eta'\cos\varphi - \xi''\cos\varphi - \eta''\sin\varphi)$$
$$+ z''(\xi''\sin\varphi - \eta''\cos\varphi) + r_{19}$$

Aus den Richtungscosinus der Tangente und Hauptnormale findet man die der Binormale, deren erster wird:

$$l = \begin{vmatrix} g & h \\ \frac{\partial g}{\partial \tau} & \frac{\partial h}{\partial \tau} \end{vmatrix} = z''\sin\varphi - z'\cos\varphi$$
$$+ z'[(\xi'\cos\varphi + \eta'\sin\varphi)\cos\varphi - (\xi''\cos\varphi + \eta''\sin\varphi)\sin\varphi]$$
$$+ z''[-(\xi'\sin\varphi - \eta'\cos\varphi)\cos\varphi + (\xi''\sin\varphi - \eta''\cos\varphi)\sin\varphi] + r_{19}$$

Dies wieder differentiirt giebt:

$$-\frac{\partial f}{\partial \tau}\vartheta' = (z' + z''')\sin\varphi + z'[-\xi'\sin 2\varphi + \eta'\cos 2\varphi$$
$$+ (\xi''\sin\varphi - \eta''\cos\varphi)\sin\varphi - (\xi'''\cos\varphi + \eta'''\sin\varphi)\sin\varphi]$$
$$+ z''[(\xi'\sin\varphi - \eta'\cos\varphi)\sin\varphi + (\xi'''\sin\varphi - \eta'''\cos\varphi)\sin\varphi]$$
$$+ z'''[-(\xi'\sin\varphi - \eta'\cos\varphi)\cos\varphi + (\xi''\sin\varphi - \eta''\cos\varphi)\sin\varphi] + r_{18}$$

und nach Division durch (4):

$$\vartheta' = (z' + z''')(1 + \xi''\sin\varphi - \eta''\cos\varphi)$$
$$+ (\xi' + \xi''')(z''\sin\varphi - z'\cos\varphi) - (\eta' + \eta''')(z''\cos\varphi + z'\sin\varphi)$$
$$= \{z + z'' - z'(\xi''\cos\varphi + \eta''\sin\varphi) + z''(\xi''\sin\varphi - \eta''\cos\varphi)\}'$$
$$- 2z'(\xi'\cos\varphi + \eta'\sin\varphi) + z''(\xi'\sin\varphi - \eta'\cos\varphi)$$

Da nun die Functionen $\xi''$, $\eta''$, $z''$ für $\varphi = 0$ und $\varphi = \alpha$ in 2. Ordnung verschwinden, so ist der Torsionswinkel über das eingeschaltete Intervall, mithin auch über die ganze Curve genommen:

$$\vartheta_\alpha = \int_0^\alpha \{-2z'(\xi'\cos\varphi + \eta'\sin\varphi) + z''(\xi'\sin\varphi - \eta'\cos\varphi)\}\partial\varphi + r_{19}$$

Setzt man

$$x_1 = A + A_1\varphi + A_2\varphi^2 + \dots$$
$$y_1 = B + B_1\varphi + B_2\varphi^2 + \dots$$
$$z_1 = C + C_1\varphi + C_2\varphi^2 + \dots$$

so ist die niedrigste vorkommende Ordnung die 13te; von da bis zur 15ten entwickelt ergiebt sich:

$$\vartheta_\alpha = \int_0^\alpha \{-BCp'p'' + [(AC - B_1C - BC_1)p'p''\varphi - B_1Cpp''$$
$$- 2(AC + BC_1)p'^2] + [(A_1C - B_2C + \tfrac{1}{2}BC + AC_1 - B_1C_1 - BC_2)p'p''\varphi^2$$
$$+ (A_1C - 2B_2C - B_1C_1)pp''\varphi - 2(B_1C_1 + BC_2 + A_1C + BC)p'^2\varphi$$
$$- (2B_1C_1 + BC_2 + 2AC_1 + 2A_1C)pp']\}\partial\varphi + \dots$$

und nach teilweiser Integration, wo die integrirten Terme verschwinden:

$$\vartheta_\alpha = D\int_0^\alpha p'^2\partial\varphi + E\int_0^\alpha p'^2\varphi\,\partial\varphi + \dots$$

Die Werte der Constanten sind:

$$\left.\begin{aligned} D &= \tfrac{3}{2}(B_1C - BC_1) - \tfrac{5}{2}AC \\ E &= 3B_2C - BC_2 - 4A_1C - AC_1 - \tfrac{5}{2}BC \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Nun hat man:

$$p'^2 = 16\varphi^6(\varphi - \alpha)^6\{4\varphi(\varphi - \alpha) + \alpha^2\}$$

Substituirt man $\alpha\varphi$ für $\varphi$, so kommt:

$$\vartheta_\alpha = 16\alpha^{15}\int_0^1 \{\varphi^6(1-\varphi)^6 - 4\varphi^7(1-\varphi)^7\}(D + E\alpha\varphi)\partial\varphi$$
$$= 16\alpha^{15}\left\{D\left[\frac{(\Gamma 7)^2}{\Gamma 14} - \frac{4(\Gamma 8)^2}{\Gamma 16}\right] + E\left(\frac{\Gamma 7\,\Gamma 8}{\Gamma 15} - \frac{4\Gamma 8\,\Gamma 9}{\Gamma 17}\right)\right\}$$
$$= \frac{4\alpha^{15}}{45045}(D + \tfrac{1}{2}E\alpha) \qquad (6)$$

Demnach hat eine Deformation eines unendlich kleinen Stücks eines Kreises, bei beständig festgehaltener Stetigkeit der Tangente, der Schmiegungsebene und der Torsion, im allgemeinen (d. h. wenn $D$ nicht null ist) eine äusserst kleine Aenderung 15ter Ordnung im Torsionswinkel zur Folge, und eine Parallele mit der deformirten Curve trifft nach Umlauf in äusserst kleiner Entfernung vom Anfang die anfängliche Normalebene.

Es wird sich nun zeigen, dass, wenn man von einer doppelt gekrümmten Curve ausgeht, der Einfluss der Deformation unter sonst gleichen Umständen wesentlich grösser ist. Im vorigen Falle nämlich war der Einfluss der in $p$ linearen Terme noch null, und wir mussten bis zu 2. Potenz von $p$, $p'$, ... fortentwickeln; dies ist hier nicht mehr der Fall.

Die Urcurve sei $s$, die deformirte $s_1$, das deformirte Stück erstrecke sich von $s = 0$ bis $s = e$. Innerhalb dieses Intervalls seien die Coordinaten des laufenden Punkts von $s_1$:

$$x_1 = x + \xi; \quad y_1 = y + \eta; \quad z_1 = z + \zeta$$

Die Osculation 3. Ordnung an beiden Enden wird stattfinden, wenn man setzt:

$$\xi = p(a + a_1 s + \dots); \quad \eta = p(b + b_1 s + \dots); \quad \zeta = p(c + c_1 s + \dots)$$
$$p = s^4(s-e)^4$$

Zur Abkürzung sei

$$\xi_1 = \frac{\partial \xi}{\partial s}; \quad \eta_1 = \frac{\partial \eta}{\partial s}; \quad \zeta_1 = \frac{\partial \zeta}{\partial s}$$

und der Accent bezeichne die Differentiation nach $\tau$.

Die erste Differentiation ergiebt:

$$f_1 \frac{\partial s_1}{\partial s} = f + \xi_1; \quad g_1 \frac{\partial s_1}{\partial s} = g + \eta_1; \quad h_1 \frac{\partial s_1}{\partial s} = h + \zeta_1 \tag{7}$$

die Quadratsumme, mit Weglassung der höhern Potenzen von $p$:

$$\left(\frac{\partial s_1}{\partial s}\right)^2 = 1 + 2(f\xi_1 + g\eta_1 + h\zeta_1)$$

woraus:

$$\frac{\partial s}{\partial s_1} = 1 - (f\xi_1 + g\eta_1 + h\zeta_1)$$

und nach Multiplication mit (7):

$$f_1 = f + \xi_1 - f(f\xi_1 + g\eta_1 + h\zeta_1)$$
$$g_1 = g + \eta_1 - g(f\xi_1 + g\eta_1 + h\zeta_1)$$
$$h_1 = h + \zeta_1 - h(f\xi_1 + g\eta_1 + h\zeta_1)$$

Nach neuer Differentiation erhält man:

$$f_1'\frac{\partial \tau_1}{\partial \tau} = f' + \xi_1' - f'(f\xi_1 + g\eta_1 + h\zeta_1) - f(f\xi_1 + g\eta_1 + h\zeta_1)'$$

$$g_1'\frac{\partial \tau_1}{\partial \tau} = g' + \eta_1' - g'(f\xi_1 + g\eta_1 + h\zeta_1) - g(f\xi_1 + g\eta_1 + h\zeta_1)'$$

$$h_1'\frac{\partial \tau_1}{\partial \tau} = h' + \zeta_1' - h'(f\xi_1 + g\eta_1 + h\zeta_1) - h(f\xi_1 + g\eta_1 + h\zeta_1)'$$

und als Quadratsumme:

$$\left(\frac{\partial \tau_1}{\partial \tau}\right)^2 = 1 + 2(f'\xi_1' + g'\eta_1' + h'\zeta_1') - 2(f\xi_1 + g\eta_1 + h\zeta_1)$$

woraus:

$$\frac{\partial \tau}{\partial \tau_1} = 1 - (f'\xi_1' + g'\eta_1' + h'\zeta_1') + (f\xi_1 + g\eta_1 + h\zeta_1)$$

hiermit die vorigen Gleichungen multiplicirt giebt:

$$f_1' = f' + \xi_1' - f'(f'\xi_1' + g'\eta_1' + h'\zeta_1') - f(f\xi_1 + g\eta_1 + h\zeta_1)'$$
$$g_1' = g' + \eta_1' - g'(f'\xi_1' + g'\eta_1' + h'\zeta_1') - g(f\xi_1 + g\eta_1 + h\zeta_1)'$$
$$h_1' = h' + \zeta_1' - h'(f'\xi_1' + g'\eta_1' + h'\zeta_1') - h(f\xi_1 + g\eta_1 + h\zeta_1)'$$

Aus den Richtungscosinus der Tangente und Hauptnormale findet man auf bekannte Weise die der Binormale, deren erster lautet:

$$l_1 = l - l(f\xi_1 + g\eta_1 + h\zeta_1) - l(f'\xi' + g'\eta_1' + h'\zeta_1')$$
$$+ \begin{vmatrix} g & \eta_1' \\ h & \zeta_1' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} g' & \eta_1 \\ h' & \zeta_1 \end{vmatrix}$$

und nach neuer Differentiation (nebst Vorzeichenwechsel):

$$f_1'\frac{\partial \vartheta_1}{\partial \tau} = f'\{1 - (f\xi_1 + g\eta_1 + h\zeta_1) - (f'\xi_1' + g'\eta_1' + h'\zeta_1')\}\vartheta'$$
$$+ l(f\xi_1 + g\eta_1 + h\zeta_1)' + l(f'\xi_1' + g'\eta_1' + h'\zeta_1')'$$
$$- \begin{vmatrix} g & \eta_1'' \\ h & \zeta_1'' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} g & \eta_1 \\ h & \zeta_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m & \eta_1 \\ n & \zeta_1 \end{vmatrix}\vartheta'$$
$$= f'\{1 - (f\xi_1 + g\eta_1 + h\zeta_1) - (f'\xi_1' + g'\eta_1' + h'\zeta_1')\}\vartheta'$$
$$+ lf'(\xi_1 + \xi_1'') + (lg' + h)(\eta_1 + \eta_1'') + (lh' - g)(\zeta_1 + \zeta_1'')$$
$$+ \{(1 - f^2 - f_1'^2)\xi_1' - (fg + f'g')\eta_1' - (fh + f'h')\zeta_1'\}\vartheta'$$
$$+ \{(ff' - ff')\xi_1 + (gf' - fg')\eta_1 + (hf' - fh')\zeta_1\}\vartheta'$$
$$= f'\{[1 - 2(f'\xi_1' + g'\eta_1' + h'\zeta_1')]\vartheta' + l(\xi_1 + \xi_1'') + m(\eta_1 + \eta_1'') + n(\zeta_1 + \zeta_1'')\}$$
$$+ \xi_1'\vartheta' - f(f\xi_1 + g\eta_1 + h\zeta_1)'\vartheta'$$

Dies dividirt durch den obigen Wert von $f_1'$ giebt:

Digitized by Google

$$\frac{\partial \vartheta_1}{\partial \tau} = \vartheta' - (f'\xi_1' + g'\eta_1' + h'\zeta_1')\vartheta'$$
$$+ l(\xi_1 + \xi_1'') + m(\eta_1 + \eta_1'') + n(\zeta_1 + \zeta_1'')$$

oder:

$$\partial\vartheta_1 = \partial\vartheta + \partial(l\xi_1' + m\eta_1' + n\zeta_1') + (l\xi_1 + m\eta_1 + n\zeta_1)\partial\tau$$

und integrirt von $s = 0$ bis $s = e$, wo der zweite Term der Rechten verschwindet:

$$\vartheta_1 - \vartheta = \int_0^e \frac{l\,\partial\xi + m\,\partial\eta + n\,\partial\zeta}{s'}$$

$$= -\int_{s=0}^{s=e} \left\{ \xi\,\partial\left(\frac{l}{s'}\right) + \eta\,\partial\left(\frac{m}{s'}\right) + \zeta\,\partial\left(\frac{n}{s'}\right) \right\} \tag{8}$$

Nimmt man den Anfang des Bogens $s$ zum Anfang der $xyz$, die Tangente, Haupt- nnd Binormale dieses Anfangs bzhw. zu den Axen der $x$, $y$ und $z$, nnd entwickelt die Coordinaten nach Potenzen von $s$ bis zur vierten, so erhält man, wenn der Kürze wegen die Anfangswerte von $\vartheta'$ nnd $s'$ und die der Derivationen mit $\varkappa$, $\varkappa'$ und $\mu$, $\mu'$, $\mu''$ bezeichnet werden:

$$x = s - \frac{s^3}{6\mu^2} + \frac{\mu' s^4}{8\mu^4}$$

$$y = \frac{s^2}{2\mu} - \frac{\mu' s^3}{6\mu^3} - \left(1 + \varkappa^2 + \frac{\mu''}{\mu} - \frac{3\mu'^2}{\mu^2}\right)\frac{s^4}{24\mu^3}$$

$$z = \frac{\varkappa s^3}{6\mu^2} + \left(\varkappa' - \frac{3\varkappa\mu'}{\mu}\right)\frac{s^4}{24\mu^3}$$

und nach zweimaliger Differentiation erst:

$$f = 1 - \frac{s^2}{2\mu^2} + \frac{\mu' s^3}{2\mu^4}$$

$$g = \frac{s}{\mu} - \frac{\mu' s^2}{2\mu^3} - \left(1 + \varkappa^2 + \frac{\mu''}{\mu} - \frac{3\mu'^2}{\mu^2}\right)\frac{s^3}{6\mu^3}$$

$$h = \frac{\varkappa s^2}{2\mu^2} + \left(\varkappa' - \frac{3\varkappa\mu'}{\mu}\right)\frac{s^3}{6\mu^3}$$

dann:

$$\frac{f'}{s'} = -\frac{s}{\mu^2} + \frac{3\mu' s^2}{2\mu^4}$$

$$\frac{g'}{s'} = \frac{1}{\mu} - \frac{\mu' s}{\mu^3} - \left(1 + \varkappa^2 + \frac{\mu''}{\mu} - \frac{3\mu'^2}{\mu^2}\right)\frac{s^2}{2\mu^3}$$

$$\frac{h'}{s'} = \frac{\varkappa s}{\mu^2} + \left(\varkappa' - \frac{3\varkappa\mu'}{\mu}\right)\frac{s^2}{2\mu^3}$$

woraus durch Determinantenbildung:

$$\frac{l}{s'} = \frac{\varkappa s^2}{2\mu^3} + \left(\frac{\varkappa'}{3} - \frac{\varkappa\mu'}{\mu}\right)\frac{s^3}{\mu^4}$$

$$\frac{m}{s'} = -\frac{\varkappa s}{\mu^2} - \left(\varkappa' - \frac{3\varkappa\mu'}{\mu}\right)\frac{s^2}{2\mu^3}$$

$$\frac{n}{s'} = \frac{1}{\mu} - \frac{\mu' s}{\mu^3} - \left(\varkappa^2 + \frac{\mu''}{\mu} - \frac{3\mu'^2}{\mu^2}\right)\frac{s^2}{2\mu^3}$$

Dies eingeführt giebt bis zu erster Potenz von $s$:

$$\xi\partial\left(\frac{l}{s'}\right) + \eta\partial\left(\frac{m}{s'}\right) + \zeta\partial\left(\frac{n}{s'}\right) = -p(D+Es)\partial s$$

$$D = \frac{b\varkappa}{\mu^2} + \frac{c\mu'}{\mu^3}$$

$$E = -\frac{a\varkappa}{\mu^3} + \frac{b_1\varkappa}{\mu^2} + \frac{b}{\mu^3}\left(\varkappa' - \frac{3\varkappa\mu'}{\mu}\right) + \frac{c_1\mu'}{\mu^3} + \frac{c}{\mu^3}\left(\varkappa^2 + \frac{\mu''}{\mu} + \frac{3\mu'^2}{\mu^2}\right)$$

und nach Gl. (8) erhält man:

$$\vartheta_1 - \vartheta = \int_0^e p(D+Es)\partial s = e^9\int_0^1 s^4(1-s)^4(D+Ees)\partial s$$

$$= e^9\left\{D\frac{(\Gamma 5)^2}{\Gamma 10} + Ee\frac{\Gamma 5\,\Gamma 6}{\Gamma 11}\right\} = \frac{e^9}{630}(D+\tfrac{1}{2}Ee)$$

Die Differenz $\vartheta_1 - \vartheta$ bleibt offenbar ungeändert, wenn $s$ über das deformirte Intervall hinaus variirt. Sind also die Parallelen der Urcurve geschlossen, so drückt die gefundene Unendlichkleine 9. Ordnung den Bogenabstand des Endes der Parallele vom Anfang nach Deformation für die Einheit des Radius aus, sind jene es nicht, den Zuwachs des Bogenabstands.

VII.

# Bestimmung und Untersuchung der Curve, welche die Punkte verbindet, die auf concentrischen, reflectirenden Schalen liegen und der Bedingung genügen, dass die von einem festen Punkte ausgehenden Lichtstrahlen daselbst so reflectirt werden, dass sie alsdann durch einen zweiten festen Punkt gehen.

Von

Herrn **Wilhelm Werner,**
Assistent im Königl. geodätischen Institut.

---

Im Arbeitsplan des Kgl. preussischen geodätischen Instituts war für den Sommer 1878 die Verbindnng Helgolands mit dem Festlande durch ein trigonometrisches Nivellement vorgesehen. Zu diesem Zwecke wurden auf den Stationen Helgoland, Nenwerk und Wangerooge gleichzeitige und gegenseitige Zenithdistanzen gemessen*). Als anzuvisirende Objecte diente auf allen 3 Stationen Heliotropenlicht. An einzelnen Tagen der Beobachtungsperiode sah man im Fernrohr, ausser dem vom Heliotropenspiegel reflectirten Sonnenbilde, noch ein zweites Bild, vertical gegen das erstere verschoben und in grösserer Zenithdistanz als das Hauptbild, auftauchen. Bei entsprechenden Beobachtungen auf dem Festlande sind zuweilen ähnliche Ercheinungen wahrgenommen, und zeigten sich die Nebenbilder nicht nur in verticaler, sondern auch in horizontaler Richtung gegen das Hauptbild verschoben. In letzterem Falle ist die Ent-

---

*) Vergleiche hierüber „Generalbericht pro 1878".

stehung der Nebenbilder rein auf Luftspiegelung zurückzuführen *). In ersterem Falle wurde die Entstehung der Nebenbilder durch rein örtliche Verhältnisse bedingt, indem eben die Beobachtungsstationen auf Inseln liegen, die zwischen sich die Meeresfläche haben, so dass das Nebenbild aufzufassen ist als entstanden durch nochmalige Reflexion auf dem Meeresspiegel. Da nämlich von allen Punkten der Sonne Strahlen auf den Spiegel des Heliotropen fallen, so wird auch ein kleines Sonnenbild entstehen für alle die Punkte, welche innerhalb eines Kegelmantels liegen, dessen Spitze im Heliotropenspiegel liegt und dessen Spitzenwinkel gleich ist dem scheinbaren Sonnendurchmesser. Schneidet also die Meeresfläche diesen Strahlenkegel, so wird es auch einen Punkt der Meeresoberfläche geben, in welchem das Licht so reflectirt wird, dass der reflectirte Strahl durch den Beobachtungsort geht, durch welchen auch die vom Heliotropenspiegel reflectirten Strahlen direct gehen.

Es waren die Objecte gegenseitig nur in Folge der Refraction des Lichtstrahls sichtbar, so dass das Object an einzelnen Tagen scheinbar aus dem Wasser emporstieg. Anfangs wurde es noch theilweise durch die Meereswellen verdeckt. Bei zunehmender Refraction oder beim Fallen des Meeresspiegels verlor dann das Hauptbild seine im allgemeinen scheibenförmige Gestalt und wurde immer mehr und mehr in die Länge gezogen, bis es sich schliesslich in zwei Bilder trennte. Der Winkel zwischen beiden Bildern ist auf der Beobachtungsstation Neuwerk bis zu 1′ beobachtet worden.

Es soll nun in folgendem versucht werden, den Ort der Punkte zu finden, welche das von der einen Station auffallende Licht nach der andern Station reflectiren; und zwar unter der Annahme, dass die reflectirenden Flächen concentrische Kugelschalen sind, und dass das Licht sich geradlinig fortbewegt, also die Refraction unberücksichtigt bleibt.

*) Diese Erscheinungen sind am ausführlichsten von Biot in seinem Werke: Recherches sur les Refractions extraordinaires, qui ont lieu près de l'horizon. Paris 1810. behandelt, und hat Biot seine Resultate dann praktisch vollständig bestätigt gefunden bei seinen Beobachtungen in Dünkirchen zum Zweck der französischen Gradmessung.

Ausserdem Brandes: Beobachtungen und theoretische Untersuchungen über die Strahlenbrechung.

Ferner findet man in verschiedenen Bänden von Gilbert's Annalen hierauf Bezügliches.

Digitized by Google

Aufgabe:

Es seien drei Punkte $A$, $B$, $C$, welche in einer Ebene liegen, fest mit einander verbunden. Es sei $C$ der Mittelpunkt concentrischer spiegelnder Ringe. In $A$ befinde sich eine Lichtquelle. Es soll der Ort derjenigen Punkte gefunden werden, für welche die reflectirten Strahlen durch den Punkt $P$ gehen. Es wird angenommen, dass das Licht sich geradlinig fortbewegt.

Nimmt man ein rechtwinkliges Achsensystem an, dessen Ursprung im Punkte $A$ ist, und dessen positive $x$ Achse durch den Punkt $B$ geht, so sind die drei Punkte gegeben durch die Coordinaten

$$A: x = 0 \quad B: x = \zeta \quad C: x = \xi$$
$$y = 0 \quad\quad y = 0 \quad\quad y = \eta$$

Die allgemeine Gleichung einer Geraden hat die Form

$$y = ax + b$$

wo $a$ die Tangente des Winkels ist, den die Gerade mit der $x$ Achse bildet, gezählt in dem Sinne von der positiven $x$ Achse über die Richtung der positiven $y$ Achse. Damit dieselbe Gerade durch einen Punkt, dessen Coordinaten $x_1 y_1$ sind, gehe, muss sein

$$y - y_1 = a(x - x_1).$$

Die Gleichungen der vom Punkte $A$ ausgehenden Lichtstrahlen haben also die Form

1) $$y = ax$$

wo $a$ die Richtung des Strahls bestimmt.

Damit die reflectirten Strahlen durch den Punkt $B$ gehen, müssen sie der Gleichung

2) $$y = a'(x - \zeta)$$

genügen.

Endlich müssen die Geraden, welche durch den Punkt $C$ gehen, der Gleichung

3) $$y - \eta = a''(x - \xi)$$

genügen.

Ist nun $P$ ein Punkt, welcher das von $A$ auffallende Licht nach $B$ reflectirt, so müssen seine Coordinaten $xy$ den Gleichungen 1) 2) 3) genügen. Ferner müssen die Neigungswinkel der 3 Geraden der Art sein, dass die Reflexionsgesetze erfüllt werden: danach muss $CP$ als Normale der spiegelnden Fläche den Winkel $APB$ halbiren. Die Bedingung hierfür lässt sich wie folgt aufstellen.

Es ist

$$\alpha' = \alpha + 2\beta;\quad \alpha'' = \alpha + \beta;\quad \beta = \alpha'' - \alpha \quad \text{das gibt}$$

$$\alpha' = -\alpha + 2\alpha'' \quad \text{oder} \quad 2\alpha'' = \alpha + \alpha' \quad \text{oder auch}$$

4) $$\frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha''}{1-\mathrm{tg}^2\alpha''} = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\alpha'}{1-\mathrm{tg}\,\alpha . \mathrm{tg}\,\alpha'};$$

für die Tangenten die entsprechenden Werte aus den Gleichungen 1) 2) 3), nämlich

$$\mathrm{tg}\,\alpha = a;\quad \mathrm{tg}\,\alpha' = a';\quad \mathrm{tg}\,\alpha'' = a'' \quad \text{gesetzt, gibt}$$

$$\frac{2a''}{1-a''^2} = \frac{a+a'}{1-aa'} \quad \text{oder}$$

5) $$2a''(1-aa') = (1-a''^2)(a+a')$$

Diese Bedingung muss erfüllt sein, damit im Punkte $P$ die von $A$ auffallenden Strahlen nach $B$ reflectirt werden.

Aus den Gleichungen 1) bis 3) erhält man

$$a = \frac{y}{x};\quad a' = \frac{y}{x-\zeta};\quad a'' = \frac{y-\eta}{x-\xi}$$

Setzt man diese Werte in Gleichung 5) ein, so erhält man eine Gleichung zwischen $x$ und $y$, welche dann den Ort aller Punkte $P$ bestimmt.

Es entsteht dann

$$2\frac{y-\eta}{x-\xi}\left(1-\frac{y}{x}\cdot\frac{y}{x-\zeta}\right) = \left(1-\left(\frac{y-\eta}{x-\xi}\right)^2\right)\left(\frac{y}{x}+\frac{y}{x-\zeta}\right)$$

oder

$$[xy+y(x-\zeta)][(x-\xi)^2-(y-\eta)^2] = 2(y-\eta)(x-\xi)[x(x-\zeta)-y^2]$$

Löst man die Klammern auf und fasst die entsprechenden Glieder zusammen, so erhält man folgende nach Potenzen der Veränderlichen $x$, $y$ geordnete Reihe

6) $$2x^3\eta + y^3(\zeta-2\xi) + x^2y(\zeta-2\xi) + 2y^2x\eta + 2xy(\xi^2-\eta^2) - 2x^2\eta(\xi+\zeta) + 2y^2\eta(\xi-\zeta) + 2x\zeta\xi\eta - y\zeta(\xi^2-\eta^2) = 0$$

welche zur Bestimmung der einzelnen Punkte $P$ dient.

Die Bedingung dafür, dass die von $A$ aus in $P$ auffallenden Strahlen nach $B$ reflectirt werden, kann noch auf andere Weise aufgestellt werden. Halbirt nämlich die Gerade $CP$ den Winkel $APB$, so müssen auch die von $C$ auf die Geraden I und II gefällten Normalen einander gleich sein.

Ist eine Gerade bedingt durch die Gleichung

$$y = ax + b$$

so muss eine Gerade, welche zur ersten normal ist und durch den Punkt $C$ geht, der Gleichung

$$\frac{y-\eta}{x-\xi} = -\frac{1}{a}$$

genügen. Fällt man von einem Punkte $\xi\eta$ eine Normale auf die Gerade, so ist die Länge der Normalen bestimmt durch

$$p = (\eta - y)\cos\alpha - (\xi - x)\sin\alpha$$

oder auch

$$\frac{p}{\cos\alpha} = \eta - y - (\xi - x)\operatorname{tg}\alpha \quad \text{und} \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$$

also ist

$$p = \frac{\eta - y - (\xi - x)\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$$

Um die Länge der Normale $p$ von $C$ auf I zu erhalten, hat man $\operatorname{tg}\alpha = a$ zu setzen, und dem Werte von $y = 0$ entspricht $x = 0$, da I durch den Ursprung geht, also

7) $$p_I = \frac{\eta - \xi a}{\sqrt{1+a^2}}$$

und um den Wert der Normale von $C$ auf II zu erhalten, ist $\operatorname{tg}\alpha = a'$ und für $y = 0$ der entsprechende Wert $x = \zeta$ zu setzen, gibt

$$p_{II} = \frac{\eta - (\xi - \zeta)a'}{\sqrt{1+a'^2}}.$$

Setzt man nun $p_I = p_{II}$ und führt für $a$ und $a'$ die entsprechenden Werte aus Gleichung 1) und 2) ein, so erhält man

$$\frac{\eta - \frac{y}{x}\xi}{\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}} = \frac{\eta - \frac{y}{x-\zeta}(\xi - \zeta)}{\sqrt{1+\left(\frac{y}{x-\zeta}\right)^2}}$$

Löst man diese Gleichung auf und reducirt nach fallenden Potenzen von $x$ und $y$, so erhält man die Gleichung 6), wie sie oben gefunden ist.

Ein dritter Weg zur Herleitung der Gleichung für die Punkte $P$ ergibt sich durch folgende Betrachtung:

Damit die im Punkte $P$ von $A$ aus einfallenden Strahlen nach $B$ reflectirt werden, muss die Gerade $CP$ den Winkel $APB$ halbiren.

Da nun bei der Ellipse die Normale für einen Punkt derselben den Winkel, den die beiden Leitstrahlen in diesem Punkte bilden, halbirt, so kann auch $P$ angesehen werden als Punkt einer Ellipse, deren Brennpunkte in $A$ und $B$ liegen. Es läuft also die Aufgabe darauf hinaus, den Ort aller Punkte zu finden, die einzeln confocalen Ellipsen angehören und die der Bedingung genügen, dass die in diesen Punkten errichteten Normalen der Ellipsen alle durch einen festen Punkt $C$ gehen.

Bezeichnet man die Halbachsen der Ellipse mit $a$ und $b$, welche Werte mit den unter diesen Buchstaben früher bezeichneten Werte nichts gemein haben, und die Exentricität der Ellipse mit $c$, so dass eben $c^2 = a^2 - b^2$ ist, dann ist die Gleichung der Ellipse, bezogen auf den einen Brennpunkt als Ursprung, von der Form

9) $$\frac{(x-c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Die Gleichung der Normale einer Curve ist

$$Y - y = -\frac{dx}{dy}(X - x)$$

wo eben $XY$ die laufenden Coordinaten der Normalen, und $xy$ die Coordinaten der Curve sind. Aus 9) ist

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{y}{x-c}\,\frac{a^2}{b^2}$$

eingesetzt gibt

$$Y - y = y\,\frac{X-c}{x-c}\,\frac{a^2}{b^2}$$

Die Bedingung ist, dass die Normale durch den Punkt $C$ geht, also muss die Gleichung der Normale auch bestehen für $Y = \eta$ und $X = \xi$; eingesetzt gibt

10) $$\eta - y = y\,\frac{\xi - x}{x - c}\,\frac{a^2}{b^2}$$

als Gleichung der gesuchten Normale.

Eine ähnliche Gleichung würde man erhalten für eine Ellipse mit den Halbachsen $a'b'$ und den Coordinaten $x'y'$.

Eliminirt man nun aus Gleichung 9) und 10) die Werte $a$ und $b$, so erhält man zwischen $x$ und $y$ die Gleichung der gesuchten Curve.

Die Exentricität $c$ ist constant für alle Ellipsen.

Setzt man der Kürze halber

$$(x-c)^2 = A \qquad\qquad (\eta - y)(x-c) = C$$
$$y^2 = B \qquad\qquad y(\xi - x) = D$$

so erhält man aus 9) und 10)

$$\frac{A}{a^2} + \frac{B}{b^2} = 1$$

$$\frac{C}{a^2} - \frac{D}{b^2} = 0$$

und aus diesen beiden Gleichungen

$$a^2 = \frac{AD+BC}{D} \quad \text{und} \quad b^2 = \frac{AD+BC}{C}$$

oder

$$a^2 - b^2 = c^2 = \left[\frac{1}{D} - \frac{1}{C}\right]\left[AD+BC\right]$$

Setzt man nun für $A$, $B$, $C$, $D$ die Werte zurück und streicht den gemeinschaftlichen Factor $y(x-c)$ hinweg, so erhält man:

$$c^2(\eta - y)(\xi - x) = [(\eta - y)(x-c) - y(\xi - x)][(x-\alpha)(\xi - x) + y(\eta - y)]$$

Diese Gleichung aufgelöst und nach fallenden Potenzen von $x$ und $y$ geordnet gibt

$$x^3\eta + y^3(c-\xi) + x^2y(c-\xi) + xy^2\eta - xy(\eta^2-\xi^2) - x^2\eta(2c+\xi) - y^2\eta(2c-\xi)$$
$$+ x\eta\xi\, 2c - yc(\xi^2 - \eta^2) = 0$$

Nun ist ja aber die Excentricität $c = \frac{\zeta}{2}$. Setzt man diesen Wert ein, so erhält man wieder die Gleichung unter 6).

Bei der Herleitung der Gleichung 6) ist über die Lage von $C$ keine die Allgemeinheit einschränkende Annahme gemacht. Nimmt man nun an, dass $C$ von $A$ und $B$ gleichweit entfernt, also $\xi = \frac{\zeta}{2}$ ist, so geht die Gleichung 6) über in folgende:

11)
$$2x^3\eta + 2y^2x\eta + 2xy\left(\frac{\zeta^2}{4} - \eta^2\right) - 3x^2\eta\zeta - y^2\eta\zeta + x\zeta^2\eta - y\zeta\left(\frac{\zeta^2}{4} - \eta^2\right) = 0$$

Diese Gleichung 3. Grades zerfällt dann in eine Gleichung ersten und eine Gleichung zweiten Grades. Die Gleichung ersten Grades stellt eine Gerade dar, deren Gleichung ist

12) $$x = \frac{\zeta}{2}$$

und dividirt man 11) durch $x-\frac{\zeta}{2}$, so erhält man, nachdem man noch den gemeinschaftlichen Factor 2 fortgelassen,

$$x^2+y^2-y\frac{\eta^2-\frac{\zeta^2}{4}}{\eta}-x\zeta=0 \tag{13}$$

Dies ist offenbar die Gleichung eines Kreises, dessen Mittelpunkt die Coordinaten

$$x=\frac{\zeta}{2} \quad \text{und} \quad y=\frac{\eta^2-\frac{\zeta^2}{4}}{2\eta}$$

hat. Es wird die Gleichung 13) erfüllt für $x=0$ und $y=0$, also ist der Radius des durch 13) bestimmten Kreises bestimmt durch

$$r=\sqrt{\frac{\zeta^2}{4}+\left(\frac{\eta^2-\frac{\zeta^2}{4}}{2\eta}\right)^2} \tag{14}$$

Die Gleichungen 6) resp. 12) und 13) geben den Ort aller Punkte, die mathematisch den Bedingungen der Aufgabe genügen. Jedoch geben nicht alle Punkte reelle Bilder im Punkte $B$. Fasst man die Aufgabe dahin, dass nur an der äussern Begrenzung der concentrischen Schalen Reflexion der von $A$ auffallenden Lichtstrahlen stattfindet, so genügen nur diejenigen Punkte der Curve, die innerhalb des Dreiecks $ABC$ liegen. Alle Punkte, deren Ordinaten $y$ grösser als $\eta$ oder für welche $y$ negativ ist, geben nur dann reelle Bilder in $B$, wenn die Reflexion an der innern Begrenzung der concentrischen Schalen stattfindet. Alle übrigen Punkte geben kein reelles Bild im Punkte $B$. Für alle diese Punkte gehen die reflectirten Strahlen nur rückwärts verlängert durch $B$. Construirt man die der Gleichung 6) entsprechende Curve, indem man für die Werte $\xi\eta\zeta$ die Verhältnisse

$$\xi=4\,; \quad \eta=10\,; \quad \zeta=10 \tag{15}$$

annimmt, so erhält man eine Curve von der Form der Fig. 2.

Will man die durch Gleichung 6) gegebene Curve auf ihre unendlich entfernten Punkte und Asymptoten untersuchen, so bringe man Gleichung 6) auf Polarcoordinaten, indem man

$$x=r.\cos\varphi$$
$$y=r.\sin\varphi$$

setzt. Alsdann erhält man eine Curve wieder vom dritten Grade für $r$ und $\varphi$.

Digitized by Google

Alle Geraden, welche die Curve in einem unendlich entfernten Punkte schneiden, sind unter einander parallel. Die Richtung dieser Geraden erhält man, wenn man die Gleichung der Curve durch Polarcoordinaten ausgedrückt, nach fallenden Potenzen von $r$ ordnet, darauf durch die höchste Potenz durchdividirt und hierauf $r=\infty$ setzt.

Führt man diese Manipulationen aus, so erhält man zur Bestimmung von $\varphi$ die Gleichung

$$2\eta\cos^3\varphi+(\zeta-2\xi)\sin^3\varphi+(\zeta-2\xi)\cos^2\varphi\sin\varphi+2\eta\sin^2\varphi\cos\varphi=0$$

oder auch

$$(\zeta-2\xi)\operatorname{tg}^3\varphi+(\zeta-2\xi)\operatorname{tg}\varphi+2\eta\operatorname{tg}^2\varphi+2\eta=0 \quad \text{oder}$$

16) $$\operatorname{tg}^3\varphi+\frac{2\eta}{\zeta-2\xi}\operatorname{tg}^2\varphi+\operatorname{tg}\varphi+\frac{2\eta}{(\zeta-2\xi)}=0$$

oder $\operatorname{tg}\varphi=z$ und $\frac{2\eta}{\zeta-2\zeta}$ der Kürze halber durch $G$ bezeichnet

$$z^3+G.z^2+z+G=0.$$

Dieser Gleichung genügt der Wert $-G$ für $z$.

Dividirt man, um die obigen Werte zu erhalten, die Gleichung durch $z+G$, so erhält man die Gleichung

$$z^2+1=0 \quad \text{oder} \quad z=\pm i.$$

Also hat die vorliegende Gleichung nur einen unendlich entfernten Punkt, die übrigen zwei sind imaginär. Die Richtung der Geraden, welche die Curve in dem unendlich entfernten Punkte schneiden, ist bestimmt durch

17) $$z=-G \quad \text{oder} \quad \operatorname{tg}\varphi=-\frac{2\eta}{\zeta-2\xi}.$$

Führt man die Werte aus Gleichung 15) ein, so erhält man

$$\varphi=95^0\,42'\,38''.$$

Um die Gleichung der Tangente im unendlich entfernten Punkte der Curve zu bestimmen, ist erst die allgemeine Gleichung der Tangente aufzustellen.

Die Gleichung der Tangente hat die Form

$$Y-y=\frac{dy}{dx}(X-x)$$

wo $XY$ die laufenden Coordinaten der Tangente und $xy$ die Coordinaten der vorliegenden Curve sind.

Ist $F(xy) = 0$ die Gleichung der Curve, und versteht man unter $F'(x)$ und $F'(y)$ die partiellen Ableitungen, so hat die Tangentengleichung die Form

$$Y - y = -\frac{F'(x)}{F'(y)}(X - x) \quad \text{oder}$$

$$YF'(y) + XF'(x) = yF'(y) + xF'(x)$$

Hat man aber eine homogene Function vom $n$. Grade, so ist

$$yF'(y) + xF'(x) = nF(xy).$$

Dasselbe findet auch statt, wenn die Function nicht mehr homogen ist, denn alsdann kann man die vorliegende Gleichung als Summe homogener Functionen auffassen und es ist dann

18) $$F(xy) = f_n(xy) + f_{n-1}(xy) \ldots f_1(xy) + f_0(xy) = 0$$

wo eben $f_{n-p}(xy)$ die Summe der in der vorliegenden Gleichung vorkommenden Glieder der $n-p$. Ordnung ist.

Also ist dann

$$yF'(y) + xF'(x) = nf_n(xy) + (n-1)f_{n-1}(xy) + \ldots 1.f_1(xy)$$

Aus Gleichung 18) ist aber

$$f_n(xy) = -(f_{n-1}(xy) + \ldots f_1(xy) + f_0(xy))$$

Oder auch

$$yF'(y) + xF'(x) = -[1f_{n-1}(xy) + 2f_{n-2}(xy) \ldots (n-1)f_1(xy) + nf_0(xy)]$$

gibt

$$YF'(y) + XF'(x) + f_{n-1}(xy) + 2f_{n-2}(xy) \ldots + (n-1)f_1(xy) + nf_0(xy) = 0$$

dieses ist dann die allgemeine Tangentengleichung für irgend eine Curve.

In unserm vorliegenden Falle ist $n = 3$ und das Glied $f_0(xy)$ fällt fort, da in Gleichung 6) kein absolutes Glied vorkommt.

Bestimmt man die Werte $F'(x)$, $F'(y) : f_2(xy) : f_1(xy)$ aus Gleichung 6) und setzt die so erhaltenen Werte oben ein, so erhält man als Tangentengleichung der Curve die Gleichung:

19) $$Y[3y^2(\zeta - 2\xi) + x^2(\zeta - 2\xi) + 4xy\eta + 2x(\xi^2 - \eta^2) + 4y\eta(\xi - \zeta) - \zeta(\xi^2 - \eta^2)]$$
$$+ X[6x^2\eta + 2xy(\zeta - 2\xi) + 2y^2\eta + 2y(\xi^2 - \eta^2) - 4x\eta(\xi + \zeta) + 2\zeta\xi\eta]$$
$$+ 2xy(\xi^2 - \eta^2) - 2x^2\eta(\xi + \zeta) + 2y^2\eta(\xi - \zeta) + 4x\zeta\xi\eta - 2x\zeta(\xi^2 - \eta^2) = 0$$

Um nun die Tangente für den unendlich entfernten Punkt zu erhalten, hat man wieder Polarcoordinaten einzuführen, die Gleichung



Digitized by Google

nach Potenzen von $r$ zu ordnen, darauf durch dio höchste Potenz von $r$ durchzudividiren und hierauf $r = \infty$ zu setzen. Führt man diese Manipulationen durch und dividirt noch durch $\cos^2\varphi$ durch, so erhält man

$$20)\quad Y[3(\zeta-2\xi)\mathrm{tg}^2\varphi+4\eta\,\mathrm{tg}\varphi+(\zeta-2\xi)]+X[2\eta\,\mathrm{tg}^2\varphi+2(\zeta-2\xi)\mathrm{tg}\varphi+6\eta] \\ +2\eta(\xi-\zeta)\mathrm{tg}^2\varphi+2(\xi^2-\eta^2)\mathrm{tg}\varphi-2\eta(\xi+\zeta)=0$$

als Gleichung der Tangente für den unendlich entfernten Punkt.

Den Wert von $\mathrm{tg}\,\varphi$ kennt man nun aus Gleichung 17).

Setzt man diesen Wert ein, so erhält man, nachdem man die entsprechenden Glieder zusammenfasst

$$21)\quad Y\left[\frac{4\eta^2}{\zeta-2\xi}+(\zeta-2\xi)\right]+X\left[2\eta+\frac{8\eta^3}{(\zeta-2\xi)^2}\right]-4\eta\frac{\xi^2-\eta^2}{\zeta-2\xi} \\ -2\eta(\xi+\zeta)+8\eta^3\frac{\xi-\zeta}{(\zeta-2\xi)^2}=0$$

als Gleichung der Tangente im unendlich entfernten Punkte.

Es ist diese Gerade bestimmt, indem man ihre Schnittpunkte mit der $x$ und $y$ Achse bestimmt, indem man das eine mal $Y = 0$ *und* sodann $X = 0$ setzt.

Führt man die Werte aus Gleichung 15) ein, so erhält man

$$101\,Y + 1010\,X + 5300 = 0$$

oder für $Y = 0$ ist $X = 5.248$ und
für $X = 0$ ist $Y = 52.48$

welches dem Werte aus 17) $\mathrm{tg}\,\varphi = -10$ entspricht.

Aus Gleichung 19) kann man nun gleich die Werte bestimmter Tangenten herleiten. Dividirt man mit dem Klammerwert von $Y$ durch, so erhält man in dem Quotienten von $X$ den Wert der negativen Tangente des Winkels, den in Rede stehende Gerade als Curventangente mit der $Y$ Achse bildet. Um diejenigen Punkte der Linie zu finden, deren Tangenten der $X$ resp. $Y$ Achse parallel sind, hat man dann diesen Quotienten $= 0$ resp. $= \infty$ zu setzen und erhält dann eine Gleichung vom zweiten Grade zwischen $x$ und $y$, deren Werte auch der Gleichung 6) genügen müssen, also ist somit $x$ und $y$ bestimmt.

So erhält man aus Gleichung 15) für die Punkte der Curve, deren Tangenten parallel zur $X$ Achse sind, die Coordinaten

$$x = 4.3 \quad \text{und} \quad y = 10.028$$

und

$$x = 2.3 \quad „ \quad y = -1.099$$

Die Gleichung 6) wird erfüllt, wenn man $x = 0$ und $y = 0$ setzt, also ist der Ursprung oder $A$ ein Punkt der Curve. Ebenso wird die Gleichung 6) erfüllt durch die Werte $x = \xi$; $y = \eta$ und $x = E$ und $y = 0$, also sind auch $C$ und $B$ Punkte der Curve.

Es soll nun die vorliegende Curve auf Doppelpunkte untersucht werden.

Ist ein Doppelpunkt vorhanden, so müssen durch diesen Punkt sich zwei Tangenten an die Curve ziehen lassen, also muss die Gleichung der Tangente für den in Rede stehenden Punkt vom zweiten Grade sein.

Für irgend einen Punkt der Curve ist der Winkel den die Tangente für diesen Punkt mit der $x$ Achse bildet, bestimmt durch

$$\operatorname{tg} \tau = \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{F'(x)}{F'(y)}.$$

Damit ein Doppelpunkt vorhanden ist, muss die rechte Seite der Gleichung die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ annehmen. Ist dies der Fall, so erhält man zur Bestimmung der Tangente in dem fraglichen Punkte die Gleichung

$$F_{yy}''(xy) \operatorname{tg}^2 \tau + 2 F_{xy}''(xy) \operatorname{tg} \tau + F_{xx}''(xy) = 0.$$

Oder wenn man die Monge'schen Bezeichnungen einführt

22) $$\operatorname{tg} \tau = -\frac{s}{t} \pm \sqrt{\frac{s^2}{t^2} - \frac{rt}{t^2}} \quad \text{oder} \quad \operatorname{tg} \tau = \frac{-s \pm \sqrt{s^2 - rt}}{t}$$

wo $s$ die 2. partielle Ableitung erst nach $x$ und dann nach $y$ von $F(xy) = 0$
$t$ „ „ „ „ „ „ $y$ . . . . . . . $y$ „ „
$r$ „ „ „ „ „ „ $x$ . . . . . . . $x$ „ „ ist.

Also ein Doppelpunkt muss so beschaffen sein, dass seine Coordinaten einmal der Gleichung 6) genügen; sodann müssen dieselben auch die ersten partiellen Ableitungen der Gleichung 6) einzeln zu 0 machen.

Die Klammerwerte von $Y$ und $X$ aus Gl. 19) sind nun nichts weiter als die partiellen Ableitungen nach $y$ und $x$. Es werden diese Werte zu 0 für

23) $$x = \xi \quad \text{und} \quad y = \eta.$$

Also ist [illegible] Punkt $C$ ein Doppelpunkt der Curve. Da die durch Gleichung [illegible] bene Cur[illegible] vom dritten Grade ist, so kann sie nur

einen Doppelpnnkt haben; denn hätte die Curve 2 Doppelpnnkte, so würde eine Gerade durch diese 2 Pnnkte gelegt, die Cnrve in 4 Punkten schneiden, da ja die Doppelpunkte doppelt gezählt sind, jedoch eino Gerade kann eine Cnrve dritter Ordnnng höchstens in 3 Punkten schneiden.

Um nun $\operatorname{tg}\tau$ zu bestimmen, ist in nnserm Falle

$$s = 2x(\zeta-2\xi)+4y\eta+2(\xi^2-\eta^2)$$
$$r = 12xy+2y(\zeta-2\xi)-4\eta(\zeta+\xi)$$
$$t = 6y(\zeta-2\xi)+4xy+4y(\xi-\zeta)$$

Nach 23) hat der Doppelpnnkt die Coordinaten $x=\xi$; $y=\eta$. Setzt man dieso Werte ein, so erhält man

$$s = 2(\eta^2+\xi\zeta-\xi^2)$$
$$r = -2\eta(\zeta-2\xi)$$
$$t = 2\eta(\zeta-2\xi).$$

Setzt man diese Werte in Gleichung 22) ein, so erhält man

$$24)\quad \operatorname{tg}\tau = \frac{-(\eta^2+\xi\zeta-\xi^2)\pm\sqrt{(\eta^2+\xi\zeta-\xi^2)^2+\eta^2(\zeta-2\xi)^2}}{\eta(\zeta-2\xi)}$$

Unter Berücksichtigung des speciellen Falles ans Gleichnng 16) ist dann

$$\tau = 4^0\,34'\,26'' \quad \text{nnd} \quad \tau = 94^0\,34'\,52''.$$

Kennt man nun den Radius der reflectirenden Kugel, so sollen die Coordinaten der spiegelnden Pnnkte $P$ bestimmt werden. Die Kngel wird dnrch die Ebene, die durch $A$ nnd $B$ und den Mittelpunkt $C$ der Kngel geht, in einem grössten Kreise geschnitten, dessen Gleichung $k=0$ ist.

Es sind dann $x$ und $y$ Fnnctionen des Radius $R$ der Kngel nnd der Coordinaten $\xi$ nnd $\eta$ des Mittelpunktes $C$. Es müssen nnn die Punkte $P$, einmal auf der Curve durch Gleichnng 6) gegeben, sodann anf dem Kreise $K$ liegen. Beide Curven schneiden sich höchstens in 6 Punkten. Ans beiden Gleichungen kann man $x$ und $y$ dnrch $R\xi\eta$ bestimmen und erhält dann für $x$ nnd $y$ allgemein eine Gleichnng vom 6. Grade.

Einfacher kommt man zn einem Resultate auf folgende Weise.

Eine Cnrve dritter Ordnung wird von einer Geraden in höchstens 3 Pnnkten geschnitten. Hat die Cnrve einen Doppelpnnkt nnd man legt durch diesen Gerade, so können diese die Cnrve ausserdem höchstens noch in einem Pnnkte schneiden. Im vorliegenden Falle

fällt nun der Doppelpunkt mit dem Centrum der Kugel zusammen. Also länft die Aufgabe darauf hinaus, diejenigen Geraden zu bestimmen, welche die Curve Gl. 6) in gleichen Entfernnngen $R$ vom Pnnkte $C$ ans schneiden.

Bildet eine Gerade, die durch den Punkt $\xi\eta$ geht, mit der $x$ Achse den Winkel $\varphi$, so sind die Coordinaten eines Pnnktes $P$ dieser Geraden, welcher um $R$ von $C$ entfernt ist, bestimmt dnrch

25)
$$x = \xi - R\cos\varphi$$
$$y = \eta - R\sin\varphi.$$

Damit der Punkt $P$ ein Pnnkt der Curve ist, müssen seine Coordinaten anch der Gleichnng der Curve genügen. Setzt man die Werte von 25) in Gleichnng 6) ein nnd führt die Mnltiplication ans, so zeigt sich, dass einmal die Snmme der constanten Glieder $= 0$ wird, sodann werden auch die Cofficienten von $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ $=0$. Führt man die Werte nach Potenzen der cos und sin von $\varphi$ zusammen, so erhält man die Gleichung:

$$2\eta R^3\cos^3\varphi + R^3(\zeta-2\xi)\sin^3\varphi + R^3(\zeta-2\xi)\cos^2\varphi\sin\varphi + 2R^3\eta\sin^2\varphi\cos\varphi$$
$$+[2R^2\xi\eta - \zeta R^2\eta]\sin^2\varphi + [R^2\eta\zeta - 2\xi\eta R^2)\cos^2\varphi$$
$$+[2R^2\xi^2 - 2R^2\xi\zeta - 2R^2\eta^2]\sin\varphi\cos\varphi = 0$$

oder durch $R^2\cos^3\varphi$ dnrchdividirt

$$\mathrm{tg}^3\varphi\, R(\zeta-2\xi) + \mathrm{tg}^2\varphi\, 2R\eta + \mathrm{tg}\,\varphi\, R(\zeta-2\xi) + 2\eta R$$
$$+ \frac{1}{\cos\varphi}[\mathrm{tg}^2\varphi\,(2\xi\eta - \zeta\eta) + \mathrm{tg}\,\varphi\, 2(\xi^2 - \xi\zeta - \eta^2) + \eta\zeta - 2\xi\eta] = 0.$$

Setzt man der Abkürzung wegen

$$R(\zeta-2\xi) = A;\quad 2(\eta^2+\xi\zeta-\xi^2) = C$$
$$R\,2\eta \quad = B;$$

so entsteht

$$A\,\mathrm{tg}^3\varphi + B\,\mathrm{tg}^2\varphi + A\,\mathrm{tg}\,\varphi + B = \frac{1}{\cos\varphi}\left[\frac{\eta A}{R}\mathrm{tg}^2\varphi - C.\mathrm{tg}\,\varphi - \eta\frac{A}{R}\right]$$

und

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\varphi}}$$

gibt

$$(1+\mathrm{tg}^2\varphi)[A\,\mathrm{tg}\,\varphi + B] = \sqrt{1+\mathrm{tg}^2\varphi}\left[\frac{\eta A}{R}\mathrm{tg}^2\varphi - C.\mathrm{tg}\,\varphi - \frac{\eta A}{R}\right]$$

durch $\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\varphi}$ durchdividirt gibt

$$\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\varphi}\,[A\,\mathrm{tg}\,\varphi + B] = \frac{\eta A}{R}\mathrm{tg}^2\varphi - C\mathrm{tg}\,\varphi - \frac{\eta A}{R}$$

Es genügt der Gleichuug also der Wert

$$\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\varphi} = 0 \quad \text{oder} \quad \mathrm{tg}\,\varphi = \pm i$$

folglich sind 2 der 6 Schnittpunkte imaginär und es verbleiben noch 4 Schnittpnnkte.

Formt man dann die obige Gleichnng weiter um, so erhält man für $\mathrm{tg}\,\varphi$ die Gleichnng

$$26)\quad \mathrm{tg}^4\varphi A^2\left(1-\frac{\eta^2}{R^2}\right)+\mathrm{tg}^3\varphi\, 2A\left(B+\frac{\eta C}{R}\right)$$

$$+\mathrm{tg}^2\varphi\left(B^2-C^2+A^2\left[1+\frac{2\eta^2}{R^2}\right]\right)+\mathrm{tg}\,\varphi\, 2A\left(B-\frac{C\eta}{R}\right)+B^2-\frac{\eta^2A^2}{R^2}=0$$

welche Gleichnng für $\mathrm{tg}\,\varphi$ noch 4 Werte liefert.

Diese Gleichung weiter zu verfolgen, ist in diesem allgemeinen Falle nicht ratsam, da bei bekanntem $R\xi\eta$ die Glieder sich in einzelne absolute Werte zusammenfassen lassen und dann für die specielle Auflösnng der Gleichnng 26) rascher znm Ziele führen.

Kennt man dann die Werte für $\mathrm{tg}\,\varphi$, so kennt man auch $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ nnd kann dann mit Hülfe von Gleichung 25) anch $x$ und $y$ bestimmen.

Es ist aber dann

$$27)\quad \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{y}{x};\quad \mathrm{tg}\,\alpha' = \frac{y}{x-\zeta} \quad \text{oder anch} \quad \mathrm{tg}\,\alpha' = \mathrm{tg}\,\alpha\frac{x}{x-\zeta}.$$

Ist $x = \frac{\zeta}{2}$ oder zerfällt die Gleichung 6) in die Gerade $x = \frac{\zeta}{2}$ nnd den Kreis, so wird

$$\mathrm{tg}\,\alpha' = -\,\mathrm{tg}\,\alpha,$$

wie ja sofort einleuchtet.

Würde man Gleichung 26) allgemein auflösen, so würde man erhalten

$$\mathrm{tg}\,\varphi = f(R\xi\eta\zeta),$$

also auch $x$ und $x$ in Fnnction von $R\xi\eta\zeta$, also anch

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \varphi(R\xi\eta\zeta) \quad \text{nnd} \quad \mathrm{tg}\,\alpha' = \psi(R\xi\eta\zeta)$$

alsdann könnte man die Aenderung von $\alpha$ nnd $\alpha'$ direct bestimmen für eine gegebene Aendernng von $R$. Oder auch umgekehrt die Aenderung bestimmen, die $R$ erfährt für eine beobachtete Aenderung der Winkel $\alpha$ nnd $\alpha'$.

Hiermit wäre für die gemachte Annahme, dass die Lichttrajectorien gerade Linien seien, die gestellte Aufgabe gelöst.

Um den beobachteten Unterschied der Zenithdistanz des Hauptbildes und Nebenbildes in die Rechnung einführen zu können, reicht obige Durchführung, welcher die Annahme einer geradlinigen Fortbewegung des Lichtes zu Grunde liegt, nicht aus. Man weiss vielmehr, dass die Bahn des Lichtstrahls beim Durchgange durch die Atmosphäre eine krumme Linie ist, bestimmt durch die Constitution der Atmosphäre. Also abhängig von Druck und Temperatur und von der gesetzmässigen Aenderung dieser Grössen mit zunehmender Höhe. Würde nun die Gleichung der Luftcurve bekannt sein, so wäre auch die Gleichung der Temperatur für einen beliebigen Punkt dieser Curve gegeben, und unter der Annahme, dass die Spiegelung auf einer Kugel statt hatte, liesse sich der Ort der spiegelnden Punkte nach den beiden ersten Verfahren wieder herleiten. Das dritte Verfahren ist ohne Weiteres nicht anzuwenden. Denn es liegen die einzelnen $P$ wol noch auf Ellipsen, für welche die Normalen in $P$ durch den gemeinsamen Punkt $C$ gehen, aber die einzelnen Ellipsen haben verschiedene Excentricität. Es werden die Brennpunkte dieser Ellipsen erhalten, wenn man die Tangenten, gezogen an die Lichtcurven im Punkte $P$, verlängert, bis sie die Verbindungslinie von $A$ und $B$ schneiden.

Die Hauptschwierigkeit besteht eben darin, die Gleichung der Lichtcurve aus den jedesmaligen meteorologischen Angaben zu bestimmen. Ist dies geschehen, so könnte die Beobachtung des Winkels zwischen Hauptbild und Nebenbild dazu dienen, dieses aufgestellte Refractionsgesetz zu controliren.

VIII.

# Ueber eine Verallgemeinerung der Gauss'schen Methode der mechanischen Quadratur.

Von

**F. August** in Berlin.

---

Die von Gauss (Comm. Gotting. T. III.) gegebene Methode der mechanischen Quadratur, welche später von Jacobi (Crelle J. Bd. I. 301 bis 308.) in sehr eleganter Weise begründet ist, geht von der Entwickelung der zu integrirenden Function in eine nach den natürlichen Potenzen der Variablen fortschreitende Reihe aus. Hierin liegt eine gewisse Beschränkung, da man nicht im Stande ist, den besonderen Charakter der Function irgend wie bei der Methode zu berücksichtigen, selbst wenn er sich in der Reihenentwickelung durch das Fehlen gewisser Glieder bemerklich macht. Es ist aber jene Methode mit gewissen Modificationen auch auf den Fall zu übertragen, wo die zu integrirende Function eine Potenzreihe ist, bei welcher die Exponenten eine arithmetische Reihe bilden, ohne dass es nötig ist, dass dieselben die natürlichen, oder auch nur dass sie ganze Zahlen seien; nur müssen selbstverständlich die Integrale aller Glieder der Reihe endlich sein, und hierzu ist, wenn man die Null als untere Integrationsgrenze wählt, notwendig und hinreichend, dass alle Exponenten grösser als —1 sind.

Da diese Erweiterung für die mechanische Quadratur mitunter zu gewissen Vereinfachungen führt und wenigstens in gewissen, besonders wichtigen Fällen den Charakter der zu integrirenden Function berücksichtigt, und da sie auch in anderer Hinsicht einiges Interesse hat, so will ich dieselbe hier besprechen, und zwar will ich zunächst

die Jacobi'sche Methode in der angedeuteten Weise verallgemeinern und dann das Problem in anderer Weise lösen. Durch die Vergleichung beider Methoden ergiebt sich eine bemerkenswerte Entwickelung einer gewissen Determinante. Schliesslich will ich einige Anwendungen der erweiterten Methode andeuten. Bei dem ersten Teile habe ich es für nötig gehalten, auch solche Teile der Jacobischen Arbeit, die keiner Modification bedürfen, zu reproduciren, um das Verständniss nicht zu erschweren, und da ich nicht ganz dieselben Bezeichnungen beibehalten habe. Ich bemerke ausdrücklich, dass in diesem Teile alles, was nicht zum Zwecke der angedeuteten Erweiterung dient, im Wesentlichen der Jacobi'schen Entwickelung nachgebildet ist.

## Verallgemeinerung der Jacobi'schen Entwickelung.

Sei

I) $$F(x) = a_1 x^{\mu-1} + a_2 x^{\mu-1+\delta} + a_3 x^{\mu-1+2\delta} + \ldots,$$

wo $\mu$ und $\delta$ positive sonst ganz beliebige Constante sind, eine durch eine endliche oder in dem zu betrachtenden Integrationsgebiet mit Ausschluss des Wertes $x = 0$ convergente Reihe dargestellte Function von $x$. Es handelt sich um das Integral

$$\int_0^h F(x)\,dx.$$

Setzt man

II) $$x = h\xi^{\frac{1}{\delta}}, \quad \frac{\mu}{\delta} = \varepsilon, \quad a_i h_i^{(i-1)\delta} = \alpha_i (i = 1, 2, 3, \ldots)$$

so wird

III) $$F(x) = h^{\mu-1}\xi^{\varepsilon-\frac{1}{\delta}}(\alpha_1 + \alpha_2\xi + \alpha_3\xi^2 + \ldots) = h^{\mu-1}\xi^{\varepsilon-\frac{1}{\delta}}f(\xi)$$

$$dx = \frac{1}{\delta}h\xi^{\frac{1}{\delta}-1}d\xi,$$

also

IV) $$\int_0^h F(x)dx = \frac{h^\mu}{\delta}J,$$

wo

V) $$J = \int_0^1 \xi^{\varepsilon-1}(\alpha_1 + \alpha_2\xi + \alpha_3\xi^2 + \ldots).$$

Giebt man nun dem Argument $x$ $n$ verschiedene Werte $x_1 x_2 \ldots x_n$, setzt entsprechend II) $x_i = h\xi_i^{\frac{1}{\delta}}$ und bildet



Digitized by Google

VI) $$\varphi(\xi) = (\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2) \ldots (\xi - \xi_n),$$

so ist

VII) $$\frac{f(\xi)}{\varphi(\xi)} = \frac{f(\xi_1)}{\varphi'(\xi_1)} \cdot \frac{1}{\xi - \xi_1} + \frac{f(\xi_2)}{\varphi'(\xi_2)} \cdot \frac{1}{\xi - \xi_2} + \ldots \frac{f(\xi_n)}{\varphi'(\xi_n)} \cdot \frac{1}{\xi - \xi_n} + V,$$

wo $V$ eine für alle betrachteten Argnmente convergente, nach einfachen Potenzen von $\xi$ fortschreitende Reihe ist.

Entwickelt man jeden der Partialbrüche nach fallenden Potenzen von $\xi$, also z. B.

$$\frac{f(\xi_1)}{\varphi'(\xi_1)} \cdot \frac{1}{\xi - \xi_1} = \frac{f(\xi_1)}{\varphi'(\xi_1)} [\xi^{-1} + \xi_1 \xi^{-2} + \xi_1^2 \xi^{-3} + \ldots],$$

nnd nennt die Snmme dieser Partialbrüche $G$, so ist

$$\frac{f(\xi)}{\varphi(\xi)} = V + G,$$

nnd es enthält $V$ die Glieder mit positiven, $U$ die Glieder mit negativen Exponenten.

Dieselbe Entwickelnng erhält man auch, indem man $\frac{1}{\varphi(\xi)}$ nach fallenden Potenzen entwickelt nnd diese Entwickelung mit $f(\xi)$ multiplicirt. Hierdurch kann man $V$ darstellen. Setzt man

VIII) $$\frac{1}{\varphi(\xi)} = A_1 \xi^{-k} + A_2 \xi^{-(k+1)} + A_3 \xi^{-(k+2)} + \ldots,$$

eine Reihe, die bekanntlich recurrirend ist, so dass die Coefficienten sich leicht bestimmen lassen, so ergiebt sich in der angedenteten Weise

IX) $$V = \alpha_{n+1} A_1 + \alpha_{n+2}(A_1 \xi + A_2) + \alpha_{n+3}(A_1 \xi^2 + A_2 \xi + A_3) + \ldots$$
$$+ \alpha_{2n}(A_1 \xi^{n-1} + A_2 \xi^{n-2} \ldots A_n) + \ldots$$

Man bemerkt dass, wenn die gegebene Fnnction eine e n d l i c h e Reihe ist, diese Entwickelung abbricht, und zwar, wenn die gegebene Fnnction $2n$ Glieder hat, mit dem zuletzt hingeschriebenen Gliede.

Nun ist

$$J = \sum_1^n \frac{f(\xi_i)}{\varphi'(\xi_i)} \int_0^1 \frac{\xi^{\varepsilon-1} \varphi(\xi)}{\xi - \xi_i} d\xi + \int_0^1 V \xi^{\varepsilon-1} \varphi(\xi) d\xi$$

also, da

$$f(\xi_i) = \frac{F(x_i)}{h^{\mu-1} \xi^{\varepsilon - \frac{1}{\partial}}}$$

$$\int_0^h F(x)\,dx = h \sum_1^n \frac{F(x_i)}{\delta\,\xi_i^{\,\frac{\mu-1}{\delta}}\,\varphi'(\xi_i)} \int_0^1 \frac{\xi^{\iota-1}\varphi(\xi)}{\xi-\xi_1}\,d\xi + \frac{h^\mu}{\delta}\int_0^1 V\,\xi^{\iota-1}\varphi(\xi)\,d\xi$$

Setzt man also:

X) $$\frac{1}{\delta\,\xi_i^{\,\frac{\mu-1}{\delta}}\,\varphi'(\xi_i)} \int_0^1 \frac{\xi^{\iota-1}\varphi(\xi)}{\xi-\xi_1}\,d\xi = c_i$$

und

XI) $$\frac{h^\mu}{\delta}\int_0^1 V\,\xi^{\iota-1}\varphi(\xi)\,d\xi = \varDelta,$$

so kommt

XII) $$\int_0^h F(x)\,dx = h\,\Sigma\, c_i F(x_i) + \varDelta.$$

Die Constanten $c_1, c_2 \ldots c_n$ sind nur von der Wahl der Argumente $x_i$ oder $\xi_i$, sowie von $\mu$ und $\delta$ abhängig, aber nicht von den Werten der Coefficienten $a$ oder $\alpha$ und ihr Wert kann, namentlich da $\varphi(\xi)$ durch $(\xi-\xi_i)$ teilbar ist, leicht ermittelt werden. Die Formel XII) giebt also die Darstellung des gesuchten Integrals durch eine Summe von $n$ Gliedern — deren jedes gleich dem Werte der Function $F(x)$ für ein bestimmtes Argument, multiplicirt mit der Grösse des Intervalls $h$ und einer von den Coefficienten $\alpha$ unabhängigen Constanten ist — plus dem Integral $\varDelta$.

Nun besteht die Newton'sche Methode der näherungsweisen Berechnung eines Integrals darin, dass man das Integral $\varDelta$ vernachlässigt, während in aller Strenge im Allgemeinen $\varDelta$ nur dann Null ist, wenn die gegebene Function $F(x)$ nur aus $n$ Gliedern besteht.

Es entsteht jetzt die Frage, ob man nicht durch eine besondere Wahl der Argumente $x_i$ oder $\xi_i$ die Genauigkeit möglichst vergrössern kann. Da es sich auch hierbei um eine allgemeine Methode handelt, bei der die besonderen Werte der $a$ nicht in Betracht kommen sollen, so kann man diesen Zweck erreichen, indem man die Bedingung stellt, dass der Fehler $\varDelta$ unabhängig von $a_{n+1}, a_{n+2} \ldots a_{2n}$ sei, dass also die Formel auch dann noch genau bleibe, wenn die Function aus $2n$ auf einander folgenden Gliedern besteht. Setzt man in die Formel für $\varDelta$ (XI) den Wert von $V$ aus IX) ein, so erkennt man, dass die gestellte Bedingung darauf hinauskommt, dass

$$\int_0^1 \xi^{\varepsilon-1}\varphi(\xi)\,d\xi = 0, \quad \int_0^1 \xi^{\varepsilon}\varphi(\xi)\,d\xi = 0,$$

$$\int_0^1 \xi^{\varepsilon+1}\varphi(\xi)\,d\xi = 0 \;\ldots \int_0^1 \xi^{\varepsilon+n-2}\varphi(\xi)\,d\xi = 0$$

wird, oder wenn man setzt

XIII) $$\xi^{\varepsilon-1}\varphi(\xi) = \psi(\xi),$$

dass

XIV) $$\int_0^1 \psi(\xi)\,d\xi = 0, \quad \int_0^1 \xi\psi(\xi)\,d\xi = 0,$$

$$\int_0^1 \xi^2\psi(\xi)\,d\xi = 0 \;\ldots \int_0^1 \xi^{n-1}\psi(\xi)\,d\xi = 0$$

Nun hat Jacobi durch wiederholte partielle Integration eine Formel gewonnen, welche für den vorliegenden Zweck so geschrieben werden kann:

XV) $$\int_0^\xi u v d\xi = u\int^{(1)} v d\xi - u'\int^{(2)} v d\xi^2 + u''\int^{(3)} v d\xi^3 - + \ldots$$

$$+ (-1)^m u^{(m)} \int^{(m+1)} v d\xi^{m+1} + (-1)^{m+1}\int_0^\xi u^{(m+1)}\int^{(m+1)} v d\xi^{m+1}.\,d\xi,$$

wo $u$ und $v$ Functionen von $\xi$ sind und das Zeichen $\int^{(k)} v d\xi^k$ das $k$fache Integral der Function $v$ zwischen 0 und $\xi$ nach $d\xi$ bedeutet; so dass z. B.

$$\int^{(3)} v d\xi^3 = \int_0^\xi\int_0^\xi\int_0^\xi v d\xi^3.$$

Setzt man in XV)

$$u = \xi^m, \quad v = \psi(\xi),$$

so erhält man bei ganzzahligem $m$

$$\int_0^\xi \xi^m\psi(\xi)d\xi = \xi^m\int^{(1)}\psi(\xi)d\xi - m\xi^{m-1}\int^{(2)}\psi(\xi)d\xi^2 + m(m-1)\int^{(3)}\psi(\xi)d\xi^3 - + \ldots$$

$$+ (-1)^m m! \int^{(m+1)}\psi(\xi)d\xi^m.$$

Setzt man hierin der Reihe nach $m = 1, 2, 3 \ldots (n-1)$ und nimmt zur oberen Grenze 1, so erhält man eine Reihe von Relationen, aus denen man leicht erkennt, dass die Gleichungen XIV) ersetzt werden können durch die Gleichungen

XVI)

$$\int^{(1)} \psi(\xi) d\xi = 0, \quad \int^{(2)} \psi(\xi) d\xi^2 = 0, \quad \int^{(3)} \psi(\xi) d\xi^3 = 0 \ldots \int^{(n)} \psi(\xi) d\xi^n = 0,$$

wenn nach Ausführung aller Integrationen $\xi = 1$ gesetzt wird.

Setzt man

$$\pi(\xi) = \int^{(n)} \psi(\xi) d\xi^n,$$

so muss

$$\pi(\xi), \quad \pi'(\xi), \quad \pi''(\xi) \ \ldots \ \pi^{(n-1)}(\xi)$$

für $\xi = 1$ verschwinden, und

$$\pi^{(n)}(\xi) = \psi(\xi) = \xi^{\varepsilon - 1}\varphi(\xi)$$

sein. Da alle Integrationen zur Berechnung von $\pi(\xi)$ zwischen den Grenzen 0 und $\xi$ anszuführen sind, so ist $\pi(\xi)$ darstellbar als Product von $\xi^{\varepsilon-1+n}$ und einer ganzen rationalen Function $n$ten Grades von $\xi$, und da für $\xi = 1$, $\pi(\xi)$ und die $(n-1)$ ersten Ableitungen von $\pi(\xi)$ verschwinden, muss $\pi(\xi)$ den Factor $(\xi - 1)^n$ enthalten. Also ist

$$\pi(\xi) = c\,\xi^{\varepsilon-1+n}(\xi - 1)^n,$$

wo $c$ eine Constante bedeutet; diese Constante bestimmt sich der Gleichung XIII) entsprechend so, dass der Coefficient des höchsten Gliedes in $\psi(\xi)$ gleich 1 ist, also

$$c = \frac{1}{(\varepsilon - 1 + 2n)(\varepsilon - 2 + 2n) \ldots (\varepsilon - 2)}$$

Mithin ist

$$\text{XVII)} \quad \psi(\xi) = \frac{1}{(\varepsilon - 1 + 2n)(\varepsilon - 2 + 2n) \ldots (\varepsilon - n)} \cdot \frac{d^n[\xi^{\varepsilon-1+n}(\xi - 1)^n]}{d\xi^n}$$

und

$$\text{XVIII)} \quad \varphi(\xi) = \frac{\xi^{1-\varepsilon}}{(\varepsilon - 1 + 2n)(\varepsilon - 2 + 2n) \ldots (\varepsilon + n)} \cdot \frac{d^n \xi^{\varepsilon-1+n}(\xi - 1)}{d\xi^n}$$

oder entwickelt:

XVIII′)

$$\varphi(\xi) = \xi^n - \frac{\varepsilon + n - 1}{\varepsilon + 2n - 1}\binom{n}{1}\xi^{n-1} + \frac{(\varepsilon+n-1)(\varepsilon+n-2)}{(\varepsilon+2n-1)(\varepsilon+2n-2)}\binom{n}{2}\xi^{n-2} - + \ldots$$

$$+ (-1)^n \frac{(\varepsilon+n-1)(\varepsilon+n-2) \ldots \varepsilon}{(\varepsilon+2n-1)(\varepsilon+2n-2) \ldots (\varepsilon+n)}\binom{n}{n}.$$

Setzt man also

$$\varphi(\xi) = 0,$$

so erhält man eine Gleichung $n$ten Grades zur Bestimmung derjenigen $n$ Werte $\xi$, für welche die Newton'sche Näherung im Allgemeinen die grösste Genauigkeit erwarten lässt.

Die Frage nach der Realität und Grösse dieser Wurzeln lässt sich folgendermassen behandeln.

Da $\pi(\xi)$ für $\xi = 0$ von der Ordnung $(\varepsilon - 1 + n)$, für $\xi = 1$ von der Ordnung $n$ verschwindet, so muss $\pi'(\xi)$ für einen Wert zwischen 0 und 1 (der weder gleich Null noch gleich 1 ist) verschwinden und dabei sein Zeichen wechseln, und muss den Factor $\xi^{\varepsilon-2+n}(\xi-1)^{n-1}$ enthalten. Wenn $n-1$ nicht Null ist, ist auch $\varepsilon - 2 + n$ sicher positiv, und $\pi'(\xi)$ verschwindet auch für 0 und 1. Also muss $\pi''(\xi)$ für zwei verschiedene im Innern des Intervalls von 0 bis 1 liegende Werte verschwinden und beidemal sein Zeichen wechseln, und muss ausserdem den Factor $\xi^{\varepsilon-3+n}(\xi-1)^{n-2}$ enthalten, also auch für 0 und 1 verschwinden, wenn $n - 2 > 0$ ist. Daraus folgt, dass $\pi'''(\xi)$ für drei verschiedene im Innern des Intervalls liegende Werte mit Zeichenwechsel verschwindet und die Factoren $\xi^{\varepsilon-4+n}(\xi-1)^{n-3}$ enthält. Durch $n$malige Wiederholung dieses Schlusses findet man, dass $\psi(\xi) = \pi^{(n)}(\xi)$ für $n$ verschiedene zwischen 0 und 1 liegende Werte von $\xi$ verschwinden muss, dass es aber den Factor $(\xi - 1)$ nicht mehr enthält, und dass es teilbar ist durch $\xi^{\varepsilon-1}$, aber keine höhere Potenz von $\xi$, wenn in dem andern Factor nur positive Exponenten zugelassen werden; (es könnte demnach für $\xi = 0$ unendlich werden, nämlich wenn $\varepsilon < 1$ ist). Also verschwindet $\varphi(\xi) = \psi(\xi) \,.\, \xi^{1-\varepsilon}$ für dieselben $n$ Werte im Innern des Intervalls, wie $\psi(\xi)$, aber nicht für $\xi = 0$.

Die Gleichung $\varphi(\xi) = 0$ hat also lauter verschiedene reelle Wurzeln, deren Werte sämmtlich zwischen Null und Eins liegen.

Die entsprechenden Werte $x_1 x_2 \ldots x_n$, nämlich $h\xi_1^{\frac{1}{\vartheta}}$, $h\xi_2^{\frac{1}{\vartheta}} \ldots$ sind zwar im Allgemeinen vieldeutig, aber je einer der Werte für jedes dieser Argumente ist reell und positiv und liegt zwischen Null und $h$, die andern erhält man daraus durch Multiplication mit einer Einheitswurzel von der Form $e^{\frac{2k\pi i}{\vartheta}}$; hierdurch geht aber $F(x_i)$ über in $F(x_i)\, e^{\frac{2k\pi i}{\vartheta}(\mu-1)}$, und $c_i$ in $\dfrac{c_i}{e^{\frac{2k\pi i}{\vartheta}(\mu-1)}}$, so dass der Ausdruck $c_i F(x_i)$, auf den es allein ankommt, immer derselbe wird. Man darf deshalb, ohne die Allgemeinheit der Lösung zu beeinträchtigen, auch für die $x_i$ die $n$ verschiedenen reellen zwischen 0 und $h$ liegenden Werte

Digitized by Google

nehmen, welche durch die Gleichungen $x_i = h\,\xi_i^{\frac{1}{\delta}}$ bestimmt werden. Für den speciellen Fall $\delta = 1$, ebenso für $\delta = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ etc. tritt überhaupt keine Vieldeutigkeit auf.

Es handelt sich nun noch darnm, die Grösse des Fehlers $\varDelta$ zu berechnen.

Es ist nach XI)

$$\varDelta = \frac{h^\mu}{\delta} \int_0^1 V\psi(\xi)\,d\xi.$$

Benutzt man nun die Formel XV), indem man setzt $m = n-1$, $u = V$, $v = \psi(\xi)$, berücksichtigt man ferner, dass die $n$ ersten Integrale von $\psi$ für $\xi = 1$ verschwinden, und setzt für $\psi$ schliesslich seinen Wert aus XVII) ein, so kommt

$$\varDelta = \frac{h^\mu}{\delta} \cdot \frac{(-1)^n}{(\varepsilon+2n-1)(\varepsilon+2n-2)\ldots(\varepsilon+n)} \int_0^1 (\xi-1)^n \xi^{\varepsilon-1+n} \frac{d^n V}{d\xi^n}.$$

Setzt man ferner in Formel XV) $u = (\xi-1)^{m+1}$, so verschwinden $u, u' \ldots u^{(m)}$ für $\xi = 1$, also wird

$$\int_0^1 (\xi-1)^{m+1} v\,d\xi = (-1)^{m+1} \int_0^1 (m+1)!\,d\xi \int^{(m+1)} v\,d\xi^{m+1}$$

Wenn man nun für $m = (n-1)$, $v = \xi^{\varepsilon-1+n} \frac{d^n V}{d\xi^n}$ setzt, und die Gleichung mit $\frac{h^\mu}{\delta} \cdot \frac{1}{(\varepsilon+2n-1)(\varepsilon+2n-2)\ldots(\varepsilon+n)}$ multiplicirt, so erhält man

$$\varDelta = \frac{h^\mu}{\delta} \cdot \frac{n!}{(\varepsilon+2n-1)(\varepsilon+2n-2)\ldots(\varepsilon+n)} \int^{(n)} \xi^{\varepsilon-1+n} \frac{d^n V}{d\xi^n}\,d\xi^{n+1}{}_{(\xi=1)}$$

Nun folgt aus Formel IX)

$$\xi^{\varepsilon-1+n} \frac{d^n V}{d\xi^n} = n! \sum_{i=1,2,3\ldots} \alpha_{2n+i} \left[ \binom{n+i-1}{n} A_1 \xi^{\varepsilon-1+n+i-1} + \binom{n+i-2}{n} A_2 \xi^{\varepsilon-1+n+i-2} + \ldots + \binom{n}{n} A_i \xi^{\varepsilon-1+n} \right].$$

Dieser Ausdruck ist $n$mal nacheinander zwischen 0 und $\xi$ zu integriren, und schliesslich ist $\xi = 1$ zu setzen, um das in der Formel für $\varDelta$ enthaltene Integral zu erhalten. Man findet

$$\text{XIX)}\quad \Delta = \frac{h^\mu}{\delta}\cdot\frac{1}{\binom{\varepsilon-1+n}{n}}\cdot\frac{1}{n+1}\sum_{i=1,2,3\ldots}\alpha_{2n+i}\left[\frac{\binom{n+i-1}{n}}{\binom{\varepsilon-1+2n+i}{n+1}}A_1\right.$$

$$\left.+\frac{\binom{n+i-2}{n}}{\binom{\varepsilon-1+2n+i-1}{n+1}}A_2+\ldots+\frac{\binom{n}{n}}{\binom{\varepsilon-1+2n+1}{n+1}}A_i\right]$$

oder

$$\text{XIX}')\quad \Delta = \frac{h^{\mu+2n\delta}}{\delta}\cdot\frac{1}{\binom{\varepsilon-1+n}{n}}\frac{1}{n+1}\sum\alpha_{2n+i}h^{(i-1)\delta}\left[\frac{\binom{n+i-1}{n}}{\binom{\varepsilon-1+2n+i}{n+1}}A_1\right.$$

$$\left.+\frac{\binom{n+i-2}{n}}{\binom{\varepsilon-1+2n+i-1}{n+1}}A_2+\ldots\right]$$

Diese Summe erstreckt sich auf soviel Glieder, als in der Function $n$ mit Weglassung der $2n$ ersten auf einander folgenden enthalten sind.

Die Grössen $A$ sind, wie bereits bemerkt wurde, die Coefficienten der recurrirenden Reihe, welche man erhält, wenn man $\frac{1}{\varphi(\xi)}$ nach fallenden Potenzen von $\xi$ entwickelt. Es ergiebt sich also nach bekannten Methoden:

$$\text{XX)}\quad\begin{cases} A_1 = 1 \\ A_2 - \frac{\varepsilon+n-1}{\varepsilon+2n-1}\binom{n}{1}A_1 = 0 \\ A_3 - \frac{\varepsilon+n-1}{\varepsilon+2n-1}\binom{n}{1}A_2 + \frac{(\varepsilon+n-1)(\varepsilon+n-2)}{(\varepsilon+2n-1)(\varepsilon+2n-2)}\binom{n}{2}A_1 = 0 \\ \vdots \\ A_k - \frac{\varepsilon+n-1}{\varepsilon+2n-1}\binom{n}{1}A_{k-1} + \frac{(\varepsilon+n-1)(\varepsilon+n-2)}{(\varepsilon+2n-1)(\varepsilon+2n-2)}\binom{n}{2}A_{k-2} - + \ldots \\ \qquad + (-1)^n\frac{(\varepsilon+n-1)(\varepsilon+n-2)\ldots\varepsilon}{(\varepsilon+2n-1)(\varepsilon+2n-2)\ldots(\varepsilon+n)}\binom{n}{n}A_{k-n} = 0 \end{cases}$$

Die hieraus zu berechnenden Werte sind in XIX) einzusetzen um den Wert von $\Delta$ vollständig durch die gegebenen Grössen auszudrücken.

Dies ist die Verallgemeinerung der Jacobi'schen Entwickelung. Um die letztere daraus zu erhalten hat man nur $\mu = 1$, $\delta = 1$ also $\varepsilon - 1 = 0$ zu setzen, wodurch die Formeln einfacher werden. Zu bemerken ist noch, dass Jacobi die obere Grenze $h = 1$ gewählt hat, und dass der Ausdruck für $\Delta$ hier durch Benutzung der Binomialcoefficienten unwesentlich anders erscheint, als der entsprechende bei Jacobi.

## Andere Entwickelung.

Da die oben entwickelte Methode der mechanischen Quadratur ein genaues Resultat liefert, wenn die gegebene Function nur aus $2n$ auf einander folgenden Gliedern besteht, so kann man die Werte $x_i$ oder $\xi_i$ und $c_i$ auch auf andere Weise bestimmen. Man kann nämlich zunächst eine Function von $2n$ Gliedern betrachten, und für diese direct eine genaue Formel aufstellen, kann dann diese Formel als Näherungswert für den Fall benutzen, dass mehr Glieder vorhanden sind und die Grösse des Fehlers $\Delta$ für diesen Fall ermitteln. Dass dies auf dasselbe hinauskommt, wie die Jacobi'sche Methode, folgt aus dem Umstande, dass die $c_i$ und $x_i$ unabhängig von den Coefficienten $a_k$ sind, so dass es zu ihrer Bestimmung gestattet ist $a_{2n+1}$, $a_{2n+2}$ u. s. f. gleich Null zu setzen. Für den Fall einer gewöhnlichen Potenzreihe hat Herr Schellbach in seiner Abhandlung: Ueber mechanische Quadratur (Programm des Königlichen Friedrich Wilhelms-Gymnasiums, Berlin 1877.) diesen Weg eingeschlagen, er hat aber, seinem Zwecke entsprechend, die Lösung nicht für eine beliebige Gliederzahl durchgeführt, sondern sich auf die einfachen und praktisch wichtigen Fälle beschränkt, wo man zur Bestimmung der $x$ auf die Gleichungen vom zweiten oder dritten Grade geführt wird. Die allgemeine Lösung lässt sich aber auch auf diesem Wege vollständig durchführen und zwar ebenso verallgemeinert wie bei der vorigen Methode. Es ist nämlich

$$\int_0^h (a_1 x^{\mu-1} + a_2 x^{\mu-1+\delta} \ldots a_{2n} x^{\mu-1+(2n-1)\delta})\,dx = \int_0^h \Phi(x)\,dx$$

$$= \frac{a_1 h^\mu}{\mu} + \frac{a_2 h^{\mu+\delta}}{\mu+\delta} \ldots \frac{a_{2n} h^{\mu+(2n-1)\delta}}{\mu+(2n-1)\delta}.$$

Soll dies unabhängig von den Coefficienten gleich sein

$$h\left[c_1\Phi(x_1) + c_2\Phi(x_2) \ldots c_n\Phi(x_n)\right],$$

so müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

XXI)

$$
\begin{aligned}
&c_1x_1^{\mu-1} + c_2x_2^{\mu-1} + \dots + c_nx_n^{\mu-1} = \frac{h^{\mu-1}}{\mu}\\
&c_1x_1^{\mu-1+\delta} + c_2x_2^{\mu-1+\delta} + \dots + c_nx_n^{\mu-1+\delta} = \frac{h^{\mu-1+\delta}}{\mu+\delta}\\
&c_1x_1^{\mu-1+2\delta} + c_2x_2^{\mu-1+2\delta} + \dots + c_nx_n^{\mu-1+2\delta} = \frac{h^{\mu-1+2\delta}}{\mu+2\delta}\\
&\vdots\\
&c_1x_1^{\mu-1+(2n-1)\delta} + c_2x_2^{\mu-1+(2n-1)\delta} + \dots + c_nx_n^{\mu-1+(2n-1)\delta} = \frac{h^{\mu-1+2n\delta}}{\mu+2n\delta}
\end{aligned}
$$

Wir setzen wieder, wie oben,

$$x_i = h_i\xi_i^{\frac{1}{\delta}}, \quad \frac{\mu}{\delta} = \varepsilon,$$

und ausserdem

$$c_ix_i^{\mu-1} = \frac{h^{\mu-1}\gamma_i}{\delta}.$$

Dann gehen die Gleichungen XX) über in

$$
\text{XXII)}\quad \left\{
\begin{aligned}
&\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n = \frac{1}{\varepsilon}\\
&\gamma_1\xi_1 + \gamma_2\xi_2 + \dots + \gamma_n\xi_n = \frac{1}{\varepsilon+1}\\
&\gamma_1\xi_1^2 + \gamma_2\xi_2^2 + \dots + \gamma_n\xi_n^2 = \frac{1}{\varepsilon+2}\\
&\vdots\\
&\gamma_1\xi_1^{2n-1} + \gamma_2\xi_2^{2n-1} + \dots + \gamma_n\xi_n^{2n-1} = \frac{1}{\varepsilon+2n-1}
\end{aligned}
\right.
$$

Dies sind $2n$ Gleichungen zur Bestimmung der $2n$ Unbekannten $\gamma_i$ und $\xi_i$, aus denen sich dann auch die $c_i$ und $x_i$ bestimmen lassen.

Die Elimination kann man auf folgende Weise bewerkstelligen. Man eliminirt aus je $(n+1)$ auf einander folgenden der Gleichungen XXII) die $\gamma_i$; dadurch erhält man, da kein $\xi_i$ Null sein kann, die $n$ Gleichungen

$$
\text{XXIII)}\quad \begin{vmatrix}
1 & 1 & 1 & \dots & 1 & \frac{1}{\varepsilon+k}\\
\xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \dots & \xi_n & \frac{1}{\varepsilon+k+1}\\
\xi_1^2 & \xi_2^2 & \xi_3^2 & \dots & \xi_n^2 & \frac{1}{\varepsilon+k+2}\\
\vdots\\
\xi_1^n & \xi_2^n & \xi_3^n & \dots & \xi_n^n & \frac{1}{\varepsilon+k+n-1}
\end{vmatrix} = 0 \qquad (k=0,1,2,3\dots n-1)
$$

Die Gleichung $n$ten Grades, deren Wurzeln $\xi_1$ bis $\xi_n$ sind, kann geschrieben werden

$$\text{XXIV)} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \dots & \xi_n & \xi \\ \xi_1^2 & \xi_2^2 & \xi_3^2 & \dots & \xi_n^2 & \xi^2 \\ \vdots \\ \xi_1^n & \xi_2^n & \xi_3^n & \dots & \xi_n^n & \xi^n \end{vmatrix} = 0.$$

Entwickelt man die Determinanten auf der linken Seite der Gleichungen XXIII) und XXIV) nach den Elementen der letzten Spalte und nennt die Unterdeterminanten $R_0 R_1 \dots R_n$, so kommt

$$\begin{aligned} 1 R_0 + \xi\, R_1 + \xi^2\, R_2 + \dots \xi^n R_n &= 0 \\ \frac{1}{\varepsilon} R_0 + \frac{1}{\varepsilon+1} R_1 + \frac{1}{\varepsilon+2} R_2 + \dots \frac{1}{\varepsilon+n} R_n &= 0 \\ \frac{1}{\varepsilon+1} R_0 + \frac{1}{\varepsilon+2} R_1 + \frac{1}{\varepsilon+3} R_2 + \dots \frac{1}{\varepsilon+n+1} R_n &= 0 \\ \vdots \\ \frac{1}{\varepsilon+n-1} R_0 + \frac{1}{\varepsilon+n} R_1 + \frac{1}{\varepsilon+n+1} R_2 + \dots \frac{1}{\varepsilon+2n-1} R_n &= 0 \end{aligned}$$

woraus durch Elimination der $R$ folgt

$$\text{XXV)} \qquad P(\xi) = \begin{vmatrix} 1 & \xi & \xi^2 & \dots & \xi^n \\ \frac{1}{\varepsilon} & \frac{1}{\varepsilon+1} & \frac{1}{\varepsilon+2} & \dots & \frac{1}{\varepsilon+n} \\ \frac{1}{\varepsilon+1} & \frac{1}{\varepsilon+2} & \frac{1}{\varepsilon+3} & \dots & \frac{1}{\varepsilon+n+1} \\ \vdots \\ \frac{1}{\varepsilon+n-1} & \frac{1}{\varepsilon+n} & \frac{1}{\varepsilon+n+1} & \dots & \frac{1}{\varepsilon+2n-1} \end{vmatrix} = 0,$$

oder entwickelt

$$\text{XXV')} \qquad P(\xi) = p_0\xi^n + p_1\xi^{n-1} + p_2\xi^{n-2} + \dots p_{n-1}\xi + p_n = 0.$$

Dies ist eine Gleichung $n$ten Grades zur Bestimmung der $n$ Werte $\xi_1 \dots \xi_n$.

Zur Bestimmung der $\gamma_i$ kann man dann irgend $n$ der Gleichungen XXII) benutzen, die sämmtlich in Bezug auf die $\gamma_i$ linear sind.

Wenngleich diese Elimination schon sehr kurz ist, so kann man noch schneller zum Ziele kommen. Durch Benutzung der Theorie

der recurrirenden Reihen, welche ja auch in der Jacobi'schen Entwickelung angewendet werden. Sind nämlich $\xi_1 \ldots \xi_n$ $n$ verschiedene Werte, welche der Gleichung

$$\text{XXV}')\qquad P(\xi) = p_0\xi^n + p_1\xi^{n-1} + p_2\xi^{n-2} \ldots p_n = 0$$

genügen, und entwickelt man die Summe

$$\sum_1^n \frac{\gamma_i}{1-\frac{\xi_i}{\xi}}$$

nach fallenden Potenzen von $\xi$, indem man jedes Glied der Summe entwickelt und dann die Glieder addirt, so erhält man eine Reihe

$$B_0 + B_1\xi^{-1} + B_2\xi^{-2} \ldots$$

und es ist allgemein

$$\text{XXVI})\qquad B_k = \gamma_1\xi_1^k + \gamma_2\xi_2^k + \ldots + \gamma_n\xi_n^k$$

Bringt man aber vor der Entwickelung den Ausdruck $\sum_1^n \frac{\gamma_i}{1-\frac{\xi_i}{\gamma_i}}$ auf einen Nenner, welcher gleich $\frac{P(\xi)}{p_0\xi^n}$ wird, und entwickelt dann nach fallenden Potenzen von $\xi$, so erhält man dieselbe Reihe, welche recurrirend ist, und deren Coefficienten folgendem Gesetze unterworfen sind

$$\text{XXVII})\qquad p_0B_k + p_1B_{k-1} + p_2B_{k-2} + \ldots + p_nB_{k-n} = 0$$

wo $B_{-1}B_{-2} \ldots$ gleich Null sind.

Setzen wir nun für $\xi$ und $\gamma$ die Werte aus den Bedingungsgleichungen XXII) ein, so folgt aus XXVI)

$$B_0 = \frac{1}{\varepsilon},\quad B_1 = \frac{1}{\varepsilon+1} \ldots B_{2n-1} = \frac{1}{\varepsilon+2n-1}$$

also geben die Gleichungen XXVII), wenn man darin der Reihe nach $k = n,\ n+1, \ldots 2n-1$ setzt,

$$\text{XXVIII})\begin{cases} \frac{p_0}{\varepsilon+n} + \frac{p_1}{\varepsilon+n-1} + \frac{p_2}{\varepsilon+n-2} \cdots \frac{p_n}{\varepsilon} = 0 \\ \frac{p_0}{\varepsilon+n+1} + \frac{p_1}{\varepsilon+n} + \frac{p_2}{\varepsilon+n-1} \cdots \frac{p_n}{\varepsilon+1} = 0 \\ \vdots \\ \frac{p_0}{\varepsilon+2n-1} + \frac{p_1}{\varepsilon+2n-2} + \frac{p_2}{\varepsilon+2n-3} \cdots \frac{p}{\varepsilon+n-1} = 0 \end{cases}$$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen und aus XXV') die Coefficienten $p$, so erhält man wieder die Gleichung XXV).

Es ist nun die Realität der Wurzeln dieser Gleichung zu untersuchen.

Es ist

$$x^{\mu-1}P(\xi) = x^{\mu-1}P\left(\frac{x}{h}\right)^{\delta} = \vartheta(x)$$

eine Function von der Form $F(x)$, in welcher nur die $(n+1)$ ersten Glieder von Null verschieden sind, daher ist das Integral dieser Function zwischen Null und $h$ gleich $h\Sigma c_i\vartheta(x_i)$ und dieser Wert ist Null, weil $\vartheta(x_i) = x_i^{\mu-1}P(\xi_i)$ für jeden der $n$ Werte von $\xi_1$ bis $\xi_n$ verschwindet, also muss $\vartheta(x)$ im Innern des Intervalls von 0 bis $h$ mindestens einmal sein Zeichen wechseln, also muss $p(\xi)$ zwischen 0 und 1 eine Wurzel haben, sie sei gleich $\xi_1$.

Bildet man nun $\vartheta(x)[x^{\delta} - x_1^{\delta}]$, so erhält man wieder eine Function der Form $F(x)$, bei welcher nur die ersten $(n+2)$ Glieder von Null verschieden sind, deren Integral sich also auch nach der Formel XII) ohne den Rest $\varDelta$ berechnen lässt, und auch den Wert Null erhält.

Daraus folgt, dass die Function $(x^{\delta} - x_1^{\delta})\vartheta(x)$ im Innern des Intervalls von 0 bis $h$ einen Zeichenwechsel hat, der aber nicht bei $x_1$ liegt, weil in $(x^{\delta} - x_1^{\delta})\vartheta(x)$ der Factor $(x^{\delta} - x_1^{\delta})$ quadratisch vorkommt; er möge bei $x_2$ stattfinden.

Dann betrachten wir $(x^{\delta} - x_1^{\delta})(x^{\delta} - x_2^{\delta})\vartheta(x)$ und schliessen daraus, dass das Integral dieser Function zwischen 0 und $h$ den Wert Null hat, während die Function selbst bei $x_1$ und $x_2$ ihr Zeichen nicht wechselt, dass sie für einen dritten Wert $x_3$ zwischen 0 und $h$ verschwinden muss u. s. f. Dieser Schluss lässt sich so lange wiederholen, bis man auf die Function $(x^{\delta} - x_1^{\delta})(x^{\delta} - x_2^{\delta})\ldots(x^{\delta} - x_n^{\delta})\vartheta(x)$ kommt, diese aber enthält $(2n+1)$ Glieder, ihr Integral ist also nicht genau durch die Formel ohne den Rest $\varDelta$ ausdrückbar, und der Schluss kann nicht weiter wiederholt werden; man schliesst so, dass $\vartheta(x)$ für $n$ verschiedene zwischen 0 und $h$ gelegene Werte, also $P(\xi)$ für $n$ verschiedene zwischen 0 und 1 gelegene Werte verschwindet, dass also die Gleichung XXV) lauter reelle Wurzeln hat, die sämmtlich zwischen 0 und 1 liegen. Die weiteren Schlüsse lassen sich genau wiederholen. Es würde übrigens hieraus auch leicht sein, die Gleichung für $\xi$ in der Jacobi'schen Form zu erhalten, da aus einer ganz ähnlichen Betrachtung, wie eben durchgeführt ist, folgt, dass

$$\int_0^1 \xi^{\varepsilon-1} P(\xi) d\xi = 0, \quad \int_0^1 \xi^{\varepsilon-1}(\xi-\xi_1) P(\xi) d\xi = 0,$$

$$\int_0^1 \xi^{\varepsilon-1}(\xi-\xi_1)(\xi-\xi_2) P(\xi) d\xi = 0, \ldots$$

$$\ldots \int_0^1 \xi^{\varepsilon-1}(\xi-\xi_1) \ldots (\xi-\xi_{n-1}) P(\xi) d\xi = 0$$

sein muss, dass also auch, wenn man setzt $\psi_1(\xi) = \xi^{\varepsilon-1} P(\xi)$,

$$\int_0^1 \psi_1(\xi) d\xi \int_0^1 \xi\, \psi_1(\xi) d\xi \ldots \int_0^1 \xi^{n-1}\, \psi(\xi) d\xi = 0.$$

Dies sind dieselben Bedingungen für $P(\xi)$, wie oben XIV) für $\psi(\xi)$ aufgestellt sind, also können sich $\psi(\xi)$ und $\psi_1(\xi)$ nur durch einen constanten Factor unterscheiden.

Man erkennt durch die Vergleichung der verschiedenen Formen, in die die Gleichung gebracht werden kann, die bemerkenswerte Beziehung, dass die Determinante $P(\xi)$ (XXV) bis auf einen leicht bestimmbaren constanten Factor identisch ist mit

$$\frac{\xi^{1-\varepsilon} d^n[\xi^{\varepsilon-1+n}(\xi-1)^n]}{d\xi^n} \ldots$$

Wir wollen nun auch den Fehler $\Delta$ in Betracht ziehen, den man begeht, wenn man die Formel der mechanischen Quadratur auf einen Ausdruck anwendet, der nicht nur die $2n$ ersten Glieder enthält.

Wir setzen die Summe dieser Glieder vom $(2n+1)$ten an, gleich $R(x)$, also

XXX) $\quad a_{2n+1} x^{\mu-1+2n\delta} + a_{2n+2} x^{\mu-1+(2n+1)\delta} + \ldots = R(x),$

so dass

$$F(x) = \Phi(x) + R(x) \quad \text{und}$$

$$\int_0^h F(x) dx = \int_0^h \Phi(x) dx + \int_0^h R(x) dx.$$

Das erste der Integrale rechts kann nach der Formel berechnet werden, also

$$\int_0^h \Phi(x) dx = h[c_1 \Phi(x_1) + c_2 \Phi(x_2) \ldots c_n \Phi(x_n)]$$

$$= h[c_1 F(x_1) + c_2 F(x_2) \ldots c_n F(x_n)] - h[c_1 R(x_1) + c_2 R(x_2) \ldots c_n R(x_n)]$$

Setzt man also

$$\int_0^h F(x)dx = h\,\Sigma c_i F(x_i) + \Delta,$$

so ist

$$\Delta = \int_0^h R(x)dx - h\,\Sigma c_i R(x_i)$$

der Fehler, den man durch allgemeine Anwendung der besprochenen Formel macht.

Setzt man für $R(x)$ überall seinen Wert aus XXX) ein, so kommt

$$\Delta = a_{2n+1}\left[\frac{h^{\mu+2n\delta}}{\mu+2n\delta} - h\,\Sigma c_i x_i^{\mu-1+2n\delta}\right]$$

$$+ a_{2n+2}\left[\frac{h^{\mu+(2n+1)\delta}}{\mu+(2n+1)\delta} - h\,\Sigma c_i x_i^{\mu-1+(2n+1)\delta}\right] + \dots$$

oder

$$= a_{2n+1}\frac{h^{\mu+2n\delta}}{\delta}\left[\frac{1}{\varepsilon+2n} - \Sigma \gamma_i \xi_i^{2n}\right]$$

$$+ a_{2n+1}\frac{h^{\mu+(2n+1)\delta}}{\delta}\left[\frac{1}{\varepsilon+2n+1} - \Sigma \gamma_i \xi_i^{2n+1}\right] + \dots$$

oder mit Rücksicht auf die Formel XXVI)

XXXI) $$\Delta = a_{2n+1}\frac{h^{\mu+2n\delta}}{\delta}\left[\frac{1}{\varepsilon+2n} - B_{2n}\right]$$

$$+ a_{2n+2}\frac{h^{\mu+(2n+1)\delta}}{\delta}\left[\frac{1}{\varepsilon+2n+1} - B_{2n+1}\right] + \dots$$

oder

XXXI')

$$\Delta = \frac{h^\mu}{\delta}\left[a_{2n+1}\left(\frac{1}{\varepsilon+2n} - B_{2n}\right) + a_{2n+2}\left(\frac{1}{\varepsilon+2n+1} - B_{2n+1}\right) + \dots\right]$$

Die Werte bis $B_{2n-1}$ sind oben bereits aufgeführt, die folgenden können daraus durch die Recursionsformel XXVII) berechnet werden.

Da $P(\xi)$ (XXV) und $\varphi(\xi)$ (XVIII') sich nur durch einen constanten Factor unterscheiden, auf welchen es nicht ankommt, so ist XVII) gleichbedeutend mit der letzten Gleichung XX), und wir erhalten

Digitized by Google

XXXII)

$$B_{2n} - \frac{\varepsilon+n-1}{\varepsilon+2n-1}\binom{n}{1}\frac{1}{\varepsilon+2n-1} + \frac{(\varepsilon+n-1)(\varepsilon+n-2)}{(\varepsilon+2n-1)(\varepsilon+2n-2)}\binom{n}{2}\frac{1}{\varepsilon+2n-2} - + \dots$$
$$+ (-1)^n \frac{(\varepsilon+n-1)(\varepsilon+n-2)\dots\varepsilon}{(\varepsilon+2n-1)(\varepsilon+2n-2)\dots(\varepsilon+n)}\binom{n}{n}\frac{1}{\varepsilon+n} = 0$$

$$B_{2n+1} - \frac{\varepsilon+n-1}{\varepsilon+2n-1}\binom{n}{1}B_{2n} + \frac{(\varepsilon+n-1)(\varepsilon+n-1)}{(\varepsilon+2n-1)(\varepsilon+2n-2)}\binom{n}{2}\frac{1}{\varepsilon+2n-1} - + \dots$$
$$+ (-1)^n \frac{(\varepsilon+n-1)(\varepsilon+n-2)\dots\varepsilon}{(\varepsilon+2n-1)(\varepsilon+2n-2)\dots\varepsilon+n}\binom{n}{n}\frac{1}{\varepsilon+n+1} = 0$$

u. s. f.

Das erste Glied des Fehlers $\Delta$ wird demnach

XXXIII)
$$a_{2n+1}\frac{h^{\mu+2n\delta}}{\delta}\left(\frac{1}{\varepsilon+2n} - \frac{\varepsilon+n-1}{\varepsilon+2n-1}\binom{n}{1}\frac{1}{(\varepsilon+2n-1)^2}\right.$$
$$\left. + \frac{(\varepsilon+n-1)(\varepsilon+n-2)}{(\varepsilon+2n-1)(\varepsilon+2n-2)}\binom{n}{2}\frac{1}{(\varepsilon+2n-2)^2} - + \dots\right)$$

Dieser Ausdruck ist, wenn $n$ eine grössere Zahl ist, d. h. wenn man eine grössere Gliederzahl bei der Berechnung berücksichtigt hat, nicht so bequem, wie der Jacobi'sche; da man aber in der Praxis die Formel nur anwenden wird, wenn eine kleinere Gliederzahl genügt, so ist der Unterschied in der Form nicht von allzugrossem Belang.

### Bemerkung über den Fall $\varepsilon = 1$.

Der Fall $\varepsilon = 1$, welcher bei der Jacobi-Gauss'schen Formel und allgemeiner immer dann eintritt, wenn $\mu = \delta$ ist, z. B. auch wenn $f(x)$ eine ungerade Function ist, die mit einem Gliede der ersten Potenz beginnt, ist in gewisser Hinsicht besonders ausgezeichnet. Die Gleichung XIII) wird nach Fortlassung eines constanten Factors

XXXIV)
$$\frac{d^n\xi^n(\xi-1)^n}{d\xi^n} = 0.$$

Setzt man $\xi = \frac{\eta+1}{2}$, so geht dieselbe nach Multiplication mit $2^n$ über in

$$\frac{d^n(\eta^2-1)^n}{d\eta^n} = 0,$$

oder wenn man entwickelt und $\eta^n$ von seinem Coefficienten befreit

XXXV)
$$\eta^n - \frac{n(n-1)}{2n(2n-1)}\binom{n}{1}\eta^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}\eta^{n-4} - + \dots = 0.$$

In diese Form hat auch Herr Schellbach in der erwähnten Abhandlung die Jacobi'sche Gleichung gebracht. Die linke Seite $\frac{d^n(\eta^2-1)^n}{d\eta^n}$ ist, wie Ivory gezeigt hat, bis auf einen von $x$ unabhängigen Factor die von Heine durch $P^n(x)$ bezeichnete Kugelfunction. (Heine, Handbuch der Kugelfunctionen, Seite 10).

Ist nun $n$ gerade, so enthält diese Gleichung nur gerade Potenzen, ist also in Bezug auf $\eta^2$ von Grade $\frac{n}{2}$.

Ist $n$ ungerade, so enthält sie nur ungerade Potenzen von $\eta$, hat die Wurzel $\eta = 0$, die übrigen Wurzeln genügen einer Gleichung, die in Bezug auf $\eta^2$ vom Grade $\frac{n-1}{2}$ ist. In beiden Fällen ist die Verteilung der Werte von $\xi$ symmetrisch in Bezug auf die Mitte des Intervalls von 0 bis 1 und die Auflösung der Gleichung ist erleichtert, so dass man z. B. für $n = 4$ und $n = 5$, wodurch man also bei 8, respective 10 Gliedern ein genaues Resultat erhält, wesentlich auf quadratische Gleichungen zur Bestimmung von $\eta$, respective $\xi$, geführt wird.

Für $n = 4$ erhält man

XXXVI) $$\eta^4 - \frac{4.3}{8.7}\binom{4}{1}\eta^2 + \frac{4.3.2.1}{8.7.6.5}\binom{4}{2} = 0$$

oder

$$\eta^4 - 2.\frac{3}{7}\eta^2 + \frac{3}{35} = 0, \quad \eta^2 = \frac{3}{7} \pm \sqrt{\frac{24}{245}},$$

also die vier Werte

$$\xi = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{\frac{3}{7} \pm \sqrt{\frac{24}{245}}}\right).$$

Für $n = 5$

XXXVII) $$\eta^5 - \frac{5.4}{10.9}\binom{5}{1}\eta^3 + \frac{5.4.3.2}{10.9.8.7}\binom{5}{2}\eta = 0$$

oder

$$\eta^5 - 2.\frac{5}{9}\eta^3 + \frac{5}{21}\eta = 0,$$

also

$$\eta = 0 \quad \text{oder} \quad \eta^2 = \frac{5}{9} \pm \sqrt{\frac{40}{567}}$$

und die fünf Werte von $\xi$ werden

$$\xi = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \xi = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{\frac{5}{9} \pm \sqrt{\frac{40}{567}}}\right).$$

Es verdient auch bemerkt zu werden, dass wenn man in dem Falle $\varepsilon = 1$, die Substitution $\xi = \frac{\eta + 1}{2}$ vor Ausführung der übrigen Entwickelungen macht, man durch ein dem oben angewendeten vollkommen analoges Verfahren auf folgende Gleichungen zur Bestimmung von $\eta$ geführt wird.

Für gerades $n$

$$\text{XXXVIII)} \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & \eta^2 & \eta^4 & \dots & \eta^n \\ \frac{1}{1} & \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \dots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{1}{7} & \dots & \frac{1}{n+3} \\ \vdots \\ \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+3} & \dots & \frac{1}{2n-1} \end{vmatrix} = 0$$

Für ungerades $n$

$$\text{XXXIX)} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \eta & \eta^3 & \eta^5 & \dots & \eta^n \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{1}{7} & \dots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{7} & \frac{1}{9} & \dots & \frac{1}{n+2} \\ \vdots \\ \frac{1}{n-2} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n+2} & \dots & \frac{1}{2n-1} \end{vmatrix} = 0$$

woraus folgt, dass der Ausdruck $\frac{d^n(\eta^2-1)^n}{d\eta^n}$, jenachdem $n$ gerade oder ungerade ist, der linken Seite der Gleichung XXXVIII) oder XXXIX) bis auf einen leicht bestimmbaren constanten Factor gleich wird, oder, was auf dasselbe hinauskommt, dass die Determinante

$$\text{XL)} \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & \xi & \xi^2 & \dots & \xi^n \\ \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \dots & \frac{1}{n+2} \\ \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \dots & \frac{1}{2n} \end{vmatrix}$$

durch die Snbstitntion $\xi = \frac{\eta + 1}{2}$ bis auf einen constanten Factor übergeht in die Determinante $\Delta_1$ oder $\Delta_2$, jenachdem $\Delta$ gerade oder nngerade ist.

## Anwendnng der verallgemeiuerten Methode auf die mechanische Quadratnr.

Ausser dem theoretischen Interesse, welches die Verallgemeinerung der Gauss-Jacobi'schen Methode wohl hanptsächlich darin hat, dass sie auf eine ganze Klasse von Gleichnngen führt, deren linke Seite sich durch eine Determinante darstellen lässt, und die lanter reelle, zwischen Null und Eins gelegene, von einander verschiedene Wnrzeln haben, ist zn beachten, dass sie in gewissen Fällen anch praktisch verwertbar ist.

Ich hebe zunächst den Fall hervor, wo die zu integrirende Fnnction sich in eine nach den natürlichen Potenzen von $x$ fortschreitende Reihe entwickeln lässt, wenn die Entwickelung mit einer höheren als der ersten Potenz beginnt, namentlich wenn diese Potenz so hoch ist, dass die znletzt besprochene Vereinfachung, die bei der Jacobi-Gauss'schen Methode eintreten kann; nicht recht wirksam ist.

Sei z. B.

$$F(x) = a_1 x^{10} + a_2 x^{11} + a_3 x^{12} + a_4 x^{13} + \dots$$

dann ist

$$\mu = 11\,; \quad \delta = 1\,; \quad \varepsilon = 11.$$

Mithin wird die Gleichung zur Bestimmung von $\xi$

$$\xi^{-10} \frac{d^n \xi^{10+n} (\xi - 1)^n}{d\xi^n} = 0$$

oder

$$\begin{vmatrix} 1 & \xi & \xi^2 & \dots & \xi^n \\ \frac{1}{11} & \frac{1}{12} & \frac{1}{13} & \dots & \frac{1}{11+n} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{13} & \frac{1}{14} & \dots & \frac{1}{12+n} \\ \vdots & & & & \\ \frac{1}{10+n} & \frac{1}{11+n} & \dots & \dots & \frac{1}{10+2n} \end{vmatrix} = 0$$

Setzt man $n = 2$, so erhält man zur Bestimmung von $\xi_1$ und $\xi_2$ die Gleichung

$$\xi^2 - 2\cdot\frac{12}{14}\xi + \frac{12}{14}\cdot\frac{11}{13} = 0$$

$$\xi = \frac{6}{7} \mp \sqrt{\frac{36}{49} - \frac{66}{91}}$$

Dann ist

$$x_1 = h\xi_1; \quad x_2 = h\xi_2$$

und zur Bestimmung von $c_1$ und $c_2$ kann man benutzen die Gleichungen

$$c_1 x_1^{10} + c_2 x_2^{10} = \frac{h^{10}}{11}$$

$$c_1 x_1^{11} + c_2 x_2^{11} = \frac{h^{11}}{12}$$

Dann ist

$$\int_0^h F(x)dx = h[c_1 F(x_1) + c_2 F(x_2)]$$

Derselbe ist genau, wenn die Reihe nach vier Gliedern abbricht. Nach der Jacobi-Gauss'schen Methode würde man sieben Functionswerte und die Auflösung einer Gleichung siebenten Grades für $\xi$, die sich auf eine Gleichung dritten Grades für $\eta^2$ reduciren würde, brauchen, um im gleichen Falle das Integral genau zu erhalten, weil in dieser Methode der Fortfall der niederen Potenzen gar nicht berücksichtigt werden kann.

Noch bedeutender wird der Vorteil, wenn noch mehr Glieder vom Anfang an verschwinden.

Als ein zweites wichtiges Beispiel, wo die verallgemeinerte Methode zu einer wichtigen Vereinfachung führt, führe ich den Fall an, wo die zu integrirende Function eine ungerade Function ist, selbst wenn sie mit der niedrigsten Potenz, also der ersten beginnt.

Sei also

$$F(x) = a_1 x + a_2 x^3 + a_3 x^5 + a_4 x^7 + \ldots a_{10} x^{19} + \ldots,$$

hier ist

$$\mu = 2; \quad \delta = 2; \quad \varepsilon = 1;$$

also die Gleichung zur Bestimmung von $\xi$ wird wie oben XXXIV) oder $\Delta = 0$ (XL) und geht durch die Substitution $\xi = \frac{\eta + 1}{2}$ in die Gleichung XXXV) über.

Setzt man $n = 5$, so erhält man die Gleichung XXXVII) und daraus die 5 Werte für $\eta$ und $\xi$, wie dort angegeben ist. Dann ist

$$x_i = h\sqrt{\xi_i} \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5),$$

und zur Bestimmung der Grössen $c_i (i = 1, 2, 3, 4, 5)$ kann man die linearen Gleichungen

$$\Sigma c_i x_i = \frac{h}{2}, \quad \Sigma c_i x_i^3 = \frac{h^3}{4}, \quad \Sigma c x_i^5 = \frac{h^5}{6},$$
$$\Sigma c_i x_i^7 = \frac{h^7}{8}, \quad \Sigma c_i x_i^9 = \frac{h^9}{10}$$

benutzen und erhält als Näherungswert

$$\int_0^h F(x) dx = h \, \Sigma c_i F(x_i).$$

Man braucht also zur Darstellung 5 Functionswerte, und das Integral ist genau, wenn die Reihe sich auf 10 Glieder reducirt.

Nach der Jacobi-Gauss'schen Methode müsste man, um in gleichem Falle das Integral genau zu erhalten, 10 Functionswerte benutzen und eine Gleichung des 10ten Grades für $\xi$, die sich auf eine solche des 5ten Grades für $\eta^2$ reducirt, auflösen.

Bei geraden Functionen erhält man ebenfalls eine Vereinfachung, die aber nicht so bedeutend ist; man braucht zwar auch nur die halbe Zahl der Functionswerte, wie bei der einfachen Jacobi-Gauss-schen Methode, aber die zu lösende Gleichung erhält wesentlich denselben Grad; da in diesem Falle $\mu = 1$, $\delta = 2$, also $\varepsilon = \frac{1}{2}$ wäre, und die Substitution $\xi = \frac{\eta + 1}{2}$ keine Vereinfachung hervorbringt.

Die angeführten Beispiele mögen genügen, auf die praktische Verwendbarkeit der verallgemeinerten Methode hinzuweisen.

# IX.

# Miscellen.

## 1.

### Beitrag zu den Gleichungen des zweiten, dritten und vierten Grades mit rationalen Wurzeln.

Im 64. Teil, 3. Heft pg. 299. des „Archivs" waren die Wurzeln einer vollständigen Gleichung 4. Grades von der Form

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

$$x_1 \text{ u. } x_2 = -\frac{a}{4} + \varphi \pm \sqrt{z + \frac{a^2 - 4b}{8} - \frac{a^3 - 4ab + 8c}{32\varphi}}$$

$$x_3 \text{ u. } x_4 = -\frac{a}{4} - \varphi \pm \sqrt{z + \frac{a^2 - 4b}{8} + \frac{a^3 - 4ab + 8c}{32\varphi}}$$

gefunden, wenn man unter $z$ einen Wurzelwert der kubischen Resolvente der Gleichung 4. Grades und unter $\varphi = \sqrt{\frac{a^2}{16}}$ versteht.

1. Wenn eine Wurzel $x_1$ einer Gleichung 4. Grades rational ist, und wenn ein Wurzelwert der kubischen Resolvente dieser Gleichung rational ist, so ist sowohl $\varphi$, d. h.

$$\sqrt{\frac{a^2}{16} - z} \quad \text{als auch} \quad \sqrt{z + \frac{a^2 - 4b}{8} \mp \frac{a^3 - 4ab + 8c}{32\varphi}}$$

und damit auch ein zweiter Wurzelwert der Gleichung 4. Grades rational.

Beweis.

$$\text{I.}\quad x = -\frac{a}{4} + \varphi \pm \sqrt{z + \frac{a^2-4b}{8} - \frac{a^3-4ab+8c}{32\varphi}}$$

$$x + \frac{a}{4} = \varphi + \sqrt{z + \frac{a^2-4b}{8} - \frac{a^3-4ab+8c}{32\varphi}}$$

Quadrirt man diese Gleichung und setzt für

$$\varphi^2 = \frac{a^2}{16} - z$$

ein, so erhält man

$$x^2 + \frac{ax}{2} = \frac{a^2-4b}{8} - \frac{a^3-4ab+8c}{32\varphi} \pm 2\varphi\sqrt{z + \frac{a^2-4b}{8} - \frac{a^3-4ab+8c}{32\varphi}}$$

Setzt man in dieser Gleichung

$$\sqrt{z + \frac{a^2-4b}{8} - \frac{a^3-4ab+8c}{32\varphi}} = x + \frac{a}{4} - \varphi$$

so ist

$$x^2 + \frac{ax}{2} + \frac{b}{2} - 2z = 2x\varphi - \frac{a^3-4ab+8c}{32\varphi}$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $8\varphi$, so erhält man

$$\text{II.}\quad \varphi = \frac{x(a^2-16z) - 4az + ab - 2c}{4(2x^2+ax+b-4z)}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist rational, folglich auch die linke. Weil hiermit in Gleichung I. $x - \frac{a}{4} - \varphi$ rational ist, so muss auch $\pm\sqrt{z + \frac{a^2-4b}{8} - \frac{a^3-4ab+8c}{32\varphi}}$ rational sein, wodurch auch $x_2$ rational ist. Z. B.

$$x^4 - 8x^3 - 3x^2 + 62x + 56 = 0$$

für diese Gleichung ist

$$z_1 = 3;\quad z_2 = 3\tfrac{3}{4};\quad z_3 = -8\tfrac{1}{8}$$

$$\varphi_1 = 1;\quad \varphi_2 = \tfrac{1}{2};\quad \varphi_3 = 3\tfrac{1}{2}$$

$$x_1 = 7;\quad x_2 = -1;\quad x_3 = 4;\quad x_4 = -2$$

Ist also $x_1$ oder $x_3$ rational, so ist es auch $x_2$ oder $x_4$.

2. Welche Form hat eine Gleichung 2. Grades, damit ihre Wurzeln rational sind?

Auflösung.

Man setze

$$\text{I.}\quad x = -\frac{a}{2} \pm m \quad \text{oder}$$

$$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2 = m^2$$

Hieraus ergibt sich die gesuchte Form

$$\text{II.}\quad x^2 + ax + \frac{a^2}{4} - m^2 = 0 \qquad x_1 = -\frac{a}{2} + m$$

$$x_2 = -\frac{a}{2} - m$$

$a$ und $m$ sind beliebige rationale Zahlen.

Setzt man in II. $a = 0$, so erhält die Gleichung 2. Grades die Form

$$x^2 - m^2 = 0 \quad \text{oder}$$

$$(x+m)(x-m) = 0 \quad \text{also} \quad x_1 = -m$$

$$\text{und} \quad x_2 = +m.$$

3. Welche Form hat eine vollständige Gleichung 3. Grades, damit eine Wurzel derselben, durch die Cardanische Formel berechnet, 2 rationale dritte Wurzeln liefert?

Auflösung.

Man setze

$$\text{I.}\quad x = -\frac{a}{3} + m + n \quad \text{oder}$$

$$\left(x+\frac{a}{3}\right)^3 = (m+n)^3$$

Hieraus ergibt sich die gesuchte Form der Gleichung

$$\text{II.}\quad x^3 + ax^2 + x\left(\frac{a^2}{3} - 3mn\right) - m^3 - n^3 + \frac{a^3}{27} - amn = 0$$

Hierin ist

$$x_1 = -\frac{a}{3} + m + n$$

$$x_2 \text{ u. } x_3 = -\frac{a}{3} - \frac{m+n}{2} \pm \frac{m-n}{2}\sqrt{-3}$$

Vergleicht man die Gleichung II. mit einer vollständigen Gleichung 3. Grades von der Form

$$\text{III.}\quad x^3+ax^2+bx+c=0$$

so muss

$$a=a$$

$$b=\frac{a^2}{3}-3mn$$

$$c=-m^3-n^3+\frac{a^3}{27}-amn$$

sein. Nach diesen letzten 3 Gleichungen lässt sich ja $m$ und $n$ ans $a$, $b$ und $c$ berechnen, so dass

$$\text{IV.}\quad m=\tfrac{1}{3}\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}(2a^3-9ab+27c)+\tfrac{1}{2}\sqrt{(2a^3-9ab+27c)^2-4(a^2-3b)^3}}$$

$$\text{V.}\quad n=\tfrac{1}{3}\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}(2a^3-9ab+27c)-\tfrac{1}{2}\sqrt{(2a^3-9ab+27c)^2-4(a^2-3b)^3}}$$

Wenn in den Gleichungen I., II. und III. $a=0$ ist, so ist also

$$\text{I.}\quad x=m+n$$

$$\text{II.}\quad x^3-3mnx-m^3-n^3=0$$

und

$$\text{III.}\quad x^3+bx+c=0$$

somit auch

$$m=\sqrt[3]{-\frac{c}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{c^2+\frac{4b^3}{27}}}$$

$$n=\sqrt[3]{-\frac{c}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{c^2+\frac{4b^3}{27}}}$$

Die Wurzelwerte der Gleichnng II. sind dann

$$x_1=m+n$$

$$x_2 \text{ nnd } x_3=-\frac{m+n}{2}\pm\frac{m-n}{2}\sqrt{-3}.$$

4. Welche Form muss eine vollständige Gleichung 3. Grades

$$\text{I.}\quad x^3+ax^2+bx+c=0$$

haben, damit dieselbe 3 reelle nnd mindestens 1 rationale Wurzel habe?

Auflösnng.

Wenn die 3 Wurzeln der Gleichung 3. Grades reell sind, so ist

$$\text{II.}\quad x_1=-\frac{a}{3}+m+pi+m-pi$$

$m$ und $a$ seien rationale Zahlen.

Aus II. folgt

$$\left(x+\frac{a}{3}\right)^3 = [(m+pi)+(m-pi)]^3$$

$$\left(x+\frac{a}{3}\right)^3 = (m+pi)^3+(m-pi)^3+3(m^2+p^2)\left(x+\frac{a}{3}\right)$$

so dass die gesuchte Form der vollständigen Gleichung 3. Grades ist

III. $x^3+ax^2+3x\left(\frac{a^2}{9}-m^2-p^2\right)+\frac{a^3}{27}-a(m^2+p^2)-2(m^3-3mp^2)=0$

Hierin ist

$$x_1 = -\frac{a}{3}+2m$$

$$x_2 = -\frac{a}{3}-m-p\sqrt{3}$$

$$x_3 = -\frac{a}{3}-m+p\sqrt{3}$$

Setzt man in Gleichung III. für $x$ den Wert $3\alpha$
und für $p$ „ „ $q\sqrt{3}$

so werden die 3 Wurzeln der Gleichung 3. Grades rational und diese Gleichung erhält die Form

IV. $x^3+3\alpha x^2+3x(\alpha^2-m^2-3q^2)+\alpha^3-3\alpha(m^2+3q^2)-2(m^3-9mq^2)=0$

Für diese Gleichung ist

$$x_1 = -\alpha+2m$$
$$x_2 = -\alpha-m-3q$$
$$x_3 = -\alpha-m+3q$$

Setzt man in Gleichung IV. $a = 0$, so erhält man die reducirte Gleichung 3. Grades mit 3 rationalen Wurzeln

V. $y^3-3y(m^2+3q^2)-2(m^3-9mq^2)=0$

oder

$$(y-2m)(y+m+3q)(y+m-3q)=0$$

also

$$y_1 = 2m$$
$$y_2 = -m-3q$$
$$y_3 = -m+3q$$

Es lässt sich nun leicht beweisen, dass in Bezug auf die Gleichung IV. in den 3 Wurzeln für $m$ und $n$ der unter 3) aufgeführten Gleichungen IV. und V. nämlich

$$m = \tfrac{1}{3}\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}(2a^3-9ab+27c)+\tfrac{1}{2}\sqrt{(2a^3-9ab+27c)^2-4(a^2-3b)^3}}$$

$$n = \tfrac{1}{3}\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}(2a^3-9ab+27c)-\tfrac{1}{2}\sqrt{(2a^3-9ab+27c)^2-4(a^2-3b)^3}}$$

$$4(a^2-3b)^3 > (2a^3-9ab+27c)^2$$

ist, wenn man unter $a$, $b$, $c$ die Werte

$$a = 3\alpha$$
$$b = 3(\alpha^2-m^2-3q^2)$$
$$c = \alpha^3-3\alpha(m^2+3q^2)-2(m^3-9mq^2)$$

versteht. Es muss also sein

$$4(9\alpha^2-9\alpha^2+9m^2+27q^2)^3 > [54\alpha^2-81\alpha(\alpha^2-m^2-3q^2)$$
$$+27\alpha^3-81\alpha(m^2-3q^2)-54(m^3-9mq^2)]^2$$

oder

$$(m^2+3q^2)^3 > (m^3-9mq^2)^2$$
$$(m^2+3q^2)^3-\varphi = (m^3-9mq^2)^2$$
$$\varphi = 3(m^2-q^2)^2$$

Weil nun $(m^2-q^2)^2$ stets positiv ist, so ist auch $\varphi$ stets positiv, es ist also Gleichung IV. nur vermittelst trigonometrischer Formel zu lösen.

5. Welche Form hat eine Gleichung 4. Grades

$$x^4+ax^2+bx+c=0$$

wenn 2 Wurzeln der Gleichung rational nnd 2 imaginär sein sollen, und wenn die Wurzel der knbischen Resolvente, durch die Cardanische Formel herechnet, rational ist.

Auflösung.

Die kubische Resolvente der Gleichung

$$\text{I.}\quad x^4+ax^2+bx+c=0$$

ist

$$\text{II.}\quad z^3-\frac{a}{2}z^2+\frac{z}{16}(a^2-4c)+\frac{b^2}{64}=0$$

Soll nun zur Berechnung einer Wurzel dieser kubischen Resolvente die Cardanische Formel benutzt werden, so muss diese Resolvente identisch sein mit der Gleichnng

$$\text{III.}\quad z^3+3\alpha z^2+3z(\alpha^2-mn)-m^3-n^3+\alpha^3-3\alpha mn=0$$

worin

$$z_1 = -\alpha+m+n$$

$$z_2 \text{ u. } z_3 = -\alpha-\frac{m+n}{2}\pm\frac{m-n}{2}\sqrt{-3}$$

Vergleicht man die beiden Gleichnngen II. nnd III., so muss sein

$$-\frac{a}{2} = 3\alpha$$

$$\frac{a^2-4c}{16} = 3\alpha^2 - 3mn$$

$$\frac{b^2}{64} = -m^3 - n^3 + \alpha^3 - 3\alpha mn$$

Hieraus folgt

$$a = -6\alpha$$

$$c = 12mn - 3\alpha^2$$

$$b = \pm 8\sqrt{\alpha^3 - m^3 - n^3 - 3\alpha mn}.$$

Wnrzeln der Gleichung I. sind nnn

$$x_1 \text{ u. } x_2 = \sqrt{-z} \pm \sqrt{z - \frac{a}{2} - \frac{b}{4\sqrt{-z}}}$$

Snbstituirt man in diese Gleichnng für $a$ nnd $b$ die vorhin ermittelten Werte nnd für $z$ den Wert $-\alpha+m+n$, so erhält man

$$x_1 \text{ u. } x_2 = \sqrt{-z_1} \pm \sqrt{2\alpha + m + n \mp 2\sqrt{\frac{\alpha^3 - m - n^3 - 3\alpha mn}{\alpha - m - n}}}$$

oder

$$x_1 \text{ u. } x_2 = \quad \sqrt{-z_1} \pm \left[\sqrt{\frac{2\alpha+m+n}{2} + \frac{m-n}{2}\sqrt{-3}} \mp \sqrt{\frac{2\alpha+m+n}{2} - \frac{m-n}{2}\sqrt{-3}}\right]$$

$$x_3 \text{ u. } x_4 = -\sqrt{-z_1} \pm \left[\sqrt{\frac{2\alpha+m+n}{2} + \frac{m-n}{2}\sqrt{-3}} \pm \sqrt{\frac{2\alpha+m+n}{2} - \frac{m-n}{2}\sqrt{-3}}\right]$$

Weil in der Gleichung $x^4 + ax^2 + bx + c = 0$

$$b = \pm 8\sqrt{\alpha^3 - m^3 - n^3 - 3\alpha mn},$$

so muss dann das obere Vorzeichen vor der Wurzel in der Klammer genommen werden, wenn $b$ positiv ist; ist dagegen $b$ negativ, so gilt das untere Vorzeichen.

Weil nun die Wnrzelwerte der kubischen Resolvente der Gleichung 4. Grades

LIBRARY



$$z_1 = -\alpha + m + n$$
$$z_2 = -\alpha - \frac{m+n}{2} + \frac{m-n}{2}\sqrt{-3}$$
$$z_3 = -\alpha - \frac{m+n}{2} - \frac{m-n}{2}\sqrt{-3}$$

sind, so ist

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{-z_1} - \sqrt{-z_2} + \sqrt{-z_3} \\ x_2 &= \sqrt{-z_1} + \sqrt{-z_2} - \sqrt{-z_3} \\ x_3 &= -\sqrt{-z_1} + \sqrt{-z_2} + \sqrt{-z_3} \\ x_4 &= -\sqrt{-z_1} - \sqrt{-z_2} - \sqrt{-z_3} \end{aligned}\right\} \text{wenn } b, \text{ d. h. wenn } 8\sqrt{\alpha^3 - m^3 - n^3 - 3\alpha mn} \text{ positiv ist}$$

und

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{-z_1} + \sqrt{-z_2} + \sqrt{-z_3} \\ x_2 &= \sqrt{-z_1} - \sqrt{-z_2} - \sqrt{-z_3} \\ x_3 &= -\sqrt{-z_1} - \sqrt{-z_2} + \sqrt{-z_3} \\ x_4 &= -\sqrt{-z_1} + \sqrt{-z_2} - \sqrt{-z_3} \end{aligned}\right\} \text{wenn } b, \text{ d. h. wenn } 8\sqrt{\alpha^3 - m^3 - n^3 - 3\alpha mn} \text{ negativ ist.}$$

Die Gleichnng 4. Grades

$$x^4 + ax^2 + bx + c = 0$$

erhält nun die Form

IV. $x^4 + 2(z_1 + z_2 + z_3)x^2 \pm 8x\sqrt{-z_1 z_2 z_3} + (z_1 + z_2 + z_3)^2 - 4z_1 z_2 = 0$

Weil nun 2 Wurzelwerte der Gleichnng IV. rational sein sollen, und weil die knbische Resolvente dieser Gleichung durch die Cardianische Formel berechnet ist, so setze man

$z_1 = -p^2$ mithin $\alpha - m - n = p^2$

$z_2 = -(q - \varphi i)^2$ „ $\alpha + \frac{m+n}{2} - \frac{m-n}{2}\sqrt{-3} = (q - \varphi i)^2$

$z_3 = -(q + \varphi i)^2$ „ $\alpha + \frac{m+n}{2} + \frac{m-n}{2}\sqrt{-3} = (q + \varphi i)^2$

Hieraus folgt

$$\alpha = \tfrac{1}{3}(2q^2 - 2\varphi^2 + p^2)$$
$$m = \tfrac{1}{3}(q^2 - \varphi^2 - p^2 + 4q\varphi\sqrt{3})$$
$$n = \tfrac{1}{3}(q^2 - \varphi^2 - p^2 - 4q\varphi\sqrt{3})$$

Wenn man die Werte für $z_1$, $z_2$ nnd $z_3$ in die Gleichung IV. setzt, so erhält man die Form einer Gleichung 4. Grades, in welcher 2 Wurzeln rational und 2 Wurzeln imaginär sind.

STANFORD LIBRARY



Form dieser Gleichung:

V. $x^4 - 2(2q^2 - 2\varphi^2 + p^2)x^2 \pm 8p(q^2 + \varphi^2)x + (4\varphi^2 + p^2)(p^2 - 4q^2) = 0$

Substituirt man nun in die vorhin aufgestellten Systeme der Wurzeln der Gleichung 4. Grades die Werte

$$\sqrt{-z_1} = p;\quad \sqrt{-z_2} = q - \varphi i;\quad \sqrt{-z_3} = q + \varphi i,$$

so ist

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \phantom{-}p + 2\varphi i \\ x_2 &= \phantom{-}p - 2\varphi i \\ x_3 &= -p + 2q \\ x_4 &= -p - 2q \end{aligned}\right\}$$ wenn in Gleichung V. $8p(q^2 + \varphi^2)$ positiv genommen,

und

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \phantom{-}p + 2q \\ x_2 &= \phantom{-}p - 2q \\ x_3 &= -p + 2\varphi i \\ x_4 &= -p - 2\varphi i \end{aligned}\right\}$$ wenn in Gleichung V. $8p(q^2 + \varphi^2)$ negativ genommen.

Die kubische Resolvente der Gleichung V. hat die Form

$$y^3 - (z_1 + z_2 + z_3)y^2 + (z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3)y - z_1 z_2 z_3 = 0$$

oder

VI. $y^3 + (p^2 + 2q^2 - 2\varphi^2)y^2 + [2p^2(q^2 - \varphi^2) + (q^2 + \varphi^2)^2]y + p^2(q^2 + \varphi^2)^2 = 0$

Hierin

$$y_1 = -p^2$$
$$y_2 = -(q - \varphi i)^2$$
$$y_3 = -(q + \varphi i)^2$$

**Beispiel.**

Es sei $q = 1$; $\varphi = 1$; $p = 1$, so erhält man die Gleichung

$$x^4 - 2x^2 + 16x - 15 = 0$$

Für die Bestimmung der Wurzeln dieser Gleichung gilt System I.

$$x_1 = 1 + 2i;\quad x_2 = 1 - 2i;\quad x_3 = 1;\quad x_4 = -3.$$

Die kubische Resolvente der Gleichung 4. Grades ist

$$y^3 + y^2 + 4y + 4 = 0;\quad y_1 = -1;\quad y_2 = 2i;\quad y_3 = -2i$$

In dieser Resolvente ist ein Wurzelwert $y_1 = -\alpha + m + n$ rational. $m$ und $n$ sind aber, wie früher gezeigt, irrational. Für dieses Beispiel ist

$$\alpha = \tfrac{1}{3};\quad m = \frac{1 + 4\sqrt{3}}{3};\quad n = \frac{1 - 4\sqrt{3}}{3}$$

6. Welche Form hat eine vollständige Gleichung 4. Grades mit 2 rationalen und 2 imaginären Wurzeln, wenn die eine Wurzel ihrer kubischen Resolvente, durch die Cardanische Formel berechnet, rational ist?

Auflösung.

Man setze in die unter 5. aufgestellte Gleichung V. den Wert $x=y-a$, so erhält man die verlangte vollständige Gleichung 4. Grades

$$y^4-4ay^3+2y^2(3a^2-2y^2+2\varphi^2-p^2)+4y[a(2q^2-2\varphi^2+p^2)-a^3 \pm 2p(q^2+\varphi^2)]+a^4-2a^2(2q^2-2\varphi^2+p^2)\mp 8ap(q^2+\varphi^2) +(4\varphi^2+p^2)(p^2-4q^2)=0$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= a+p+\varphi i\\ y_2 &= a+p-\varphi i\\ y_3 &= a-p+2q\\ y_4 &= a-p-2q \end{aligned}\right\} \text{ wenn das obere Vorzeichen genommen,}$$

und

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= a+p+2q\\ y_2 &= a+p-2q\\ y_3 &= a-p+2\varphi i\\ y_4 &= a-p-2\varphi i \end{aligned}\right\} \text{ wenn das untere Vorzeichen genommen.}$$

7. Welche Form muss eine Gleichung 4. Grades

$$\text{I.}\quad x^4+ax^2+bx+c=0$$

haben, damit ihre Wurzeln rational sind?

Auflösung.

Zunächst müssen die 3 Wurzeln ihrer kubischen Resolvente

$$\text{II.}\quad z^3-\frac{a}{2}z^2+\frac{z}{16}(a^2-4c)+\frac{b^2}{64}=0$$

rational sein. Weil also zur Lösung dieser Gleichung II. eine trigonometrische Formel benutzt werden muss, so muss die Gleichung II. die Form

$$\text{III.}\quad z^3+3az^2+3z(a^2-m^2-3q^2)+a^3-3a(m^2+3q^2)-2(m^3-9mq^2)=0$$

haben, und daher muss sein

$$-\frac{a}{2} = 3\alpha$$

$$\frac{a^2-4c}{16} = 3(\alpha^2-m^2-3q^2)$$

$$\frac{b^2}{64} = \alpha^3-3\alpha(m^2+3q^2)-2(m^3-9mq^2)$$

Hieraus folgt

$$a = -6\alpha \quad \text{und} \quad b = \pm 8\sqrt{\alpha^3-3\alpha(m^2+3q^2)-2(m^3-9mq^2)}$$

Weil nun für die Gleichung I.

$$x_1 \text{ und } x_2 = \sqrt{-z} \pm \sqrt{z-\frac{a}{2}-\frac{b}{4\sqrt{-z}}}$$

worin $z_1 = -\alpha+2m$ und $a$ und $b$ die obigen Werte haben, so erhält man

$$x_1 \text{ und } x_2 = \sqrt{-z_1} \pm (\sqrt{-z_2} \pm \sqrt{-z_3})$$

$$x_3 \text{ und } x_4 = -\sqrt{-z_1} \pm (\sqrt{-z_2} \pm \sqrt{-z_3})$$

und zwar

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{-z_1}+\sqrt{-z_2}-\sqrt{-z_3} \\ x_2 &= \sqrt{-z_1}-\sqrt{-z_2}+\sqrt{-z_3} \\ x_3 &= -\sqrt{-z_1}+\sqrt{-z_2}+\sqrt{-z_3} \\ x_4 &= -\sqrt{-z_1}-\sqrt{-z_2}-\sqrt{-z_3} \end{aligned}\right\} \text{ wenn } b \text{ positiv ist,}$$

und

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{-z_1}+\sqrt{-z_2}+\sqrt{-z_3} \\ x_2 &= \sqrt{-z_1}-\sqrt{-z_2}-\sqrt{-z_3} \\ x_3 &= -\sqrt{-z_1}+\sqrt{-z_2}-\sqrt{-z_3} \\ x_4 &= -\sqrt{-z_1}-\sqrt{-z_2}+\sqrt{-z_3} \end{aligned}\right\} \text{ wenn } b \text{ negativ ist.}$$

Substituirt man auch die Werte für $a$, $b$ und $c$ in die Gleichung I., so erhält diese die Form

IV.

$$x^4-6\alpha x^2 \pm 8x\sqrt{\alpha^3-3\alpha(m^2+3q^2)-2(m^3-9mq^2)}+3(4m^2+12q^2-\alpha^2)=0$$

Berücksichtigt man, dass

$$z_1 = -\alpha+2m$$

$$z_2 = -\alpha-m-3q$$

$$z_3 = -\alpha-m+3q$$

so lässt sich die Gleichung IV. auch schreiben:

$$\text{V.}\quad x^4 + 2(z_1 + z_2 + z_3)x^2 \pm 8x\sqrt{-z_1 z_2 z_3} + (z_1 + z_2 - z_3)^2 - 4z_1 z_2 = 0$$

Weil nnn die Wnrzeln dieser Gleichung rational sein sollen, so muss man setzen

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= -r^2 \\ z_2 &= -(s-\varphi)^2 \\ z_3 &= -(s+\varphi)^2 \end{aligned}\right\}\quad r,\ s \text{ und } \varphi \text{ sind beliebige rationale Zahlen.}$$

Hierans folgt

$$\alpha = \frac{r^2 + 2s^2 + 2\varphi^2}{3}$$

$$m = \frac{s^2 + \varphi^2 - r^2}{3}$$

$$q = \frac{2s\varphi}{3}$$

Ferner folgt

$$z_1 + z_2 + z_3 = -(r^2 + 2s^2 + 2\varphi^2)$$

$$\sqrt{-z_1 z_2 z_3} = r(s^2 - \varphi^2)$$

und

$$(z_2 + z_3 - z_1)^2 - 4z_2 z_3 = (r + 2\varphi)(r - 2\varphi)(r + 2s)(r - 2s),$$

so ist hiernach die Form einer Gleichnng 4. Grades

$$x^4 + ax^2 + by + c = 0$$

mit rationalen Wurzeln, wenn die Wnrzeln der kubischen Resolvente, durch eine trigonometrische Formel berechnet, rational sind

$$\text{VI.}$$

$$x^4 - 2(r^2 + 2s^2 + 2\varphi^2)x^2 \pm 8r(s^2 - \varphi^2)x + (r + 2\varphi)(r - 2\varphi)(r + 2s)(r - 2s) = 0$$

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= \phantom{-}r + 2s \\ z_2 &= \phantom{-}r - 2s \\ z_3 &= -r + 2\varphi \\ z_4 &= -r - 2\varphi \end{aligned}\right\}\quad \text{wenn } 8r(s^2 - \varphi^2) \text{ negativ genommen,}$$

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= \phantom{-}r + 2\varphi \\ z_2 &= \phantom{-}r - 2\varphi \\ z_3 &= -r + 2s \\ z_4 &= -r - 2s \end{aligned}\right\}\quad \text{wenn } 8r(s^2 - \varphi^2) \text{ positiv genommen.}$$

Die Form der kubischen Resolvente der Gleichung VI. ist

$$y_3 + (r^2 + 2s^2 + 2\varphi^2)y^2 + y[2r^2(s^2 + \varphi^2) + (s^2 - \varphi^2)^2] + r^2(s^2 - \text{[illegible]})^2 = 0$$

Digitized by Google

$$y_1 = -r^2$$
$$y_2 = -(s-\varphi)^2$$
$$y_3 = -(s+\varphi)^2$$

Beispiel.

Setzt man in Gleichnng VI.

$$r = 4$$
$$\varphi = 3$$
$$s = 1$$

so erhält man

$$x^4 - 72x^2 - 256x - 240 = 0$$
$$x_1 = 10;\quad x_2 = -2;\quad x_3 = -2;\quad x_4 = -6$$

Die knbische Resolvente dieser Gleichnng ist

$$y^3 + 36y^2 + 384y + 1024 = 0$$
$$y_1 = -16;\quad y_2 = -4;\quad y_3 = -16.$$

8. Welche Form hat eine vollständige Gleichung 4. Grades mit 4 rationalen Wnrzeln?

Auflösnng.

Setzt man in der nnter 7. aufgestellten Gleichung VI. $x = y - a$, so erhält man die verlangte Gleichnng

$$y^4 - 4ay^3 - 2y^2[r^2 + 2s^2 + 2\varphi^2 - 3a^2] + 4y[a(r^2 + 2s^2 + 2\varphi^2) - a^3$$
$$\pm 2r(s^2 - \varphi^2)] + a^4 - 2a^2(r^2 + 2s^2 + 2\varphi^2) \mp 8ar(s^2 - \varphi^2)$$
$$+ (r + 2\varphi)(r - 2\varphi)(r + 2s)(r - 2s) = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = a + r + 2\varphi \\ y_2 = a + r - 2\varphi \\ y_3 = a - r + 2s \\ y_4 = a - r - 2s \end{array}\right\} \text{ wenn das obere Vorzeichen genommen,}$$

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = a + r + 2s \\ y_2 = a + r - 2s \\ y_3 = a - r + 2\varphi \\ y_4 = a - r - 2\varphi \end{array}\right\} \text{ wenn das untere Vorzeichen genommen.}$$

Beispiel.

Setzt man in die obige Gleichung die Werte

$$a = -1$$
$$r = 3$$

$$\varphi = 3$$
$$s = 2$$

und nimmt das obere Vorzeichen in der Gleichung, so erhält man

$$x^4 + 4x^3 - 64x^2 - 16x + 240 = 0$$
$$x_1 = 6; \quad x_2 = -2; \quad x_3 = 2; \quad x_4 = -10$$

Ferner die reducirte Gleichung 4. Grades

$$y^4 - 70y^2 + 120y + 189 = 0$$
$$y_1 = 7; \quad y_2 = -1; \quad y_3 = 3; \quad y_4 = -9$$

und die kubische Resolvente

$$z^3 + 35z^2 + 259z + 225 = 0$$
$$z_1 = -9; \quad z_2 = -1; \quad z_3 = -25.$$

Hamburg im December 1879. Th. Sinram.

---

2.

**Ueber die Ausdehnung der Kepler'schen Gesetze.**

Unter den 4 Kepler'schen Gesetzen hat das dritte Bezug auf ein Strahlencentrum, das vierte sogar auf Bewegung in der Ellipse. Fragt man also nach den weitesten Bedingungen ihrer Gültigkeit, so muss man wol die Centralattraction zur Voraussetzung machen. Zur Verfügung stehen dann nur das Attractionsgesetz und die Constanten des Bewegungsanfangs.

Das erste Kepler'sche Gesetz: Jeder Planet bewegt sich in einer Ebene, in der auch die Sonne sich befindet — gilt dann bedingungslos, weil momentane Bewegungs- und Kraftrichtung eine Ebene bestimmen.

In gleichem Falle ist das dritte: Der Radiusvector des Planeten bezüglich zur Sonne als Centrum beschreibt in gleichen Zeiten gleiche Flächen. Denn es folgt direct aus der Proportionalität der Anziehungscomponenten mit den Projectionen des Radiusvectors, d. i. mit den Coordinaten. Die Constanten kommen nicht in Rechnung. Bemerkenswert ist der Grenzfall, wo die Attraction null ist. Hier sind die Flächen Dreiecke von gemeinsamer Spitze über gleichen Strecken einer Geraden; der Satz gilt dann für jedes Centrum.

Digitized by Google

Das zweite Kepler'sche Gesetz teilen wir in die 2 folgenden:

a) Die Bahn des Planeten ist eine Ellipse.

b) Die Sonne steht in einem ihrer Brennpunkte.

Wir untersuchen also zuerst die Bedingung, unter der überhaupt die Bahn eines nach einem Centrum $C$ angezogenen Punktes $P$ eine Ellipse ist.

Der Anfang der $xy$ sei $C$, die Ellipse bestimmt durch die Gleichungen

$$x = \alpha + a\cos\mu;\quad y = \beta + b\sin\mu \tag{1}$$

Bezeichne $r$ den Radiusvector, $v$ das Potential der Anziehung auf die Masseneinheit, $e$ die Excentricität, $\gamma$ die Flächengeschwindigkeit. Dann wird die Bewegung durch die 2 Gleichungen bestimmt:

$$\frac{\partial x^2 + \partial y^2}{\partial t^2} = 2v;\quad \frac{x\,\partial y - y\,\partial x}{\partial t} = 2\gamma \tag{2}$$

woraus nach Elimination von $\partial t$:

$$v = 2\gamma^2 \frac{\partial x^2 + \partial y^2}{(x\,\partial y - y\,\partial x)^2}$$

Diesen Wert also muss das Potential haben, wenn $P$ eine gegebene Curve $f(x, y) = 0$ durchlaufen soll. Führt man, in Anwendung auf die Ellipse, die Werte (1) ein, so kommt:

$$v = 2\gamma^2 \frac{a^2 - e^2\cos^2\mu}{(ab + b\alpha\cos\mu + a\beta\sin\mu)^2} \tag{3}$$

Eine weitere Forderung ist, dass $v$ eindeutige Function von $r$ sei. Nun hat man:

$$r^2 = (\alpha + a\cos\mu)^2 + (\beta + b\sin\mu)^2 \quad \text{oder}$$
$$r^2 = \alpha^2 + \beta^2 + b^2 + 2a\,\alpha\cos\mu + 2b\,\beta\sin\mu + e^2\cos^2\mu \tag{4}$$

Untersucht man erst die Maxima und Minima von $v$ und $r$, so findet man:

$$\frac{\partial v}{\partial \mu} = 4\gamma^2 ab\,\frac{a\,\alpha\sin\mu - b\,\beta\cos\mu + e^2\sin\mu\cos\mu}{(ab + b\,\alpha\cos\mu + a\beta\sin\mu)^3}$$

$$r\frac{\partial r}{\partial \mu} = -\,a\,\alpha\sin\mu + b\,\beta\cos\mu - e^2\sin\mu\cos\mu$$

woraus:

$$\partial v = -\frac{4\gamma^2 ab\,r\,\partial r}{(ab + b\,\alpha\cot\mu + a\,\beta\sin\mu)^3}$$

Nun ist

$$(b\,\alpha\cos\mu + a\,\beta\sin\mu)^2 \overset{=}{<} b^2\alpha^2 + a^2\beta^2$$

daher

$$1 - \frac{(b\,\alpha\cos\mu + a\,\beta\sin\mu)^2}{(ab)^2} \overset{=}{>} 1 - \frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2}$$

Hieraus ersieht man, dass der Nenner in (3) stets positiv ist, wenn $C$ innerhalb der Ellipse liegt, was wir fortan voraussetzen wollen. Es folgt dann, dass $v$ und $r$ immer entgegengesetzt variiren und gemeinsame Maximal-Minimal-Punkte haben, dass also von einem Minimum $r$ bis zum nächsten Maximum und umgekehrt $v$ eindeutig in $r$ ist.

Soll nun über diese Grenzen hinaus das Potential noch Gültigkeit haben, so muss je 2 Werten $\mu = \mu_1$ und $\mu = \mu_2$, welche gleichen $r$ zugehören, auch gleicher Wert von $v$ entsprechen. Sei

$$\mu_1 = \varkappa + \lambda; \quad \mu_2 = \varkappa - \lambda$$

dann ergiebt sich aus der Gleichsetzung

$$\begin{aligned} r^2 - \alpha^2 - \beta^2 - b^2 &= 2a\,\alpha\cos\mu_1 + 2b\,\gamma\sin\mu_1 + e^2\cos^2\mu_1 \\ &= 2a\,\alpha\cos\mu_2 + 2b\,\beta\sin\mu_2 + e^2\cos^2\mu_2 \end{aligned} \tag{4}$$

die rationale Relation:

$$\cos\lambda = \frac{b\beta}{e^2\sin\varkappa} - \frac{a\alpha}{e^2\cos\varkappa} \tag{5}$$

Es ist dann auch leicht die 2 übrigen Werte $\mu_3$; $\mu_4$ zu bestimmen, denen dasselbe $r$ entspricht. Denn macht man Gl. (4) ($\mu$ statt $\mu_2$ geschrieben) rational in $\cos\mu$ und dividirt die erhaltene Gleichung 4. Grades durch $(\cos\mu - \cos\mu_1)(\cos\mu - \cos\mu_2)$ so bleibt eine Gleichung 2. Grades, deren Wurzeln sind:

$$\cos\mu = \frac{a\,\alpha + b\,\beta\cot\varkappa \pm \sqrt{e^4\sin^2\varkappa - (a\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\varkappa + b\,\beta)^2}}{e^2}$$

zu deren Anwendung wir jedoch keinen Anlass haben.

Sei nun

$$\begin{aligned} M(\lambda) &= \{a^2 - e^2\cos^2(\varkappa+\lambda)\}(\sin\varkappa\cos\varkappa)^2 \\ N(\lambda) &= \{ab + b\,\alpha\cos(\varkappa+\lambda) + a\,\beta\sin(\varkappa+\lambda)\}\sin\varkappa\cos\varkappa \end{aligned}$$

und entspreche $v = v_1$, $v_2$ den Werten $\mu = \mu_1$, $\mu_2$; dann wird nach Gl. (3)

$$\frac{v_1 - v_2}{2\gamma^2} = \frac{M(\lambda)[N(-\lambda)]^2 - M(-\lambda)[N(\lambda)]^2}{[N(\lambda)\,N(-\lambda)]^2} \tag{6}$$

Der Zähler ist rational in $\cos\lambda$, $\sin\lambda$ nnd wechselt sein Vorzeichen mit $\lambda$, folglich hat er den Factor $\sin\lambda$ und geht nach Division durch $\sin\lambda\sin\varkappa\cos\varkappa$ in eine ganze rationale Function $Q$ von $\cos\lambda$ über, welche wieder gemäss Gl. (5) ganze rationale Fnnction von $\cos\varkappa$, $\sin\varkappa$ ist. Als solche kann sie nicht für alle reellen $\lambda$ verschwinden, wenn sie nicht für alle reellen $\varkappa$ verschwindet. Daher kann man $\varkappa$ null setzen, obgleich hier $\lambda$ imaginär wird. Dann hat man:

$$\cos\lambda\sin\varkappa\cos\varkappa = \frac{b\beta}{e^2}\,; \quad \sin\lambda\sin\varkappa\cos\varkappa = \frac{ib\beta}{e^2}$$

$$M(\lambda) = -\frac{b^2\beta^2}{e^2}\,; \quad N(\lambda) = b\beta\frac{b\alpha + ia\beta}{e^2}$$

und findet nach Einführung in den Zähler des Ausdrucks (6):

$$e^4 Q = \frac{-b^4\beta^4(b\alpha - ia\beta)^2 + b^4\beta^4(b\alpha + ia\beta)^2}{ib\beta}$$
$$= 4b^3\beta^3 . ab\,\alpha\beta$$

Folglich sind $\alpha = 0$ und $\beta = 0$ die einzigen Fälle, wo $Q = 0$ sein kann. In Anwendung auf nnsere Frage geht daraus hervor, dass ein in $r$ eindentiges $v$ nie stattfindet, wenn nicht das Anziehnngscentrum anf einer der Axen der Ellipse liegt.

Sei znerst $\beta = 0$; dann lautet Gl. (4):

$$r^2 = a^2 + b^2 + 2a\alpha\cos\mu + e^2\cos^2\mu \tag{7}$$

woraus:

$$\cos\mu = \frac{-a\alpha \pm u}{e^2}\,; \quad u^2 = e^2 r^2 + b^2(\alpha^2 - e^2)$$

Führt man diesen Wert in Gl. (3) ein und macht den Nenner rational, so wird der Zähler:

$$\frac{e^2b^2}{2\gamma^2}v\{(a^2-\alpha^2)(e^2-\alpha^2)-\alpha^2e^2r^2\}^2 = (e^2-\alpha^2)^2\{a^4(2e^2-\alpha^2)$$
$$-a^2e^2(e^2-\alpha^2)-e^4\alpha^2\}-\{a^2(e^2-\alpha^2)+2e^2\alpha^2]e^2(e^2-\alpha^2)r^2-e^4\alpha^2r^4$$
$$\pm a\alpha u\{(e^2-\alpha^2)[-a^2(3e^2-\alpha^2)+2e^4]+2e^4r^2\}$$

Die zn gleichem $r$ gehörigen 2 Werte von $v$ köunen demnach nur dann einander gleich sein, wenn $\alpha = 0$ ist.

Die Maxima und Minima von $r$ entsprechen der Gleichnng:

$$(a\alpha + e^2\cos\mu)\sin\mu = 0$$

und finden statt in den Euden der grossen Axe und in den 2 symmetrischen Pnnkten

$$\cos\mu = -\frac{a\alpha}{e^2}$$

Letztere existiren nicht, wenn nach abs. W.

$$\alpha > \frac{e^2}{a} \tag{8}$$

Alsdann wird $\cos\mu$ eindeutig in $r$, und da $v$ rational in $\cos\mu$ ist, auch $v$. Das Potential

$$v = \frac{2\gamma^2}{b^2}\frac{a^2 - e^2\cos^2\mu}{(a+\alpha\cos\mu)^2}\left(-\frac{e^2}{a} < \alpha < \frac{e^2}{a}\right) \tag{9}$$

entspricht also einer Bewegung von $P$ in der Ellipse

$$\left(\frac{x-\alpha}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 0$$

Damit aber diese Bewegung eintrete, ist nötig, dass sie in einem Punkte der Ellipse in tangentialer Richtung und mit der Flächengeschwindigkeit $\gamma$ beginne. Diese Bedingungen lassen sich dadurch ersetzen, dass die Gl. (2) für einen Zeitpunkt erfüllt sind. Bei willkürlicher Bestimmung der Integrationsconstanten würde man im allgemeinen keine elliptische Bahn finden.

Der Fall $\alpha = 0$ ist ein singulärer, weil er der Bedingung (8) nicht entspricht. Hier sind alle 4 Scheitel Maximal-Minimal-Punkte. Doch ist

$$r^2 = b^2 + e^2\cos^2\mu$$

$$v = 2\gamma^2\frac{a^2 - e^2\cos^2\mu}{a^2b^2} = 2\gamma^2\frac{a^2+b^2-r^2}{a^2b^2} \tag{10}$$

Der Bewegungsanfang ist willkürlich, weil man durch Bestimmung von $a$ und $b$ aus beliebigen Integrationsconstanten den Ausdruck (10) bilden kann.

Liegt $C$ auf der kleinen Axe der Ellipse, so ist alles analog. Man hat:

$$v = \frac{2\gamma^2}{a^2}\frac{b^2+e^2\sin^2\mu}{(b+\beta\sin\mu)^2}\left(-\frac{e^2}{b} < \beta < \frac{e^2}{b}\right)$$

$$\sin\mu = \frac{b\beta \pm v}{e^2}; \quad v^2 = a^2(\beta^2+e^2) - e^2r^2$$

Soll die Bahn ein Kreis sein, so wird $e = 0$, die $x$ Axe kann man durch den Mittelpunkt gehen lassen, mithin $\beta = 0$ setzen. Dann wird nach Gl. (7) und (9):

$$r^2 = a^2 + \alpha^2 + 2a\alpha\cos\mu$$

$$v = \frac{2\gamma^2}{(a+\alpha\cos\mu)^2} = \frac{4\gamma^2 a^2}{(r^2+a^2-\alpha^2)^2} \tag{11}$$

Die Integrationsconstanten müssen den Bedingungen wie bei der Ellipse entsprechen.

Ergänzen wir jetzt das zweite Kepler'sche Gesetz durch die Bestimmung b), so ist $\alpha = -e$; $\beta = 0$ zu setzen, und Gl. (7) giebt:

$$r = a - e\cos\mu$$

Das Potential (9) wird nun:

$$v = 2\gamma^2 \frac{2a-r}{b^2 r} = \frac{4\gamma^2 a}{b^2}\frac{1}{r} + \text{const.} \tag{12}$$

Dass daraus stets eine elliptische Bahn hervorgeht, ist bekannt. Man sieht aber an diesem Ausdruck, dass bei verschiedener Flächengeschwindigkeit der Parameter der Ellipse im Verhältniss des Quadrats derselben variirt.

Das ergänzte 2. Gesetz lässt wie gezeigt keine Erweiterung der Gültigkeit zu.

Das vierte Kepler'sche Gesetz setzt, um in Frage zu kommen, die elliptische Bahn, also nur den Teil a) des zweiten voraus. Wollten wir den Teil b) mit einschliessen, so könnte es sich nicht um Erweiterung handeln. Führen wir durch die Werte (1) die Annahme elliptischer Bahn in die zweite Gl. (2) ein, so kommt:

$$(ab + b\alpha\cos\mu + a\beta\sin\mu)\partial\mu = 2\gamma\,\partial t$$

integrirt:

$$2\gamma t = ab\mu + b\alpha\sin\mu - a\beta\cos\mu + \text{const.}$$

Das ist, bei gehöriger Bestimmung des Anfangs der $\mu$, von ganz gleicher Form mit der bekannten Relation zwischen der Zeit und excentrischen Anomalie $\mu$. Diese also findet eine sehr einfache Erweiterung. (Fortsetzung folgt).

R. Hoppe.

X.

# Ueber die von Challis vorgeschlagene neue Integrationsmethode von gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung und ihre Anwendung auf gewisse ungelöste Aufgaben aus der Variationsrechnung.

Von

**Magnus Ehrhorn,**

Candidat des höheren Schulamts aus Sumte bei Neuhaus a. d. Elbe.

---

Die vorliegende Arbeit enthält zunächst die Untersuchungen, die ich der Königlichen wissenschaftlichen Prüfungs-Commission zu Göttingen zur Erlangung der facultas docendi in der Mathematik eingereicht habe.

Von meinem hochverehrten Lehrer Herrn Prof. Dr. Stern, dem ich für manchen freundlichen Rat und Beistand zu grossem Danke verpflichtet bin, wurde mir die Aufgabe in folgender Fassung gestellt:

„Was ist in dem von Challis (London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine, July 1871) angeregten Streite über die Lösung gewisser Aufgaben aus der Variationsrechnung das Richtige?"

Dieses Thema habe ich im Folgenden nochmals bearbeitet und mit einigen Ergänzungen versehen.

---

Wenn wir die genetische Entwickelnng der verschiedenen mathematischen Disciplinen verfolgen, so finden wir meistens, dass irgend eine specielle Aufgabe den Anlass zur Entdeckung von neuen Zweigen der Wissenschaft gegeben hat. Indem man glaubte, ein bestimmtes Problem sei von besonderer Wichtigkeit und indem man daher auf seine Lösnng alle Kraft verwandte, geriet man im Laufe der Untersuchnng auf Schwierigkeiten, deren weitere Verfolgnng die vorhandenen Methoden bedeutend erweiterte und schliesslich einen besonderen selbständigen Zweig der Wissenschaft schuf. Diese Art der Entstehung ist noch besonders in der geschichtlichen Entwickelnng der Variationsrechnnng zu erkennen. Die berühmte Aufgabe, die Curve des raschesten Falls zwischen zwei in einer verticalen Ebene liegenden Punkten zu finden, welche von Johann Bernoulli seinen Zeitgenossen gestellt wurde[1], und die sich daran schliessenden isoperimetrischen Probleme von Jakob Bernoulli[2], welche die beiden Brüder so vielfach beschäftigten, leider aber auch in so bedauerliche Zwistigkeiten verwickelten[3], gaben den ersten Anstoss zur Variationsrechnung, welche dann von Euler[4]) und Lagrange[5]) in mehreren classischen Abhandlungen weiter ausgebildet und zu einem besonderen Zweige der höheren Analysis erhoben wurde. Bei der Verfolgung einer beinahe aus der Luft gegriffenen Aufgabe entdeckte man die wahren Probleme der Wissenschaft.

Die Geschichte dieser Aufgaben spiegelt sich wieder in der Geschichte derjenigen Aufgabe, die Veranlassung zu der hier zu behandelnden Controverse gegeben hat. Diese Aufgabe ist die folgende: „Zwei feste Punkte so durch eine Curve zu verbinden, dass sie bei ihrer Rotation um eine mit den beiden festen Punkten in derselben Ebene liegende feste Gerade einen Rotationskörper beschreibt, welcher bei constanter Oberfläche ein Maximum oder Minimum an körperlichem Inhalt ist.“ Diese Aufgabe insbesondere hat ein genaueres Studium der Theorie der discontinuirlichen Lösungen[6]) in der Variationsrechnung veranlasst, das noch keineswegs seinen Abschluss gefunden hat. In mehreren Heften des London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine[7]) von Airy, Challis, Todhunter, sowie in den betreffenden Lehrbüchern behandelt, deren sämmtliche Lösungen in der auf Veranlassung des Herrn Prof. Stern unternommenen Dissertation von A. Grevo[8]) als unzureichend zurückgewiesen werden, weil sie namentlich die durchaus notwendige Bildung der zweiten Variation unterlassen, wurde die Aufgabe wiederum von Challis im Juliheft 1871 desselben Journals untersucht. Die Abhandlung, welche hier einer Prüfung unterzogen werden soll, führt den Titel: On the application of a new integration of differential equations of the second order to some unsolved problems in the calculus of variations.

Wir wollen nun in dem Folgenden darzulegen versuchen, was in dem durch diese Abhandlung von Challis angeregten Streite über die Lösung gewisser Aufgaben aus der Variationsrechnung das Richtige ist, und uns in dem Gang der Untersuchung an die vorliegende Abhandlung halten.

Litteratur.

1) Acta eruditorum. 1696. p. 269.

2) Acta eruditorum. 1697. p. 214.

3) Acta eruditorum. 1698. p. 52; 1700. p. 261; 1701. p. 213; 1718. p. 15. Journal des savans. 1697. p. 462; 1698. p. 78, p. 172, p. 284, 355, 477. Mémoires de l'académie de Paris. 1706. p. 235.

4) Euler, Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes. Novi commentarii acad. Petrop. t. X.

5) Lagrange, Miscellanea Taurinensia. 1762. t. II. p. 173; 1770. t. IV. p. 163.

6) Todhunter, Researches in the calculus of variations, principally on the theory of discontinuous solutions.

7) Philosoph. Magazine, vol. 21. p. 12; vol. 22. p. 108; vol. 24. p. 172; vol. 31. p. 218, 425; vol. 32. p. 45, 199, 278.

8) Greve, Ein Problem aus der Variationsrechnung. 1875.

---

§. 1.

Bevor Challis die von ihm als neu vorgeschlagene Integrationsmethode von Differentialgleichungen zweiter Ordnung darlegt und anwendet, macht er auf zwei Hülfssätze aufmerksam, die er ebenfalls für neu hält und die er in die Lehrbücher der Integralrechnung einzuführen für notwendig hält. Diese beiden Hülfssätze sind die folgenden:

I. Die Formel $\int y\,dx$ kann den Inhalt irgend einer Curve zwischen bestimmten Grenzen der Abscissen ausdrücken, was auch immer der Anfang und die Richtung der rechtwinkligen Coordinaten sein mögen und wo $y$ einen oder mehrere Werte für einen gegebenen Wert von $x$ hat, wobei vorausgesetzt ist, dass die Integration immer längs *consecutiven* Punkten der Curve erstreckt wird.

II. Unter genau denselben Bedingungen kann $\int\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}dx$ die Länge einer Curve zwischen festen Grenzen der Abscissen aus-

drücken, wo die Wurzel immer mit positivem Zeichen genommen wird.

Zunächst wird es schwer fallen zu finden, was mit diesen Sätzen Neues gesagt sein soll. Dass das bestimmte Integral

$$\int_a^b y\,dx = \int_a^b f(x)dx$$

den Inhalt der Fläche ausdrückt, die von den Endordinaten $y = f(a)$ und $y = f(b)$, von der Curve $y = f(x)$ und von dem Stücke $(b - a)$ der Abscissenaxe begrenzt ist, und dass das bestimmte Integral

$$\int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \int_a^b ds$$

die Länge des Bogens der Curve $y = f(x)$ ausdrückt, der von den Ordinaten $y = f(a)$ und $y = f(b)$ abgeschnitten wird, ist eine Tatsache, die so lange bekannt wie die Integralrechnung überhaupt. Dies ist eben die längst bekannte geometrische Deutung dieser beiden bestimmten Integrale. Richtiger und für die Einführung in die Lehrbücher empfehlenswerter wäre eine genauere Formulirung der beiden Sätze ohne Zweifel gewesen, indem insbesondere die Grenzen zu dem Integralzeichen hinzugefügt werden mussten, weil ohne dieselben die Formeln nicht den richtigen Sinn haben. Challis legt durch Cursivschrift besonderen Nachdruck auf das Integriren längs consecutiven Punkten der Curve und hebt dieses als das wesentlich Neue hervor. Zunächst ist man nun versucht einzuwerfen, dass nie anders als längs der ganzen Curve von einem festen Anfangspunkte zu einem andern Endpunkte hin integrirt wird. Man hält stets an der Vorstellung fest, ein Bote gehe von $A$ (Fig. 1.) fortwährend längs der Curve bis $B$ und sammle die einzelnen Elemente $ds$ ein, sodass er am Schlusse seines Weges die ganze Länge der durchlaufenen Bogenstrecke eingesammelt habe. Welchen besondern Sinn Challis jedoch mit dieser integration along *consecutive* points of the curve verbindet, versucht er durch die Anwendung auf ein Beispiel klar zu machen. Er nimmt im ersten Quadranten einen Kreis an, für den also $x$ und $y$ beide positiv sind und will den Flächeninhalt eines Kreissegmentes z. B. (Fig. 2.) $FDEF$ berechnen. Er beginnt von $F$ aus in der Richtung $FD$ zu integriren und integrirt bis $D$. Da nun während dieses Intervalles $dx$ stets negativ, $y$ stets positiv ist, so wird die Summe der Inhalte aller elementaren Rechtecke, welche die Fläche $BFDA$ zusammensetzen, negativ und folglich ist die ganze Fläche $BFDA$ als negativ in der Rechnung in Betracht zu ziehen. Die weitere Integration von $D$ bis $E$ ergiebt dann, da jetzt $dx$ und $y$ beide positiv sind, die Fläche $ADEB$ als positiv. Die algebraische Summe der beiden Flächen giebt den Inhalt des Kreissegmentes $FDEF$,

Die Gedanken, welche hier zu Grunde liegen, sind ganz correct und die Methode ist auf jede beliebige Curve anwendbar. Wenn daher Challis hinzusetzt, dass, um den Inhalt der Fläche zu finden, welche von einer Curve *CDE* (Fig. 3.) und einer die Curve in zwei Punkten schneidenden Sehne *CE* begrenzt wird, man von dem einen Punkte *C* längs der Curve *CDE* bis zu dem andern Punkte *E* integrirt und dann wieder von *E* längs der Sehne *EFC* zurückintegrirt bis *C*, und wenn Challis dieses wieder als etwas Neues und Wertvolles darstellt, so ist der Grund dazu nicht einzusehen. Denn eine Gerade fällt hier ebenso unter den Begriff einer Curve wie jede andere; ihre Gleichung ist in diesem Falle durch die Lage der beiden gegebenen Endpunkte *C* und *E* eindeutig bestimmt und die Integration ausführbar. Indessen wird es kaum empfehlenswert und von irgend einem praktischen Vorteil sein, auch in diesem so einfachen Falle, so hartnäckig auf der Anwendung dieser Integrationsmethode zu bestehen, da die Fläche des Trapezes *ABEC* viel leichter nach einem elementar-geometrischen Satze berechnet werden kann.

Bei dem zweiten Hülfssatz, durch welchen die Länge einer Curve gefunden wird, ist die hervorgehobene Bedingung, dass längs consecutiven Punkten integrirt wird, vollständig selbstverständlich; denn unter Länge einer Curve versteht man doch eigentlich den Weg, welchen man durchlaufen muss, um von einem zu einem andern Punkte dieser Curve zu gelangen. Man kann natürlich die Curve in beliebige einzelne Stücke teilen und zuerst längs diesen einzeln integriren und die Resultate dann addiren, aber der Natur der Sache gemäss und dem wahren Begriffe der Länge eines durchlaufenen Weges entsprechend würde es nicht sein.

Auffallend ist jedoch, dass Challis bei dem zweiten Hülfssatz die Bedingung hinzufügt, dass die Quadratwurzel positiv genommen werden muss; dann hat gerade das Integral die gewünschte allgemeinere Bedeutung nicht, sondern erhält sie erst durch die später folgende Bemerkung, welche die erwähnte Bedingung wieder aufhebt, dass die Wurzel mit $dx$ das Zeichen wechseln muss, damit die Elemente des Integrals stets positiv sind.

Nachdem dann Challis ganz richtig gesagt, dass dieselben Betrachtungen, mutatis mutandis, auch für Polarcoordinaten gelten, erwähnt er auf Veranlassung von Todhunter eine Abhandlung von Delaunay [1]), in welcher dieselbe Methode und zwar zuerst angewandt ist. Challis wirft dieser Abhandlung Mangel an Allgemeinheit in Betreff dieses Gegenstandes vor, da nicht die Integration längs einer Sehne und in Bezug auf sich schneidende Teile verschiedener Curven erwähnt sei. Hiergegen müssen wir nun die schon einmal gemachte

Bemerkung wiederholen, dass längs einer Sehne gerade so gut integrirt werden kann, wie längs jeder andern Curve, dass dagegen die eigentliche Bedeutung und der Wert dieser Methode von Delaunay weit besser erkannt und hervorgehoben ist als von Challis. Delaunay führt diese Methode als eine neue Bezeichnungsweise ein, um zwei Ausdrücke, die er bei der Bildung der Variation eines vielfachen Integrals erhalten hat, in einen einzigen Ausdruck zu vereinigen und ein Doppelintegral einer Fläche in ein Randintegral zu verwandeln. Er betrachtet zur Erläuterung ein Doppelintegral

$$\int\int h.dx.dy,$$

welches sich über alle Punkte der Ebene $(x, y)$ erstreckt, die innerhalb der geschlossenen Curve $AmBnA$ (Fig. 4.) liegen. Seien nun $y_0$ und $y_1$ mit der Bedingung $y_1 > y_0$ die beiden Ordinaten dieser Curve, welche einem und demselben Werte der Abscisse entsprechen und seien $x_0$ und $x_1$ die Endabscissen $Oa$ resp. $Ob$, so kann das Doppelintegral in der Form

$$\int_{x_0}^{x_1} dx . \int_{y_0}^{y_1} h . dy$$

ausgedrückt werden. Wenn jetzt das unbestimmte Integral

$$\int h\, dy = H$$

und das bestimmte Integral

$$\int_{y_0}^{y_1} h dy = H_1 - H_0$$

ist, so ist

$$\int_{x_0}^{x_1} dx . \int_{y_0}^{y_1} h\, dy = \int_{x_0}^{x_1} H_1 dx - \int_{x_0}^{x_1} H_0 dx.$$

Indem nun das erste Integral $\int_{x_0}^{x_1} H_1 dx$ den Inhalt der Fläche $aAmBb$ darstellt und $\int_{x_0}^{x_1} H_0 dx$ den Inhalt der Fläche $aAnBb$, stellt die obige Differenz der beiden Integrale den Inhalt der durch eine geschlossene Curve begrenzten Fläche $AmBnA$ dar. Mit Berücksichtigung des bekannten Satzes

$$\int_a^b y\, dx = -\int_b^a y\, dx$$

nimmt die obige Differenz die Form an

$$\int_{x_0}^{x_1} H_1 dx + \int_{x_1}^{x_0} H_0 dx,$$

und diese beiden Glieder vereinigt Delaunay durch ein einziges Zeichen

$$\int_{(x)}^{(x)} H dx,$$

indem er darunter verstehen will, dass man von $A$ längs $AmB$ und von $B$ längs $BnA$ bis $A$ wieder zurückintegrirt. In Wirklichkeit muss man bei der Ausrechnung beide Integrationen einzeln für sich ausführen und dabei berücksichtigen, dass für $AmB$ die zu integrirende Function den Wert $H_1$ und für $BnA$ den Wert $H_0$ annimmt. Wir haben es also nur mit einer abkürzenden und zusammenfassenden Bezeichnungsweise zu tun, die allerdings ganz bequem ist, aber keineswegs die Bedeutung hat, welche ihr Challis zuzuschreiben scheint. Indem Delaunay noch hinzufügt, dass diese Bezeichnungsweise auch von Vorteil ist, wenn die den geschlossenen Bereich begrenzende Curve eine zur $Y$ Axe parallele Gerade in mehr als zwei Punkten schneidet, giebt er ihr auch die hinreichende Allgemeinheit.

Die richtige Anwendung dieser beiden Hülfssätze, wie wir sie p. 126. geben werden, macht Challis aber nicht oder unterlässt wenigstens ihre Anwendung vollständig klar darzulegen.

Litteratur.

1) Delaunay, Mémoire sur le calcul des variations. (Journal de l'école polytechnique. 1843. cah. 29. p. 48). (Vgl. auch Todhunter, History of the calculus of variations. 1860. p. 146).

§. 2.

Nach der Erörterung der obigen beiden Hülfssätze geht Challis zur Betrachtung der sogenannten Hauptgleichung der Variationsrechnung über, welche dazu dient, die abhängig Veränderliche $y$ so als Function von $x$ zu bestimmen, dass ein gegebener Ausdruck irgend welcher Art zu einem Maximum oder Minimum werde. Ist

$$J=\int_{x_1}^{x_2} V dx=\int_{x_1}^{x_2} f\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2}\ \cdots\ \frac{d^ny}{dx^n}\right)dx$$

zu einem Maximum oder Minimum zu machen, so betrachtet Challis die Hauptgleichung in der Form

$$(\delta y-p\delta x)\left\{\frac{\partial V}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial V}{\partial p}+\frac{d^2\frac{\partial V}{\partial q}}{dx^2}-\frac{d^3\frac{\partial V}{\partial r}}{dx^3}+\ldots\right\}$$
$$=(\delta y-p\delta x)A=0,$$

worin

$$p=\frac{dy}{dx},\quad q=\frac{d^2y}{dx^2},\quad r=\frac{d^3y}{dx^3}$$

gesetzt ist. Aus dieser Gleichung folgert er, dass, wenn die Aufgabe keine Relation zwischen $\delta x$ und $\delta y$ enthält, die Gleichungen

$$A = 0 \quad \text{und} \quad Ap = 0$$

in gleicher Weise zur Auffindung des gesuchten Zusammenhangs zwischen $x$ und $y$ dienen. Er sagt, wenn diese Gleichungen als identisch angenommen werden könnten, so würde es genügen, eine von ihnen zu integriren; aber obwohl in einigen Beispielen beide unmittelbar integrirbar seien und identische Relationen zwischen $x$ und $y$ ergeben, so sei in andern Fällen nur eine oder keine von beiden unmittelbar integrirbar, und es könne daher nicht von vornherein ihre Identität angenommen werden. Daher sei es notwendig, diejenigen Resultate in Betracht zu ziehen, welche aus jeder von ihnen einzeln oder aus beiden zusammen hergeleitet werden können.

Gegen diese Behauptungen erhebt Cayley[1]) mit Recht lebhaften Einspruch. Damit die obige Gleichung verschwindet, ist die einzige hinreichende und notwendige Bedingung $A = 0$. Auf den Factor $p$ machte Challis schon in einer früheren Abhandlung[2]) aufmerksam, wurde aber von Todhunter[3]) durch den Hinweis auf die zwei verschiedenen Formen der Hauptgleichung mit dieser Ansicht zurückgewiesen. Todhunter bemerkt, dass Challis dem Factor $p$ wahrscheinlich nicht die Bedeutung eines wesentlichen Factors beigelegt hätte, wenn er die andere Form der ersten Variation benutzt hätte

$$\delta J = \delta \int_a^b V dx = B + \int_a^b A \, \delta y . dx,$$

in welcher $A$ wieder unsere vorige Hauptgleichung bezeichnet, und $B$ die von den constanten Grenzen abhängigen Glieder darstellt. Da wir nun bei allen drei Aufgaben, welche Challis in der letzten Abhandlung untersucht, mit festen Grenzen zu tun haben, so können wir diese zweite Form der ersten Variation benutzen und finden aus ihr als Hauptgleichung nur $A = 0$. Aber selbst wenn wir die zuerst erwähnte Form der ersten Variation anwenden, welche sich auch auf variabele Grenzen bezieht und in welcher auch die independente Variabele $x$ einer Variation unterworfen gedacht wird, so ist fast in allen Lehrbüchern der Variationsrechnung (z. B. Stegmann p. 265—291) nachgewiesen, dass die beiden Gleichungen $A = 0$ und $Ap = 0$ vollkommen identische Resultate liefern. Eine genauere Betrachtung würde Challis gelehrt haben, dass auch der symbolische Unterschied der beiden Gleichungen, welchen er so sehr und öfters hervorhebt, nur ein scheinbarer ist. Denn zum Zwecke der Integration haben wir beide mit dem als Nenner auftretenden Differential $dx$ zu multipliciren, wodurch die eine

$$Adx = 0$$

und die andere

$$Apdx = Ady = 0$$

wird, und der symbolische Unterschied gleichfalls verschwunden ist. Die Gleichung $Apdx = Ady = 0$ ist keineswegs von einem höheren Grade, als $Adx = 0$; in $Ady = 0$ ist an Stelle des Differentials $dx$ in $Adx = 0$ das Differential $dy$ getreten, und die wahre Bedeutung des Factors $p$ besteht darin, dass er ein integrirender Factor ist. Um ein allgemeines Integral unser Hauptgleichung zu erhalten, würde es daher nicht erlaubt sein, den integrirenden Factor $p = 0$ zu setzen; dadurch würden wir nur eine singuläre Lösung erhalten. Ein Unterschied der beiden Gleichungen $Adx = 0$ und $Apdx = Ady = 0$ lässt sich in Bezug auf ihre Anwendbarkeit in folgender Weise feststellen.

I. Sowohl die Gleichung $Adx = 0$ als auch $Apdx = Ady = 0$ sind anwendbar, wenn in der Hauptgleichung weder $x$ noch $y$ vorkommen, sondern nur Constanten und Differentialquotienten. Dieser Fall tritt ein

1) wenn in dem zu einem Maximum oder Minimum zu machenden Integrale $\int_a^b V dx$ der Ausdruck $V$ weder $x$ noch $y$ enthält. Ein Beispiel hierfür ist die Aufgabe, zwischen zwei Punkten die kürzeste Linie zu finden;

2) wenn allgemein

$$V = ay + bxf(p) + cx^2\varphi(q) + dx^3\chi(r) + \ldots$$

Als Beispiel führen wir die von Challis unter I. und hier in §. 3. behandelte Aufgabe an. Die erste Integration von $Adx = 0$ liefert $x$ als Function der Differentialquotienten, während die erste Integration von $Apdx = Ady = 0$ uns $y$ als Function der Differentialquotienten liefert. Eine abermalige Integration dieser beiden neuen Differentialgleichungen liefert aber in beiden Fällen dasselbe Resultat.

II. Nur die Gleichung $Adx = 0$ ist anwendbar, wenn die Hauptgleichung $x$, aber nicht $y$ enthält. Hier würde die Multiplication mit $p$, wodurch $dy$ statt $dx$ eingeführt würde, unzweckmässig und ohne Erfolg sein. Dieser Fall tritt aber ein,

1) wenn in $V$ die Variabele $y$ überhaupt nicht vorkommt; dann fällt in der Hauptgleichung das erste Glied $\frac{\partial V}{\partial y}$ fort und die Hauptgleichung ist als ein vollständiges Differential unmittelbar integrabel.

Ein solches Beispiel bietet die berühmte Aufgabe der Brachistochrone dar, bei welcher

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_a^b \sqrt{\frac{1+p^2}{x}}\, dx$$

zu einem Maximum oder Minimum zu machen ist und wo sich als zu integrirende Hauptgleichung

$$\frac{d}{dx} \cdot \frac{p}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{1+p^2}} = 0$$

ergiebt;

2) wenn in $V$ ausser einer expliciten Function von $x$ und den Differentialquotienten die abhängig Variabele $y$ nur in der ersten Potenz und nicht mit ihren Differentialquotienten multiplicirt vorkommt; wenn also allgemein $V$ die Form hat

$$V = ay\varphi(x) + bf(x;\ p,\ q,\ r\ \ldots).$$

Ein Beispiel dieser Art ist das von Stegmann in seinem Lehrbuche der Variationsrechnung §. 33. behandelte Problem: Es wird diejenige Beschaffenheit von $y = f(x)$ gesucht, wodurch

$$J = \int_\alpha^\xi \left(\frac{2ay}{x^2} - p^2\right) dx$$

zu einem Maximum oder Minimum gemacht wird, wo für die festen Grenzen des Integrals die Bedingung $o < \alpha < \xi$ gelten soll.

III. Wir können nur die Gleichung $Apdx = Ady = 0$ benutzen und integriren, wenn in derselben $y$, aber nicht $x$ explicit vorkommt. Dieser Fall tritt ein, wenn allgemein

$$V = a\varphi(y) + bxf(p) + cx^2\varphi(q) + \ldots$$

Hierher gehören die von Challis unter II. und III. behandelten Aufgaben, die in §. 4. und 5. noch näher untersucht werden.

Hiermit dürfte klar gelegt sein, wann und warum wir in dem einen Falle beide Gleichungsformen, in einem andern Falle nur die eine von ihnen anwenden können.

## Litteratur.

1) Cayley, On a supposed new integration of differential equations of the second order. (The London Philos. Magazine. 1871. vol. 42. p. 197).

2) Challis, On an extension of the principles of the calculns of variations. (Dass. Journal. 1866. vol. 32. p. 46. und vol. 31. p. 226).

3) Todhunter, On a problem in the calculus of variations. (Dass. Journal. 1866. vol. 32. p. 205). Vgl. auch History of the calcnlus of variations. p. 13.

§. 3.

Nach diesen Vorerörterungen wenden wir uns zur Betrachtung und Discussion der drei von Challis behandelten Aufgaben. Dabei müssen wir noch bemerken, dass Challis bei der ersten und dritten Aufgabe nur nach einem Maximum, hei der zweiten nur nach einem Minimum fragt, ohne zn bedenken, dass die Regeln der Variationsrechnung einen solchen Zusammenhang zwischen $x$ und $y$ liefern, welcher einen gegebenen Ausdruck — mag derselbe ein bestimmtes Integral seiu oder nicht — zn einem Maximnm oder zu einem Minimum macht. Diese unrichtige Anfgabestellung ist vielleicht der Grnnd, weshalb Challis die durch Integration der Hauptgleichung gefundenen Gleichungen sofort als richtig annimmt und in so auffallender Weise die Bildung der zweiten Variation unterlässt, welche allein entscheiden kann, oh die gefnndenen Gleichungen ein Maximum oder ein Minimum oder keins von beiden liefern.

Anfgahe I. Zwei feste Punkte einer Ebene durch eine ebene Curve von gegebener Länge so zu verbinden, dass die von der Cnrve, den Ordinaten der festen Pnnkte und der Abscissenaxe begrenzte Fläche ein Maximnm oder Minimum an Inhalt ist.

Sind $x_1$ und $x_2$ die Abscissen der gegehenen festen Punkte, wo $x_2 > x_1$, so wird der Inhalt der Fläche dnrch

$$J = \int_{x_1}^{x_2} y\, dx$$

nnd die Länge der Cnrve durch

$$L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+p^2}\, dx$$

bestimmt. Dnrch ein Versehen setzt Challis, wie schon Todhunter bemerkt, die gegebene Länge dieser Cnrve k l e i n e r als die die beiden Punkte verhindende gerade Linie voraus, was natürlich g r ö s s e r heissen muss. Bezeichnen wir mit $a$ eine willkürliche Constante, deren Bedentung später näher zu bestimmen ist, so ist nnter Benntzung des Euler'schen Knnstgriffes für isoperimetrische Anfgaben, der zu einem Maximum oder Minimum zu machende Ausdruck

$$\int_{x_1}^{x_2} V dx = \int_{x_1}^{x_2} (y + a\sqrt{1+p^2})\,dx.$$

Aus dieser Form ist ersichtlich, dass mit der vorliegenden Aufgabe das reciproke Problem auf gleiche Weise gelöst wird: Von allen Curven, welche mit den festen Ordinaten zweier gegebener Punkte und der Abscissenaxe eine Fläche von constantem Inhalt einschliessen, die kürzeste zu finden.

Wir erhalten in beiden Fällen als bedingende Hauptgleichung

$$\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial V}{\partial p} = 1 - \frac{d}{dx}\frac{ap}{\sqrt{1+p^2}} = 0 = A$$

Die erste Integration von

$$Adx = dx - d\frac{ap}{\sqrt{1+p^2}} = 0$$

ergiebt

$$x - c = \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}}.$$

also $x$ als Function von $p$. Aus dieser Gleichung folgt

$$dy = \frac{\pm(x-c)}{\sqrt{a^2-(x-c)^2}}.$$

wovon das Integral

$$y - c' = \mp\sqrt{a^2-(x-c)^2}$$

oder

$$(x-c)^2 + (y-c')^2 = a^2$$

ist. Die Integration der Gleichung

$$Apdx = Ady = dy - \frac{apdp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

ergiebt

$$y - c' = \pm\frac{a}{\sqrt{1+p^2}},$$

also $y$ als Function von $p$. Durch nochmalige Integration erhalten wir dieselbe Gleichung wie vorhin

$$(x-c)^2 + (y-c')^2 = a^2.$$

Da die Grenzen als fest angenommen sind, so sind keine weiteren Bedingungsgleichungen zu erfüllen. Die Integrationsconstanten $c$ und $c'$, welche die Coordinaten des Kreismittelpunktes darstellen, sowie die vorhin willkürlich gelassene isoperimetrische Constante $a$, welche sich jetzt als der Radius des gefundenen Kreises ergeben hat, sind durch die gegebene Länge der Curve und durch die Lage der beiden

festen Punkte, durch welche die Curve gehen soll, eindeutig bestimmt. Weil nun die drei willkürlichen Constanten immer bestimmbar sind, so behauptet Challis, dass der gefundene Kreisbogen in allen Fällen die Fläche zu einem Maximum macht, und unterlässt eine Untersuchung der zweiten Variation, obwohl in den von ihm angeführten Untersuchungen von Legendre[1]), Stegmann[2]), Todhunter[3]) zum grössten Teile die Sache erledigt ist. Die zweite Variation hat zunächst die allgemeine Form:

$$\delta^2 \int_{x_1}^{x_2} V dx = \int_{x_1}^{x_2} \delta^2 V dx$$

und es ist

$$\delta^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \delta y^2 + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial p} \delta y \delta p + \frac{\partial^2 V}{\partial p^2} \delta p^2.$$

Da nun

$$\frac{\partial V}{\partial y} = 1,$$

also

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \quad \text{und auch} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial p} = 0$$

ist, so reducirt sich die zweite Variation auf

$$\delta^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial p^2} \delta p^2 = a \frac{\partial^2 \sqrt{1+p^2}}{\partial p^2} \delta p^2 = a \frac{1}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} \delta p^2.$$

Wir brauchen also nicht das Jakobi'sche Kriterium hier anzuwenden. Nun ist, wie vorhin gesehen, $a$ der Radius des Kreises und wird als solcher, wie der Krümmungsradius jeder Curve, durch

$$a = \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}$$

ausgedrückt, sodass

$$\delta^2 V = \frac{1}{q} \delta p^2$$

wird. Das Vorzeichen dieses Ausdrucks hängt nun ab von dem Vorzeichen von $q$. Die Bedingung $q > 0$ drückt aus, dass die Curve ihre convexe Seite der $X$ Axe zukehrt; ist $q < 0$, so wendet der Kreis seine concave Seite der $X$ Axe zu. Im ersten Falle haben wir ein Minimum, im zweiten ein Maximum. (Vgl. Fig. 5. u. 6.)

Es ist nun durch die Betrachtung der Figuren leicht ersichtlich, dass der Kreisbogen in dem ganzen Verlaufe zwischen den beiden gegebenen Punkten entweder nur seine Concavität oder nur seine Convexität der $X$ Axe nur so lange zukehrt, als die gegebene Länge unterhalb einer gewissen leicht zu bere[illegible] Grenze liegt, so dass der Kreisbogen stets innerhalb des [illegible] begrenzten

Parallelstreifens liegt. Dieser Umstand nun hat Veranlassung zu einer Controverse zwischen Challis und Todhunter gegeben. Wie es mir scheint, ist Stegmann (§. 40. u. 41.) der Meinung gewesen, dass der über die Ordinaten hinausgehende Kreisbogen überhaupt kein Maximum giebt, und Todhunter schliesst sich offenbar dieser Ansicht an, obwohl er später sagt, dass er die Aufgabe unter der Bedingung habe lösen wollen, dass die Curve vollständig in dem von den Ordinaten begrenzten Parallelstreifen enthalten sei. Aus seiner Aufgabestellung lässt sich dieses jedoch nicht entnehmen. Legendre erwähnt ausdrücklich beide Fälle, wo die Curve vollständig innerhalb des Parallelstreifens liegen soll oder nicht. Für den ersten Fall giebt er ausführlich die richtige Herleitung, deren Resultate wir nur annehmen können und die wir daher hier übergehen. Diese Betrachtungen finden stets Anwendung für den Fall eines Minimums, da hier die Curve ja gar nicht ausserhalb des Parallelstreifens liegen kann. Aber wenn für den Fall des Maximums die Aufgabe ohne die Bedingung, dass die Curve vollständig in dem Parallelstreifen enthalten sei, gelöst werden soll, so ist eine vollständige Lösung mit Hülfe der Variationsrechnung, soviel mir bekannt, noch nicht geliefert. Challis hat vielleicht das Richtige gemeint, aber da er ganz unbegreiflicher Weise unterlässt, die zweite Variation zu untersuchen, so hat er den Streit nicht entschieden, was wir im Folgenden endgültig tun werden.

Wir nehmen gleich die gegebene Länge der Curve so gross an, dass der Kreis über beide Ordinaten hinaus sich erstreckt (Fig. 7.). Dann ist von $C$ bis $E$ der zweite Differentialquotient $q > 0$, von $E$ bis $F$ ist $q < 0$ und von $F$ bis $D$ ist wieder $q > 0$. Also wechselt $\delta^2 V$ mit $q$ im Verlaufe der gefundenen Verbindungscurve zweimal das Zeichen. Aber damit wechselt die zweite Variation des bestimmten Integrals

$$\delta^2 \int_{x_1}^{x_2} V dx$$

noch keineswegs das Zeichen. Denn indem wir mit $V_1$ denjenigen Ausdruck bezeichnen, welcher sich auf $CE$ bezieht und mit $V_2$, $V_3$ die bez. Ausdrücke für $EF$ und $FD$ bezeichnen, müssen wir unter Zugrundelegung der beiden in §. 1. näher erörterten Hülfssätze unser die Fläche $ACEFDB$ und die Länge der Curve $CEFD$ darstellendes Integral jetzt anders schreiben. Dann wird die zweite Variation

$$\delta^2 \int_{(x_1)}^{(x_2)} V dx = \delta^2 \int_{x_1}^{x_3} V_1 dx + \delta^2 \int_{x_3}^{x_4} V_2 dx + \delta^2 \int_{x_4}^{x_2} V_3 dx$$

und dieser ganze Ausdruck ist stets negativ, da $V_2$ negativ ist und zu den positiven $V_1$ und $V_3$ ein negatives $dx$ gehört. Hiermit ist auch durch die Variationsrechnung bewiesen, dass auch der über die

Ordinaten hinausgehende Kreisbogen wirklich ein Maximum liefert, und dass uns der Wechsel des Vorzeichens des zweiten Differentialquotienten darüber nicht im Zweifel lässt.

Die Betrachtungen mit Zugrundelegung der Polarcoordinaten, auf welche Todhunter hinweist, führen nur zu derselben Schwierigkeit, die auch nur durch eine analoge Umänderung des bestimmten Integrals zu heben ist. Anderweitige richtige Beweise sind bereits länger bekannt; man vergleiche insbesondere die schönen Entwickelungen Steiner's in Crelle's Journal 1838. Bd. 18. p. 281.

Litteratur.

1) Legendre, Mémoire sur la manière de distinguer les maxima des minima dans le calcul des variations. (Histoire de l'acad. royale des sciences. 1786. p. 27.

2) Stegmann, Lehrbuch der Variationsrechnung. p. 171.

3) Todhunter, History of the calculus of variations, art. 202 u. 366.

§. 4.

Die zweite Aufgabe, welche Challis behandelt, ist die folgende: Zwei feste Punkte durch eine ebene Curve so zu verbinden, dass sie bei ihrer Rotation um eine in derselben Ebene liegende Gerade einen Körper mit kleinster Oberfläche beschreibt.

Die allgemeine Gleichung der Oberfläche einer Rotationsfläche ist

$$O = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y\, ds.$$

Durch Benutzung der Gleichung

$$ds^2 = dx^2 + dy^2,$$

woraus

$$\delta . ds = \frac{dy}{ds} d . \delta y$$

folgt, und durch partielle Integration erhalten wir als erste Variation

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} y ds = \left[ y \frac{dy}{ds} \delta y \right]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \left( 1 - \frac{d}{ds} \cdot \frac{y\, dy}{ds} \right) \delta y\, ds = 0$$

Die Integration der Hauptgleichung

Digitized by Google

$$1-\frac{d}{ds}\cdot\frac{y\,dy}{ds}=0$$

giebt

$$s+c=y\frac{dy}{ds},$$

woraus

$$(s+c)^2=y^2+c'$$

folgt, welches die Gleichung einer Kettenlinie ist. Die Gleichung der gesuchten Curve in rechtwinkligen Coordinaten erhalten wir, wenn wir die folgende Umformung mit dem die Rotationsoberfläche darstellenden Integral vornehmen. Es ist

$$O=2\pi\int_{x_1}^{x_2}y\,ds=2\pi\int_{x_1}^{x_2}y\sqrt{1+p^2}\,dx=2\pi\int_{x_1}^{x_2}V\,dx.$$

Dann ergiebt sich als Hauptgleichung

1) $$A=\frac{\partial V}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial V}{\partial p}=\sqrt{1+p^2}-\frac{d}{dx}\frac{yp}{\sqrt{1+p^2}}=0,$$

deren erstes Integral

2) $$y=c\sqrt{1+p^2}$$

sich mit Hülfe des integrirenden Factors $p$ aus $Ap=0$ leicht ergiebt. Durch nochmalige Integration folgt als allgemeines Integral

3) $$y=\frac{c}{2}\left(e^{\frac{x-c_1}{c}}+e^{-\frac{x-c_1}{c}}\right)$$

Dies ist die Gleichung einer Kettenlinie, deren Directrix die gegebene Rotationsaxe ist. Wir können nun auf der gegebenen Geraden, die wir bereits als $X$ Axe gewählt, den Coordinatenanfang noch so wählen, dass die Constante $c_1=0$ wird; dann wird die Gleichung noch einfacher

4) $$y=\frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}}+e^{-\frac{x}{c}}\right)$$

Für $x=0$ nimmt dann die Ordinate den kleinsten Wert $c$ an und die Curve ist zu beiden Seiten der $Y$ Axe symmetrisch. In der allgemeinen Gleichung 3) sind die Constanten $c$ und $c_1$ aus der Bedingung zu bestimmen, dass die Curve durch die beiden gegebenen Punkte gehen muss. Damit aber diese Bedingung durch eine Kettenlinie, welche zu gleicher Zeit die gegebene Gerade zur Directrix hat, erfüllt werden kann, sind die Punkte in ihrer Lage einer gewissen Beschränkung unterworfen. Sie müssen nämlich innerhalb eines gewissen Winkelraums liegen, den wir erhalten, wenn wir durch den in Glei-

chung 4) gewählten Coordinatenanfang zwei gerade Linien ziehen, die mit der $X$ Axe die Winkel

$$\alpha = 56^0\,28' \text{ resp. } (\pi-\alpha)$$

bilden (Fig. 8. $ON$ und $OM$). Liegen die Punkte innerhalb dieses Winkelraums, so sind im allgemeinen zwei Kettenlinien möglich; aber nur die obere liefert eine Rotationsoberfläche mit minimalem Inhalt. Fallen die beiden Kettenlinien in eine einzige zusammen, so liefert diese keine Fläche von der verlangten Eigenschaft. Diese Resultate ergeben sich aus einer Untersuchung der zweiten Variation, welche zeigt, dass die Kettenlinie nur dann ein Minimum liefert, wenn die in den gegebenen Punkten an die Kettenlinie gezogenen Tangenten sich oberhalb der Rotationsaxe schneiden. Da diese Untersuchungen, welche keinerlei Schwierigkeiten bieten, bereits früher vollständig ausgeführt sind, — z. B. in den Lehrbüchern der Variationsrechnung von Moigno[1]) und Dienger[2]), deren Methoden und Resultate wir hier nur annehmen können, — so können wir sie hier füglich übergehen, indem unsere Hauptaufgabe sein soll, die von Challis in der erwähnten Abhandlung gegebenen Untersuchungen und Resultate zu berichtigen. Ein Maximum kann bei dieser Aufgabe nicht stattfinden, da mit beliebig wachsender Länge der Verbindungslinie auch die Rotationsoberfläche immer mehr wächst. Ein Minimum aber ist deshalb möglich, weil, wie Stegmann sehr richtig bemerkt (a. a. O. p. 187), „zwar die Peripherie eines von einem Curvenelement während der Drehung um die Rotationsaxe beschriebenen Flächenelementes desto kleiner ausfällt, je tiefer das Curvenelement mittelst einer Verlängerung der Linie herabgesenkt wird, weil aber andererseits eine Verlängerung der Linie nicht eine Verkleinerung, sondern eine Vergrösserung der Rotationsoberfläche bewirkt.“ Bei dem Minimum tritt so eine Compensation in der Länge und in der Tiefe des Herunterhängens der Kettenlinie ein, was bei einem Maximum nicht der Fall ist.

Die eben angeführten Resultate hält Challis nicht für richtig, weil sie nicht aus der Hauptgleichung

$$A = \sqrt{1+p^2} - \frac{d}{dx}\frac{yp}{\sqrt{1+p^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} - \frac{yq}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} = 0,$$

sondern erst nach Multiplication mit dem Factor $p$ aus $Ap = 0$ durch Integration erhalten worden sind. Er behauptet die zwei Gleichungen $A = 0$ und $Ap = 0$ können bei dieser Aufgabe nicht

ohne Unterschied gebraucht werden, als ob sie äquivalente Gleichungen wären und führt für diese Behauptung zwei Gründe an.

I. Die Gleichnng $Ap = 0$ sei ein vollständiges Differential und $A = 0$ nicht; beide Gleichungen seien von verschiedenem Grade.

Wir haben p. 122. bereits auseinandergesetzt, dass die Gleichung $A = 0$ deshalb kein exactes Differential ist, weil neben den Differentialen $dx$ und $dp$ noch die Variabele $y$, aber nicht $x$ explicite vorkommt. Durch den integrirenden Factor $p$ wird an Stelle des Differentials $dx$ das Differential $dy$ gesetzt, wodurch die Gleichungen aber keineswegs von verschiedenem Grade, ja nicht einmal symbolisch verschieden werden.

II. Wenn wir das erste Integral von $Ap = 0$ in $Ap = 0$ und in $A = 0$ substituiren, so sollen die beiden dann resultirenden Gleichungen nicht in derselben Weise erfüllt werden. Durch die Substitution von $y = c\sqrt{1+p^2}$ in $Ap = 0$ erhalten wir

a) $$\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} - \frac{p \cdot q \cdot c}{1+p^2} = 0$$

und durch dieselbe Substitution in

$$A = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} - \frac{yq}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

erhalten wir

b) $$\frac{1}{\sqrt{1+p^2}} - \frac{q \cdot c}{1+p^2} = 0.$$

Diese beiden Gleichungen a) und b) hält Challis nun wieder für verschieden und nicht identisch, weil die Gleichung a) durch $p = 0$, aber nicht durch $p = \infty$, und die Gleichung b) durch $p = \infty$, aber nicht durch $p = 0$ erfüllt werde. Hiergegen müssen wir nun zweierlei einwenden.

1. Nach den durch die Untersuchung der zweiten Variation sich ergebenden Resultaten kann der Differentialquotient $p = \frac{dy}{dx}$ den Wert unendlich für im Endlichen liegende Punkte gar nicht annehmen, und wir dürfen also daher $p = \infty$ weder in a) noch in b) substituiren.

2. Ausser der Gleichung a) wird auch die Gleichung b) durch $p = 0$ erfüllt. Denn durch die Substitution von $p = 0$ in b) erhalten wir die Gleichnug

$$1 - q \cdot c = 0,$$

welche erfüllt wird, wenn $q = \frac{1}{c}$ ist. Bei der Kettenlinie wird nun $p = 0$ für den tiefsten Punkt derselben; für diesen Punkt ist dann ferner der Krümmungsradius

$$\varrho = -\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q} = -\frac{1}{q}$$

Substituiren wir hierin $q = \frac{1}{c}$ so wird $\varrho = -c$. Die Constante $c$ hat aber, wie bereits erwähnt, die geometrische Bedeutung, dass sie gleich der kleinsten Ordinate ist, und für diesen Punkt ist zugleich anderweitig bekannt, dass der Krümmungsradius der Kettenlinie gleich und entgegengesetzt der Ordinate ist. Daher wird auch die Gleichung b) durch die Substitution von $p = 0$ erfüllt, und die beiden Gleichungen sind auch in dieser Beziehung als identische zu betrachten. — Da Challis nicht dieser Meinung ist, so sucht er durch eine von ihm als neu bezeichnete Integrationsmethode aus $Adx = 0$ allein, ohne Zuhülfenahme des integrirenden Factors $p$, die endgültige Gleichung der Curve zu finden. Diese Methode besteht darin, dass er aus der Hauptgleichung $A = 0$ durch die entsprechenden Substitutionen zuerst die Differentialgleichung der Evolute und aus dieser rückwärts die Gleichung der Evolventen herleitet. Die Gleichung der Evolventen soll dann das vollständige Integral der ursprünglichen Hauptgleichung und somit die Lösung des Problems darstellen. Im allgemeinen können wir dieses Integrationsverfahren nur als richtig bezeichnen, aber wir müssen verlangen, dass wir durch diese Integration der Gleichung $Adx = 0$ dieselbe Curve erhalten, wie durch die Integration mit Hülfe des integrirenden Factors, und dass natürlich sämmtlichen Bedingungen der Aufgabe genügt wird. Alles dieses zeigt Challis nicht. Gehen wir indessen seine einzelnen Betrachtungen durch.

Seien $x'$, $y'$ die Coordinaten desjenigen Punktes der Evolute, welcher der Krümmungsmittelpunkt des Punktes $x$, $y$ der Evolvente ist; dann gelten allgemein die Gleichungen

$$y - y' = -\frac{1+p^2}{q}.$$

$$x - x' = -p(y - y').$$

Mit Hülfe der Gleichung

$$A = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} - \frac{y \cdot q}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

oder

$$1 + p^2 = y \cdot q$$

ergiebt sich

$$y' = 2y$$

und

$$x - x' = py,$$

oder da

$$p = \frac{dy}{dx} = -\frac{dx'}{dy'} = -\frac{1}{p'},$$

so erhalten wir

$$x = x' - \frac{y'}{2p'}.$$

Daher ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{2}.dy'}{d\left(x' - \frac{y'}{2}\cdot\frac{1}{p'}\right)} = -\frac{1}{p'}$$

oder

$$\frac{dy'}{y'} + \frac{dp'}{p'(1+p'^2)} = 0,$$

woraus durch Integration

1) $$dx' = \pm\, dy'\left(\frac{y'^2}{k^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}}$$

folgt, wenn $k$ die willkürliche Integrationsconstante bezeichnet. Durch nochmalige Integration erhalten wir

2) $$x' + c' = \pm\frac{y'}{2}\left(\frac{y'^2}{k^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{k}{2}\log\left(\frac{y'}{k} \pm \sqrt{\frac{y'^2}{k^2} - 1}\right)$$

als Gleichung der Evolute, wenn $c'$ eine zweite willkürliche Integrationsconstante bezeichnet, und wenn wir mit Cayley einen kleinen Fehler verbessern, indem $\frac{y'}{2k}$ anstatt $\frac{y'}{2}$ gedruckt ist. Diese Gleichung der Evolute ist wohl zuerst von Goldschmidt[3]) aufgestellt.

Die Gleichung 1) schreibt Challis dann in der Form

$$\pm\left(\frac{y'^2}{k^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{dx'}{dy'} = -\frac{dy}{dx} = -p,$$

woraus

3) $$\frac{y'}{k} = \sqrt{1+p^2}.$$

Da nun

$$x' = x + p(y - y') = x + p(y - k\sqrt{1+p^2}),$$

so erhält er durch Substitution in die Gleichung der Evolute

4) $$x + c' = -py + \frac{kp}{2}\sqrt{1+p^2} + \frac{k}{2}\log(p + \sqrt{1+p^2})$$

als Differentialgleichung sämmtlicher Evolventen obiger Evolute, die

durch 2) bestimmt ist, oder der Parallelcurven der auf Seite 128. gefundenen Kettenlinie.

Challis leitet auch aus dem ersten Integral der Gleichung $Apdx = Ady = 0$ d. h. aus der Differentialgleichung

$$y = c\sqrt{1+p^2}$$

die Differentialgleichung der Parallelcurven her und findet

$$x + c' = -py + cp\sqrt{1+p^2} + c\log(p+\sqrt{1+p^2}),$$

eine Gleichung, die mit 4) identisch ist, wenn die willkürliche Constante $c = \frac{k}{2}$ gesetzt wird, was immer möglich ist. Wenn diese Gleichung integrirt wäre, sagt Challis, so würde das Integral im Stande sein, unser Problem durch eine continuirliche Curve zu lösen. Aber Challis giebt das vollständige Integral nicht, wie die Integration dieser Gleichung die Kräfte der Analysis überhaupt wohl überschreiten dürfte. Wir müssen uns daher mit einer der von Challis angegebenen Hülfsconstructionen begnügen. Aber welche Parallelcurve und zu welcher Kettenlinie müssen wir sie nehmen? In dem vollständigen Integral der Gleichung $Ap = 0$, d. h. in

$$y = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x-c_1}{c}} + e^{-\frac{x-c_1}{c}}\right)$$

sind zwei willkürliche Integrationsconstanten, von denen die eine $c_1$ sich durch passende Wahl des Coordinatenanfangs noch auf Null reduciren lässt und die andere $c$ von der speciellen Kettenlinie abhängt, welche durch die beiden gegebenen Punkte geht und die gegebene Gerade zur Directrix hat. Geht aber die Kettenlinie selber durch diese Punkte, so können wir keine Parallelcurve mehr construiren, welche dasselbe tut; ausgenommen die Parallelcurve im Abstande $h = 0$, welche jedoch die Kettenlinie selber wieder ist.

Ebenso unbrauchbar ist die andere von Challis angegebene Hülfsconstruction. Welches ist denn diejenige Evolute, durch deren Abwickelung diejenige Evolvente gefunden werden soll, welche unsere Aufgabe erfüllt, d. h. eine Curve ist, die durch zwei gegebene Punkte geht und bei ihrer Rotation um eine gegebene Gerade einen Körper mit kleinster Oberfläche beschreibt? Durch welche Bedingungen sind die zwei willkürlichen Constanten $c'$ und $k$ und jene dritte Constante bestimmt, welche die willkürliche constante Differenz zwischen dem Krümmungsradius der Evolvente minus der Bogenlänge der Evolute darstellt? Das vollständige Integral der Gleichung 4) würde drei willkürliche Integrationsconstanten enthalten und kann deshalb gar

kein Integral der Differentialgleichnng $A = 0$ sein, welche nur von der zweiten Ordnung ist. Der von Challis als Beweis für seine Ansicht geltend gemachte Umstand, dass er auch ans $Ap = 0$ dieselbe Differentialgleichnng der Evolventen hat herleiten können wie ans $A = 0$, hätte ihn eigentlich auf einen Fehler in seinem Gedankengange aufmerksam machen müssen; denn eine durch verschiedene Snhstitutionen ans einer Differentialgleichung nur hergeleitete Formel ist doch deshalb noch kein Integral derselben. Zu einer auf irgend eine Weise befriedigenden Lösung gelangt Challis also nicht, indem er nns weder die endgültige Gleichnng der Curve in Cartesischen Coordinaten, noch eine überhanpt nur ausführbare Construction derselben giebt.

Dagegen zeigt Cayley[4]), dass man nnter Benutznng von Formeln, die einzig nnd allein aus $Adx = 0$ hergeleitet sind, ans der Gleichung der Evolute dieselbe Differentialgleichnng der Kettenlinie erhält, wie durch Integration aus $Apdx = 0$. Das ganz richtige Verfahren Cayley's glanben wir noch wesentlich durch den Hinweis auf Gleichung 3) p. 132. abkürzen zu können. Diese Gleichung

$$\frac{y'}{k} = \sqrt{1+p^2}$$

ist einzig nnd allein aus $A = 0$ erhalten worden, ohne dass der Factor $p$ dabei benutzt ist. Durch die Snhstitution von $y' = 2y$ folgt unmittelbar

$$y = \frac{k}{2}\sqrt{1+p^2},$$

eine Gleichnng, welche mit der Differentialgleichnng der Kettenlinie

$$y = c\sqrt{1+p^2}$$

übereinstimmt, sobald wir die willkürliche Integrationsconstante $\frac{k}{2} = c$ setzen, was immer möglich ist. Daher hat diese neue Integrationsmethode die von Challis angezweifelte Identität der beiden Gleichungen $A = 0$ und $Ap = 0$ geradezu bewiesen, nnd wenn überhanpt unsere zweite Anfgabe lösbar ist, so kann die verlangte Curve nnr eine Kettenlinie sein.

Litteratnr.

1) Moigno, Leçons de calcul différ. et de calcnl intégral, t. IV.

2) Dienger, Grundriss der Variationsrechnung. p. 15.

3) Goldschmidt, Determinatio superficiei minimae rotatione curvae data duo puncta jungentis circa datnm axem ortae. Göttingen 1831.

4) Cayley. vgl. §. 2.

§. 5.

**Aufgabe III.** Zwei gegebene Punkte einer Ebene so durch eine ebene Curve zu verbinden, dass dieselbe bei ihrer Rotation um eine in derselben Ebene liegende Gerade einen Rotationskörper beschreibt, welcher bei gegebener constanter Oberfläche ein Minimum oder Maximum an körperlichem Inhalt ist.

Analytisch ist mit dieser Aufgabe die reciproke identisch, wenn der körperliche Inhalt gegeben ist und die Oberfläche ein Minimum oder Maximum an Inhalt sein soll. In beiden Fällen haben wir das bestimmte Integral

$$\int_{x_1}^{x_2} V dx = \int_{x_1}^{x_2} (y^2 - 2ay\sqrt{1+p^2})dx$$

zu einem Maximum oder Minimum zu machen, wenn wir wieder die gegebene Gerade zur $X$ Axe nehmen, mit $x_1$ und $x_2$ die Abscissen der beiden gegebenen Punkte und mit $-2a$ die später zu bestimmende isoperimetrische Constante bezeichnen. Als Hauptgleichung erhalten wir

$$1)\qquad A = \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial V}{\partial p}$$

$$= y - a\sqrt{1+p^2} + \frac{d}{dx}\frac{ayp}{\sqrt{1+p^2}} = 0$$

$$= y - \frac{a}{\sqrt{1+p^2}} + \frac{ayq}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

Da in dieser Gleichung $y$ explicite vorkommt, so müssen wir wieder das Differential $dx$ durch $dy$ ersetzen und zu diesem Zwecke mit $pdx$ multipliciren. Wir erhalten dann als Hauptgleichung

$$2)\qquad Apdx = Ady$$

$$= ydy - \frac{ady}{\sqrt{1+p^2}} + \frac{aypdq}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

und als erstes Integral

$$3)\qquad y^2 = \frac{2ay}{\sqrt{1+p^2}} \pm b^2,$$

wenn wir mit $\pm b^2$ die willkürliche Integrationsconstante bezeichnen. Hieraus folgt

$$4)\qquad dx = \frac{y^2 \mp b^2}{\sqrt{4a^2y^2 - (y^2 \pm b^2)^2}}.$$

Dies ist eine elliptische Differentialgleichung, deren Integration auf elliptische Functionen führt.

Nun ist schon früher von Delaunay[1]) gezeigt worden, dass die Rollcurve, welche der Brennpunkt einer auf einer festen Geraden ohne Gleiten rollenden Ellipse oder Hyperbel beschreibt, genau dieselbe Differentialgleichung hat. Sind die Halbaxen der beiden rollenden Kegelschnitte $a$ und $b$, so müssen wir für die Rollcurve der Brennpunkte der Ellipse in der Differentialgleichung 4) $+b^2$ und für die der Hyperbel $-b^2$ nehmen (Fig. 9. und 10.). Die willkürliche isoperimetrische Constante $a$ hat danach die geometrische Bedeutung, dass sie die grosse Halbaxe der rollenden Ellipse oder Hyperbel ist, und die verschiedenen Vorzeichen von $a$ beziehen sich auf die sich nur durch ihre Lage unterscheidenden, sonst congruenten Rollcurven der beiden Brennpunkte eines und desselben Kegelschnittes. Durch Einführung der Excentricität

$$e = \frac{\sqrt{a^2 \pm b^2}}{a}$$

können wir die Differentialgleichung 4) umformen in

$$dx = \frac{\{y^2 \mp a^2(1-e^2)\}dy}{\sqrt{4a^2y^2 - (y^2 \mp a^2(1-e^2))^2}}$$

$$= \frac{\{y^2 \mp a^2(1-e^2)\}dy}{\sqrt{\{y^2 - a^2(1+e)^2\}\{a^2(1-e)^2 - y^2\}}}$$

Substituiren wir hierin

$$5) \qquad y^2 = a^2(1-e)^2 \sin\varphi^2 + a^2(1+e)^2 \cos\varphi^2,$$

so erhalten wir

$$y = a(1+e)\sqrt{1 - \frac{4e}{(1+e)^2}\sin\varphi^2}$$

$$= a(1+e)\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2} = a(1+e)\Delta(k,\varphi),$$

$$dy = -a(1+e)\frac{k^2 \sin\varphi \, . \cos\varphi \, . d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

$$= -a(1+e)\frac{k^2 \sin\varphi \, . \cos\varphi \, . d\varphi}{\Delta(k,\varphi)},$$

$$dx = -a(1+e)\Delta(k,\varphi)d\varphi \mp a(1-e)\frac{d\varphi}{\Delta(k,\varphi)}$$

Nehmen wir hierin das obere Zeichen, so erhalten wir durch Integration

6) $$x + \text{Const} = -a(1+e)E(k, \varphi) - a(1-e)F(k, \varphi);$$

für das untere Zeichen erhalten wir

7) $$x + C = -a(1+e)E(k, \varphi) + a(1-e)F(k, \varphi).$$

Hierin bezeichnen $F(k, \varphi)$ und $E(k, \varphi)$ nach Legendre die elliptischen Integrale der ersten und zweiten Art mit dem Modul $k = \frac{2\sqrt{e}}{1+e}$. Die Gleichungen 5) und 6) stellen zusammen die Rollcurve dar, welche der Brennpunkt einer rollenden Ellipse beschreibt, und 5) und 7) gelten für die Hyperbel. Diese beiden Rollcurven sind wegen der analogen Entstehung der gewöhnlichen Kettenlinie als Rollcurve, welche der Brennpunkt einer auf einer Geraden ohne Gleiten rollenden Parabel beschreibt, von Plateau[2]) als elliptische und hyperbolische Kettenlinien benannt worden. Die von ihnen beschriebenen Rotationsflächen, das Undoloid und das Nodoid, haben, wie Delaunay zuerst und später Lindelöf[3]) nachweist, die merkwürdige Eigenschaft, dass sie Flächen constanter mittlerer Krümmung sind, und zwar ist die constante mittlere Krümmung für das Undoloid $+\frac{1}{2a}$ und für das Nodoid $-\frac{1}{2a}$. Die Darstellung durch die elliptischen Integrale ist wohl zuerst von Beer[4]) gegeben worden. Die Frage, ob die erhaltenen Curven ein Maximum oder Minimum liefern, war von den ersten Bearbeitern dieser Aufgabe in ganz merkwürdiger Weise unberücksichtigt gelassen, bis sie in der auf Veranlassung des Herrn Professor Stern unternommenen Dissertation von A. Greve[5]) eingehend erörtert und für den allgemeinen Fall, in welchem die beiden gegebenen Punkte nicht auf der Rotationsaxe liegen, auch erledigt wurde. Die für den allgemeinen Fall ganz richtigen Resultate, deren Herleitung wir hier übergehen können, sind die folgenden:

„Die elliptische Kettenlinie liefert stets ein Maximum; die hyperbolische Kettenlinie liefert in dem Teile ein Maximum, in welchem die Ordinaten grösser als die kleine Halbaxe $b$ der rollenden Hyperbel sind, und ein Minimum in dem Teile, wo die Ordinaten kleiner als $b$ sind. Der Punkt $y = b$ darf nicht überschritten werden."

In welchem Falle die elliptische oder die hyperbolische Kettenlinie anzuwenden ist, ergiebt sich durch die Bestimmung der Constanten aus den gegebenen Bedingungen.

In den Gleichungen 5) und 6) resp. 5) und 7) sind als ursprüngliche Integrationsconstanten $b$ und $C$ und ausserdem die isoperimetrische Constante $a$ enthalten. Diese 3 Constanten können auch

sämmtlich durch die drei Bedingungen bestimmt werden, dass die Curve durch zwei feste Punkte gehen und bei ihrer Rotation um eine feste Gerade einen Rotationskörper mit constanter Oberfläche beschreiben soll.

Das bis jetzt Gesagte gilt für den allgemeinen Fall, in welchem die beiden festen Punkte nicht auf der Rotationsaxe selber liegen.

Liegen aber die beiden Punkte oder einer derselben auf der Rotationsaxe, so muss das S. 135. 3) erhaltene erste Integral

$$y^2 = \frac{2ay}{\sqrt{1+p^2}} \pm b^2$$

auch durch den Wert $y = 0$ erfüllt sein; damit dieses möglich, muss die Integrationsconstante $\pm b^2 = 0$ sein.

Die dann übrig bleibende Gleichung

$$y\left(y - \frac{2a}{\sqrt{1+p^2}}\right) = 0$$

wird

8) durch $y = 0$

9) durch $y - \frac{2a}{\sqrt{1+p^2}} = 0$

erfüllt.

Die erste Gleichung

$$y = 0$$

stellt die Rotationsaxe dar. Diese erzeugt bei der Rotation zwar einen Körper mit minimalem Inhalt, aber dann muss auch die constante Oberfläche gleich null angenommen werden; in jedem andern Falle kann die Rotationsaxe nicht als Lösung angesehen werden.

Aus der zweiten Gleichung

$$y - \frac{2a}{\sqrt{1+p^2}} = 0$$

erhalten wir durch Integration

10) $(x - c_1)^2 + y^2 = (2a)^2 = 4a^2,$

worin $c$ die Integrationsconstante bezeichnet. Dieses ist die Gleichung eines Kreises, dessen Radius $2a$ ist, und dessen Mittelpunkt auf der Rotationsaxe liegt. Der Radius ist aus der gegebenen Oberfläche zu bestimmen, was in diesem Falle, wo der Rotationskörper eine Kugel, leicht ist. Aber der dann resultirende Kreis kann nur in dem einen

Falle die beiden festen, gegebenen Punkte der Rotationsaxe direct verbinden, wenn die gegebene Oberfläche eine solche Grösse hat, dass der Radius gleich der halben Entfernung der beiden Punkte ist. Bezeichnen wir diese Entfernnug (Fig. 11. und 12.) $AB$ mit $d$ nnd denken den Kreis durch den ersten Pnnkt $A$ gehend, so wird der Kreis die Axe zum zweiten Male vor $B$ in $C$ treffen, wenn $4a < d$, nnd hinter $B$ in $D$, wenn $4a > d$.

Um nnn auch in diesen Fällen eine Verbindnng zwischen den Pnnkten $A$ nnd $B$ zu erhalten, combinirt Airy [6]) die beiden Lösnngen 8) und 10) zn einer einzigen, indem er die beiden Punkte $A$ nnd $B$ dnrch einen Halbkreis nnd einen Teil der Rotationsaxe verbindet. Eine solche Vereinignng zweier Lösungen, die unter besonderen Umständen volle Berechtigung für sich allein haben und die dadnrch erhalten sind, dass wir zwei Factoren gleich null gesetzt haben, halten wir für unstatthaft. Mehrere Curven können nnr dann als Lösung resultiren, wenn innerhalb der Grenzpunkte oder der Grenzcurven noch vorgeschriebene Bedingnngen zn erfüllen sind, so dass eine Zerlegung des Integrales stattfinden muss, wenn z. B. ein gewisser singulärer Bereich nicht überschritten werden darf. Insbesondere halten wir die Art der Verbindnng, welche Airy durch seine vier Figuren veranschaulicht, nicht für annehmbar, weil hier die Rotationsaxe in verschiedenen Teilen und einmal sogar einzelne Teile doppelt in Rechnnng gebracht werden, was die Gleichnng $y = 0$ nicht znlässt.

Dass aber in der Tat nur der Kreis wirklich eine Lösung nnserer Anfgabe ist, welcher die beiden gegebenen Punkte direct verbindet, geht auch aus einem Vergleich mit dem allgemeinen Fall hervor. Die hier rollende Ellipse oder Hyperbel geht für den Specialfall $b = 0$ in eine gerade Linie über; die Brennpunkte rücken in die Scheitel und beschreiben bei dem Rollen der Geraden einen Kreis mit dem Radius $2a$, welcher gleich der früheren grossen Axe der Kegelschnitte ist. Dieser Kreis geht aber, wie bei dem allgemeinen Fall die Rollcurven, die elliptische nnd hyperbolische Kettenlinie, durch die gegebenen festen Punkte, und kein anderer Kreis wird durch diese geometrische Darstellung erhalten.

Dasselbe ergiebt die analytische Betrachtung. Snbstituiren wir unsere Gleichung

$$y = 0$$

in die Hauptgleichung

$$A = y - \frac{a}{\sqrt{1+p^2}} + \frac{ayq}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}},$$

so wird diese dadurch nicht auf null, sondern auf den constanten Wert

$$A = -a \quad \text{gebracht.}$$

Die Hauptgleichung ist also nur dann null, wenn die isoperimetrische Constante $2a$, die wir ja geometrisch als den Radius des Kreises gedeutet haben, selber null ist. Dann erhalten wir also auch keinen Kreis und wir sind auf den S. 138. schon behandelten Specialfall zurückgeführt, in welchem die gegebene Oberfläche auch gleich null ist. Nur in diesem Falle ist daher die Rotationsaxe als Lösung zulässig.

Um danach die Vereinigung von Kreis und Rotationsaxe als Lösung zu retten, führt Todhunter [7]) als ein neues Princip der Variationsrechnung die Annahme ein, dass die Hauptgleichung gar nicht null zu sein braucht, wenn sie nur für einen gewissen Bereich stets dasselbe Zeichen hat, und für denselben Bereich die Variation $\delta y$ der Natur der Aufgabe nach der Beschränkung unterworfen ist, dass sie nicht zweierlei Vorzeichen annehmen kann. Dieses Princip, welches Todhunter in seiner Preisschrift [8]) weiter auseinandersetzt und bei den discontinuirlichen Lösungen vielfach anwendet, ist offenbar dann und nur dann richtig, wenn das erste Glied der nach steigenden Potenzen von $\delta y$ fortschreitenden Reihe alle Glieder überwiegt und somit das Zeichen der Reihe bestimmt.

Dies ist nun bei dieser Auflösung nicht der Fall. Weder durch die Aufgabestellung, noch durch die beiden Integrale, welche die Oberfläche und den Inhalt des Rotationskörpers darstellen, ist die Beschränkung anfgelegt, dass die Ordinate $y$ stets positiv sein soll. Sie kann vielmehr, solange nicht jene Bedingung ausdrücklich vorgeschrieben ist, sowohl positive als negative Werte annehmen, und daher kann auch $\delta y$ sowohl positiv als negativ sein. In der Tatsache, dass, wenn wir in dem Oberflächenintegral $y$ für einen Teil positiv und für den andern Teil negativ sein lassen, die Differenz der beiden Integrale und somit die Oberfläche analytisch constant bleiben kann, dass aber dann der Wert des andern Integrales, welches den kubischen Inhalt darstellt, wegen $y^2$ beliebig gross werden kann, sieht Lindelöf [8]) mit Recht einen Grund für die Unmöglichkeit einer analytischen Auflösung.

Nehmen wir an, dass die gesuchte Verbindungscurve der beiden gegebenen Punkte stets oberhalb der Abscissenaxe, welche ja mit der Rotationsaxe zusammenfallend gedacht ist, sein soll, so kann für den Teil der Verbindungscurve, für welchen die Gleichung $y = 0$ gilt, $\delta y$ nicht negativ sein. Dann ist also das erste Glied der Reihenentwickelung, da $a$, der Radius des Kreises, eine endliche positive Grösse ist, stets negativ und endlich; die Frage ist aber, ob dieses Glied die Summe aller folgenden Glieder überwiegt. Zu ihrer Beantwortung untersuchen wir die zweite Variation.

Hier können wir Greve nicht heistimmen. Er wird durch einen Rechenfehler S. 42. zu dem Werte $a = 1$ geführt, während sich aus jener Gleichung nur die Identität $a = a$ ergeben kann. Alle Schlüsse die A. Greve dann aus dem Specialwerte $a = 1$ zieht und wodurch er das fragliche Paradoxon lösen will, sind damit hinfällig.

Nach Jakobi schreiben wir die zweite Variation in der Form

$$\delta^2 \int_{x_1}^{x_2} V dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 V}{\partial p^2} \left(\delta p - \frac{u_1}{u} \delta y\right)^2 dx.$$

Da

$$V = y^2 - 2ay\sqrt{1+p^2},$$

so ist

$$\frac{\partial^2 V}{\partial p^2} = \frac{-2ay}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Solange $a$ eine endliche positive Grösse ist, ist dieser Ausdruck stets negativ, und wir erhalten daher ohne Zweifel ein Maximum, wenn der Kreis die Punkte direct verbindet.

Um die Frage zu entscheiden, ob eine Combination der Rotationsaxe und des Kreises als Lösung zulässig, d. h. ob wir über den Punkt $y = 0$ hinaus integriren dürfen, müssen wir den Klammerausdruck untersuchen.

Für $y = 0$ wird auch

$$\frac{\partial^2 V}{\partial p^2} = 0$$

und zwar von der ersten Ordnung. Es scheint also, als ob die zweite Variation und somit alle folgenden null werden, und die erste Variation, eine endliche negative Grösse, das Zeichen der Reihe bestimmt. Die weitere Untersuchung wird jedoch das Entgegengesetzte zeigen.

Nach den Untersuchungen von A. Mayer [9]) haben wir zur Entscheidung zwischen Maxima und Minima in isoperimetrischen Problemen zunächst in unserem Falle

$$u = h_1 \frac{\partial y}{\partial c_1} + h_2 \frac{\partial y}{\partial a}$$

zu bilden.

Bei der Bildung eines ähnlichen Ausdrucks verfährt Greve S. 44. auch nicht correct.

Aus der allgemeinen Kreisgleichung S. 138.

$$(x_1 - c)^2 + y^2 = 4a^2$$

erhalten wir

$$u = h_1 \frac{x - c_1}{y} + h_2 \frac{4a}{y}$$

und

$$u_1 = \frac{du}{dx} = h_1 \frac{y - (x - c_1)p}{y^2} - h_2 \frac{4ap}{y^2}$$
$$= \frac{4a^2 h_1 + 4a(x - c_1)h_2}{y^3},$$

sodass

$$\frac{u_1}{u} = \frac{4a^2 h_1 + 4a(x - c_1)h_2}{y^2\{h_1(x - c_1) + 4ah_2\}} = \frac{B}{y^2}.$$

indem wir zur Abkürzung

$$\frac{4a^2 h_1 + 4a(x - c_1)h_2}{h_1(x - c_1) + 4ah_2} = B$$

setzen, worin $h_1$ und $h_2$ stets so gewählt werden können, dass $B$ nie null und nie unendlich wird.

Der Quotient $\frac{u_1}{u}$ wird jetzt für $y = 0$ unendlich gross und zwar von der zweiten Ordnung. Der Ausdruck

$$\left(\delta p - \frac{u_1}{u}\,\delta y\right)^2$$

wird also für $y = 0$ von der vierten Ordnung unendlich gross und das Product

$$\frac{\partial^2 V}{dp^2}\left(\delta p - \frac{u_1}{u}\,\delta y\right)^2$$

wird für $y = 0$ von der dritten Ordnung unendlich gross, so dass die Reihenentwickelung nicht convergirt, und das erste Glied, eine endliche Grösse, nicht das Zeichen bestimmt.

Mit diesen Betrachtungen glauben wir die Aufgabe endgültig dahin gelöst zu haben, dass, wenn die beiden gegebenen Punkte auf der Rotationsaxe selber liegen, nur in zwei Fällen eine wirkliche Lösung der Aufgabe möglich ist.

Erstens, wenn die gegebene constante Oberfläche gleich null ist, so ist die Rotationsaxe selber die gesuchte Curve.

Zweitens, wenn die gegebene constante Oberfläche $= 4\left(\frac{d}{2}\right)^2 \pi$ ist, wo $d = AB$ wie S. 139. gesetzt, so ist die gesuchte Curve ein Kreis, dessen Radius $2a = \frac{d}{2}$ ist und dessen Mittelpunkt auf der Rotationsaxe liegt.

In jedem andern Falle ist eine Lösung unmöglich. Dieses findet seine Erklärung zum Teil noch in Folgendem.

In denjenigen isoperimetrischen Aufgaben, in welchen wirklich lieb die Länge der die beiden festen Grenzen verbindenden Curve gegeben ist, unterliegt es keinem Zweifel, dass es mehrere, ja unendlich viele Curven von der vorgeschriebenen Länge giebt, unter denen diejenige ausgesucht werden soll, welche einen bestimmten analytischen Ausdruck zu einem Maximum oder Minimum macht. Denn ein Faden von constanter Länge, welcher also biegsam, aber nicht ausdehnbar, kann die verschiedensten Curven bilden. Aber bei der vorliegenden Aufgabe, in welcher nicht die Länge der verbindenden Curve, sondern die Oberfläche des Rotationskörpers als constant gegeben ist, bleibt es noch fraglich, ob es denn überhaupt einen oder mehrere Rotationskörper von constanter Oberfläche giebt, die zu gleicher Zeit durch zwei feste Punkte gehen. Der Existenzbeweis derartiger Körper fehlt bis jetzt noch, da die von Challis angeführten Argumente nicht genügen.

Litteratur.

1) Delaunay, Sur la surface de révolution dont la courbure moyenne est constante. (Journal de mathém. p. Liouville. t. VI. p. 309. 1841).

2) Plateau, Statique expérimentale et théorique des liquides.

3) Lindelöf, Théorie des surfaces de révolution à la courbure moyenne constante. (Acta societatis scient. Fennicae. t. VII. p. 347. 1863).

4) Beer, Tractatus de theoria mathematica phaenomenorum in liquidis actioni gravitatis detractis observatorum. Bonn. 1857.

5) A. Greve, Ueber ein Problem der Variationsrechnung. Göttingen. 1875.

6) Airy, On a supposed failure in the calculus of variations. (Philos. magazine vol. 22. p. 12. 1861).

7) Todhunter, On a problem in the calculus of variations. (Philos. magaz. vol. 31. p. 425. 1866.) und Researches in the calculus of variations. art. 17. 1871.

8) Lindelöf in Moigno, Leçons de calcul différentiel et intégral. t. IX. p. 223.

9) A. Mayer, Die Kriterien des Maximums und Minimums der einfachen Integrale in den isoperimetrischen Problemen. (Mathemat. Annalen. Bd. XIII. p. 53. 1878.).

§. 6.

Mit den im vorigen Paragraphen mittelst des integrirenden Factors $p$ erhaltenen Lösungen erklärt Challis sich nicht einverstanden und sucht daher aus

$$A = y - \frac{a}{\sqrt{1+p^2}} + \frac{ayq}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

allein mittelst seiner neuen Integrationsmethode die Lösung zu finden.

Unter Benutzung des Krümmungsradius

$$\varrho = \frac{-(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}$$

erhält Challis aus $A = 0$ die Gleichung

1) $$\frac{1}{\sqrt{1+p^2}} = y\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\varrho}\right)$$

Mit Hülfe der bekannten Relationen zwischen den Coordinaten einer Curve und ihrer Evolute

$$y - y' = -\frac{1+p^2}{q} = \frac{\varrho}{\sqrt{1+p^2}},$$

$$x - x' = -p(y - y'),$$

$$pp' + 1 = 0,$$

worin $x'$, $y'$, $p$, sich auf die Evolute beziehen, findet er nach einigen Transformationen und Integration als erstes Integral

2) $$\varrho^2 - 2a\varrho = -ky'^2,$$

worin $k$ die willkürliche Integrationsconstante darstellt. Daraus folgt dann

3) $$dx' = \pm\, dy' \left\{\frac{(k^2+k)y'^2 - a^2}{a - ky'^2}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

als Differentialgleichung der Evolute derjenigen durch die Hauptgleichung dargestellten Curve. Hieraus findet Challis die keineswegs sehr einfache Gleichung

4) $$p^2 = \frac{(k^2+k)\frac{y^2}{a^2}(2a-\varrho)^2 - a^2}{a^2 - k\frac{y^2}{a^2}(2a-\varrho)^2},$$

mit welcher wir uns als endgültigen Lösung begnügen müssen. Da diese Gleichung, welche sämmtliche Evolventen der obigen Evolute darstellt, den Krümmungsradius $\varrho$ enthält, so ist sie, gerade wie an-

fangs die Hauptgleichung, auch noch eine Differentialgleichung von der zweiten Ordnung, deren Integration aber jetzt bei weitem schwieriger als vorher. Das vollständige Integral derselben würde ausser der isoperimetrischen Constanten $a$ und der einen Integrationsconstanten $k$, noch zwei andere Integrationsconstanten enthalten und kann daher auf keinen Fall ein Integral der ursprünglichen Hauptgleichung $A = 0$ sein, die nur eine Differentialgleichung von der zweiten Ordnung ist. Ausserdem können auch diese vier willkürlichen Constanten nicht durch die drei Bedingungen der Aufgabe eindeutig bestimmt werden. So stösst man mit dieser Lösung überall auf Widersprüche, und gegen die ebenso unbrauchbaren mechanischen Hülfsconstructionen können wir nur analoge Einwendungen wie S. 133—134. wiederholen.

Wir wollen aber, wie bei der zweiten Aufgabe, noch besonders hervorheben, dass wir auch hier aus $A = 0$ allein, ohne Zuhülfenahme des integrirenden Factors $p$, die allgemeine Gleichung der elliptischen und hyperbolischen Kettenlinie, wie aus $Ap = 0$, erhalten können. In der Tat substituiren wir in das S. 144. einzig und allein aus $A = 0$ erhaltene erste Integral

$$\varrho^2 - 2a\varrho = -ky'^2$$

die ebenfalls nur aus $A = 0$ hergeleitete Relation

$$y' = \frac{y(2a-\varrho)}{a},$$

so erhalten wir

$$a^2\varrho = ky^2(2a-\varrho),$$

woraus sich mit Hülfe von 1) S. 144.

$$y^2 = \frac{2ay}{\sqrt{1+p^2}} \pm \frac{a^2}{k}$$

ergiebt. Diese Gleichung ist mit dem S. 135. Gleichung 3) erhaltenen ersten Integral

$$y^2 = \frac{2ay}{\sqrt{1+p^2}} \pm b^2$$

identisch, wenn wir die willkürliche Integrationsconstante $k = \pm \frac{b^2}{a^2}$ setzen, was immer möglich ist. Damit haben wir also auch bei dieser Aufgabe mit Hülfe der Evolute aus $A = 0$ ganz dasselbe Integral erhalten, wie durch directe Integration von $Ap = 0$ und so durch eine richtige Anwendung dieser Integrationsmethode abermals die von Challis bestrittene Aequivalenz der beiden Formen

$$A = 0 \quad \text{und} \quad Ap = 0$$

dargetan.

Was nun die Neuheit dieser Integrationsmethode mit Hülfe der Evolute betrifft, so müssen wir Challis auch noch die Originalität absprechen. In der von Challis zu Anfang seiner Untersuchung selbst citirten Abhandlung von Delaunay finden wir ganz dieselbe Methode zur Lösung ganz derselben Aufgabe angewandt. Zwischen beiden Abhandlungen ist nur der auffallende Unterschied, dass der erste Bearbeiter, Delaunay, richtige Resultate erhält, während der zweite, Challis, das Ziel verfehlt.

§. 7.

Seine Resultate sucht Challis dann bald darauf in einer neuen Abhandlung [1]) zu verteidigen und zwar wendet er jetzt wieder andere Methoden an. Um unsere Untersuchung nicht zu sehr in die Länge zu ziehen, mag es genügen, den Hauptsatz, auf welchem jene Untersuchung basirt, zu widerlegen. Auf Grund der bekannten Tatsache, dass Differentialgleichungen, welche der Form nach verschieden sind, doch für die Integration gleichwertig sind, wenn sie durch integrirende Factoren auf dieselbe Form gebracht werden können, schliesst Challis, dass die Differentialgleichung der Parallelcurven der parabolischen oder der hyperbolischen Kettenlinie mit der Differentialgleichung $F = 0$ dieser Kettenlinien identisch ist, und dass die vollständige Lösung von $F = 0$ nicht nur die Kettenlinien, sondern auch alle Parallelcurven derselben umfasst.

Diese Behauptungen können wir nun durch die kurze Bemerkung widerlegen, dass die von Challis benutzten Factoren

$$M = p + \frac{2p}{qy}(1+p^2) \quad \text{und}$$

$$N = \frac{(1+p^2)^2}{q^2 y}$$

gar keine integrirenden Factoren der Differentialgleichung

$$F = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} - \frac{yq}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}$$

sind. Manche seiner merkwürdigen Schlüsse sind uns indes unklar geblieben.

# XI.

# Theorie der elastischen Schwingungen.

Von

**Franz Tendering.**

---

Betrachten wir die Spannung in einem Körper; (unabhängig von den Kräften, die sie hervorrufen).

Irgend ein Teilchen im Inneren des elastischen Körpers habe die Seitenflächen $S'$, $S''$, $S'''\ldots$; auf jede dieser Flächen wirken Kräfte, die (der Reihe nach) bezüglich $p'$, $p''$, $p'''$ ... sein mögen (bezogen auf die Flächeneinheit), deren Gesammtgrösse also durch $S'p'$, $S''p''$, $S'''p'''$ ... ausgedrückt wird.

Diese Kräfte machen mit den Axen des rechtwinkeligen Coordinatensystems, das wir zu Grunde legen, gewisse Winkel, deren Cosinus wir bezüglich durch $\lambda'$, $\mu'$, $\nu'$, $\lambda''$, $\mu''$, $\nu''$, $\lambda'''$, $\mu'''$, $\nu'''$ ... bezeichnen.

Als Angriffspunkte der Kräfte nehmen wir die Schwerpunkte der Flächen, auf die sie wirken. Die Coordinaten der Schwerpunkte seien bezüglich

$$x',\ y',\ z',\quad x'',\ y'',\ z'',\quad x''',\ y''',\ z''',$$

Unter welchen Bedingungen halten sich die Kräfte nun das Gleichgewicht?

Nach der $x$ Richtung wirken die Kräfte

$$S'p'\lambda',\quad S''p''\lambda'',\quad S'''p'''\lambda''',$$

nach der $y$ Richtung

$$S'p'\mu',\quad S''p''\mu'',\quad S'''p'''\mu''',$$

endlich nach der $z$ Richtung

$$S'p'\nu',\quad S''p''\nu'',\quad S'''p'''\nu'''.$$

Also mnss sein

$$\left.\begin{aligned} \Sigma Sp\lambda &= S'p'\lambda' + S''p''\lambda'' + \ldots = 0 \\ \Sigma Sp\mu &= S'p'\mu' + S''p''\mu'' + \ldots = 0 \\ \Sigma Sp\nu &= S'p'\nu' + S''p''\nu'' + \ldots = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 1)$$

Diese Gleichungen drücken die Bedingnngen dafür aus, dass das Teilchen nicht fortbewegt wird. Znm vollständigen Gleichgewicht ist noch erforderlich, dass das Teilchen auch nicht gedreht wird, was durch folgende Gleichungen ausgedrückt wird:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma Sp(y\nu - z\mu) &= 0 \\ \Sigma Sp(z\lambda - x\nu) &= 0 \\ \Sigma Sp(x\mu - y\lambda) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2)$$

Jetzt betrachten wir ein ganz kleines Teilcheu von der Gestalt eines Prismas, dessen Höhe auch verhältnissmässig sehr klein sein soll, so dass die Seitenflächen gegen die Grundflächen vernachlässigt werden können.

Dann haben wir in den erhaltenen Gleichungen nur die zwei Glieder zu betrachten, die sich auf die Grundflächen beziehen.

Aus der ersten der Gleichungen 1) folgt

$$\Sigma Sp\lambda = S'p'\lambda' + S''p''\lambda'' = 0,$$

und da

$$S' = S''$$

$$p'\lambda' + p''\lambda'' = 0 \quad \text{oder} \quad p'\lambda' = -p''\lambda''.$$

Ebenso ergeben die zweite nnd dritte der Gl. 1)

$$p'\mu' = -p''\mu'' \quad \text{nnd} \quad p'\nu' = -p''\nu''.$$

Quadrirt man jede dieser drei Relationen, so kommt

$$p'^2(\lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2) = p''^2(\lambda''^2 + \mu''^2 + \nu''^2)$$

und da

$$\lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2 = \lambda''^2 + \mu''^2 + \nu''^2 = 1,$$

$$p'^2 = p''^2 \quad \text{folglich} \quad p' = p'',$$

indem wir die Kraft als absolute Grösse betrachten (und demgemäss positiv setzen müssen).

Aus den Relationen

$$p'\lambda' = -p''\lambda'', \quad p'\mu' = -p''\mu'', \quad p'\nu' = -p''\nu''$$

folgt nun weiter

$$\lambda' = -\lambda'', \quad \mu' = -\mu'', \quad \nu' = -\nu''.$$

Also sind die beiden auf die Grundflächen des Prismas wirkenden Kräfte ihrer Grösse nach gleich, hingegen ihrer Richtung nach entgegengesetzt. Dieses bleibt bestehen, wenn man die Grundflächen näher und näher zusammenrücken, und schliesslich ganz zusammenfallen lässt. So hat man den Satz:

Legt man durch einen Körper eine Ebene, so ist in jedem Punkte derselben die Spannung nach beiden Seiten gleich und entgegengesetzt, vorausgesetzt, dass Gleichgewicht stattfindet.

Nun betrachten wir in dem grossen Körper ein unendlich kleines Parallelepiped, und zwar ein rechtwinkeliges, dessen Kanten parallel den Coordinatenachsen seien. Die Längen der Kanten seien bezüglich $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$.

Im Mittelpunkte dieses unendlich kleinen Parallelepipeds liege der Coordinatenanfangspunkt.

Die Flächen, die auf den positiven Halbaxen senkrecht sind, mögen bezüglich die $+x$ Fläche, die $+y$ Fläche, die $+z$ Fläche heissen; die Flächen, senkrecht auf den negativen Halbaxen, bezüglich die $-x$ Fläche, die $-y$ Fläche, die $-z$ Fläche.

Die Coordinaten des Schwerpunktes sind nun für die

| | | | |
|---|---|---|---|
| $+x$ Fläche | $+\frac{1}{2}\delta x$ | 0 | 0 |
| $-x$ Fläche | $-\frac{1}{2}\delta x$ | 0 | 0 · |
| $+y$ Fläche | 0 | $+\frac{1}{2}\delta y$ | 0 |
| $-y$ Fläche | 0 | $-\frac{1}{2}\delta y$ | 0 |
| $+z$ Fläche | 0 | 0 | $+\frac{1}{2}\delta z$ |
| $-z$ Fläche | 0 | 0 | $-\frac{1}{2}\delta z$. |

Auf die $+x$ Fläche wirke nun die Kraft $p'$, welche mit den Axen Winkel macht, deren Cosinus $\lambda'$, $\mu'$, $\nu'$ sind; dann wirkt auf die $-x$ Fläche eine gleiche Kraft $p'$, aber mit den Cosinus $-\lambda'$, $-\mu'$, $-\nu'$.

Auf die $+y$ Fläche wirke die Kraft $p''$, mit den Cosinus $\lambda''$, $\mu''$, $\nu''$; also auf $-y$ Fläche die Kraft $p''$ mit den Cosinus $-\lambda''$, $-\mu''$, $-\nu''$.

Ebenso wirke auf die $+z$ Fläche die Kraft $p'''$ mit den Cosinus

$\lambda'''$, $\mu'''$, $\nu'''$; also auf die $-z$ Fläche die Kraft $p'''$ mit den Cosinus $-\lambda'''$, $-\mu'''$, $-\nu'''$.

Wenden wir nun die drei Gleichungen 2) an. Die erste lautet

$$\Sigma Sp(z\nu - z\mu) = 0,$$

wo $y$ und $z$ Coordinaten der Schwerpunkte der Flächen bedeuten.

(Für die $+x$ Fläche ist $y = 0$, $z = 0$;
ebenso für die $-x$ Fläche.
Für die $+y$ Fläche ist $y = \frac{1}{2}\delta y$, $z = 0$;
für die $-y$ Fläche ist $y = -\frac{1}{2}\delta y$, $z = 0$.
Für die $+z$ Fläche ist $y = 0$, $z = \frac{1}{2}\delta z$;
für die $-z$ Fläche ist $y = 0$, $z = -\frac{1}{2}\delta z$).

Aus der Gl. $\Sigma Sp(y\nu - z\mu) = 0$ wird nunmehr

$$\left.\begin{array}{l} \delta y.\delta z.p'(0.\nu' - 0.\mu') \\ +\delta y.\delta z.p'(0.(-\nu_,) - 0.(-\mu')) \\ +\delta z.\delta x.p''(\frac{1}{2}\delta y.\nu'' - 0.\mu'') \\ +\delta z.\delta x.p''((-\frac{1}{2}\delta z)(-\nu'') - 0.(-\mu'')) \\ +\delta x.\delta y.p'''(0.\nu''' - \frac{1}{2}\delta z.\mu''') \\ +\delta x.\delta y.p'''(0.(-\nu''') - (\frac{1}{2}\delta z).(-\mu''')) \end{array}\right\} = 0$$

oder, zusammengezogen

$$\delta x.\delta y.\delta z(p''\nu'' - p'''\mu''') = 0,$$

also

$$p''\nu'' = p'''\mu'''; \quad \text{d. h.}$$

Die $z$ Componente der auf die $y$ Ebene wirkenden Kraft ist gleich der $y$ Componente der auf die $z$ Ebene wirkenden Kraft.

Ganz entsprechend erhält man aus den Gleichungen

$$\Sigma Sp(z\lambda - x\alpha) \quad \text{und} \quad \Sigma Sp(x\mu - y\lambda) = 0$$

die Relationen

$$p'''\lambda''' = p'\nu' \quad \text{und} \quad p'\mu' = p''\lambda''.$$

Dies gilt noch, wenn das Parallelepiped so klein wird, dass je zwei Gegenflächen desselben zusammenfallen.

So finden also für die positiven Flächen zwischen den Kräftecomponenten drei notwendige Bedingungen für den Fall des Gleichgewichts statt.

Ebenso für die negativen Flächen.

Dies Alles muss natürlicherweise auch dann noch gelten, wenn der Anfangspunkt nicht in der Mitte des Parallelepipeds liegt, und die Flächen des Parallelepipeds gegen die Coordinatenaxen beliebig gerichtet sind. Dann gelten die obigen Relationen für je zwei beliebige auf einander senkrechte Ebenen. Bezeichnet man zwei solche als $\xi$ und $\eta$ Ebene, und die Richtungen ihrer Normalen als $\xi$ und $\eta$ Richtung, so kann man sagen:

Die $\xi$ Componente der auf die $\eta$ Ebene wirkende Kraft ist gleich der $\eta$ Componente der auf die $\xi$ Ebene wirkenden Kraft.

Denken wir uns nun durch einen Punkt im Innern des elastischen Körpers drei auf einander senkrechte Ebenen gelegt; nehmen wir den Punkt zum Coordinatenanfangspunkt, jene Ebenen zu Coordinatenebenen.

Die für jede dieser Ebenen in diesem Punkte stattfindende Gesammtspannung können wir parallel den Coordinatenaxen zerlegen, und so erhalten wir (mit Rücksicht auf die eben erhaltenen Relationen) folgendes Schema der Kräftecomponenten:

Es wirkt auf die

| | in der $+x$ | $+y$ | $+z$ Richtung (bez. auf die Flächeinheit, die Kraft) |
|---|---|---|---|
| $+x$ Ebene | $A$ | $F$ | $E$ |
| $+y$ Ebene | $F$ | $B$ | $D$ |
| $+z$ Ebene | $E$ | $D$ | $C$. |

($A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$ können beiderlei Vorzeichen haben), (d. h. es ist hier nicht dargetan, dass sie alle notwendig positiv wären).

Jetzt stellen wir uns die Aufgabe, für jede beliebige durch den Punkt gelegte Ebene die in demselben stattfindende Gesammtspannung zu bestimmen.

Wir denken uns ein unendlich kleines Tetraeder, gebildet von einer Hypotenusenfläche und drei Kathetenflächen, den drei senkrechten Projectionen der Hypotenusenfläche auf die Coordinatenebenen. (Der Durchschnittspunkt der Kathetenflächen sei der Anfangspunkt, die von diesem Punkte auslaufenden Kanten müssen dann in die Richtungen der Coordinatenaxen fallen).

Die Normale der Hypotenusenfläche bilde mit den Axen Winkel, deren Cosinus bezüglich $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ seien.

Digitized by Google

Ist die Hypotenusenfläche $= S$, so sind die drei Kathetenflächen bezüglich

$$S' = S\alpha, \quad S'' = S\beta, \quad S''' = S\gamma.$$

Wir bezeichnen die absoluten Grössen der an der Hypotenusenfläche und an den Kathetenflächen wirkenden Kräfte durch $p$, $p'$, $p''$, $p'''$.

Die Cosinus der Winkel, die sie mit den positiven Coordinaten-Richtungen bilden, seien bezüglich $\lambda$, $\mu$, $\nu$; $\lambda'$, $\mu'$, $\nu'$; $\lambda''$, $\mu''$, $\nu''$; $\lambda'''$, $\mu'''$, $\nu'''$.

Betrachten wir nun die Fläche $S'$, so herrscht hier, auf die Flächeneinheit bezogen, eine Spannung von der Grösse $p'$. Es sei $\lambda' = -\lambda_1$, $\mu' = -\mu_1$, $\nu' = -\nu_1$. Es findet hier nach Richtung der positiven und nach Richtung der negativen Körperabteilung eine gleiche, aber entgegengesetzte Spannung statt. Die nach dem positiven Körperteile (d. h. nach dem Teile des Körpers, dem die positive Seite der Fläche $S'$ zugewandt ist) gerichtete Spannung hat die Componenten $p'\lambda_1$, $p'\mu_1$, $p'\nu_1$, und diese Grössen stimmen mit $A$, $F$, $E$ auch dem Zeichen nach überein; dagegen hat die entgegengesetzt gerichtete Spannung — und diese kommt begreiflicherweise in unserem Falle allein in Betracht — die Componenten $-p'\lambda_1$, $-p'\mu_1$, $-p'\nu_1$, oder auch $p'\lambda'$, $p'\mu'$, $p'\nu'$; diese sind also den Grössen $A$, $F$, $E$ dem Zeichen nach entgegengesetzt. Analog verhält es sich mit $p''\lambda''$, ...; $p'''\lambda'''$, ...; $F$, $B$, $D$; $E$, $D$, $F$. Daher ist

$$p'\lambda' = -A; \quad p''\mu'' = -B; \quad p'''\nu''' = -C.$$

$$\begin{aligned} p'\mu' &= p''\lambda'' = -F. \\ p''\nu'' &= p'''\mu''' = -D. \\ p'''\lambda''' &= p'\nu' \quad = -E. \end{aligned}$$

Mit Anwendung der Gl. 1)

$$\Sigma Sp\lambda = 0, \quad \Sigma Sp\mu = 0, \quad \Sigma Sp\nu = 0$$

erhalten wir nun

$$Sp\lambda + S'p'\lambda' + S''p''\lambda'' + S'''p'''\lambda''' = 0,$$

oder

$$Sp\lambda - S\alpha . A - S\beta . F - S\gamma . E = 0;$$

ebenso

$$Sp\mu - S\alpha . F - S\beta . B - S\gamma . D = 0;$$

und

$$Sp\nu - S\alpha . E - F\beta . D - S\gamma . C = 0;$$

oder vereinfacht

$$\left.\begin{aligned} p\lambda &= A\alpha + F\beta + E\gamma \\ p\mu &= F\alpha + B\beta + D\gamma \\ p\nu &= E\alpha + D\beta + C\gamma \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 3)$$

Das sind die Ausdrücke für die drei Kraftcomponenten der an der Hypotenuse wirkenden Kraft. Das gilt Alles noch, wenn die Hypotenusenfläche, parallel mit sich selbst, dem Anfangspunkte immer näher rückt und ihn zuletzt erreicht. Die eben entwickelten Gleichungen gelten daher für eine Ebene, die durch den Coordinatenanfangspunkt geht, und deren Normale die Cosinus $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ entsprechen.

Ohne also zu wissen, wodurch die Spannung entstanden ist, behaupten wir doch, dass die eben entwickelten Beziehungen für eine beliebige, durch den Körper gelegte Ebene gelten müssen (wobei die Ebene gegen den Coordinatenanfangspunkt, der willkürlich verlegt werden kann, eine beliebige Lage haben kann).

Die gesammte auf die Ebene wirkende Kraft ist

$$p = \sqrt{p^2\lambda^2 + p^2\mu^2 + p^2\nu^2}$$
$$= \sqrt{(A\alpha + F\beta + E\gamma)^2 + (F\alpha + B\beta + D\gamma)^2 + (E\alpha + D\beta + C\gamma)^2}$$

Oft kommt es lediglich darauf an, den zur Ebene wirkenden Teil der Kraft zu bestimmen. Man hat $\Pi = p \,.\, \cos\delta$.

Hier ist $p$ eine absolute Grösse.

Je nachdem der senkrechte Anteil der Kraft in die bezeichnende Richtung der Normale oder in die entgegengesetzte fällt, (je nachdem also die „bezeichnende“ Normalenrichtung gewählt wird), ist $\delta$ spitz oder stumpf, cos $\delta$ pos. oder negat.

Die Normale bildet mit den Axen Winkel, deren Cosinus $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sind; die Richtung der Kraft solche, deren Cosinus $\lambda$, $\mu$, $\nu$ sind.

Daher ist

$$\cos\delta = \alpha \,.\, \lambda + \beta \,.\, \mu + \gamma \,.\, \nu$$

und

$$\Pi = p\cos\delta = p(\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu)$$
$$= p\lambda \,.\, \alpha + p\mu \,.\, \beta + p\nu \,.\, \gamma,$$

und nach 3)

$$= (A\alpha + F\beta + E\gamma)\alpha + (F\alpha + B\beta + D\gamma)\beta + (E\alpha + D\beta + C\gamma)\gamma,$$

oder

$$\Pi = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 + 2D\beta\gamma + E\gamma\alpha + F\alpha\beta \quad . \; . \; . \; . \; . \; 4)$$

Wir denken uns nun durch den Punkt, in dem die Spannung für die gewählte Ebene stattfindet, alle möglichen Ebenen gelegt, und berücksichtigen bei jeder Ebene zwei entgegengesetzte Normalenrichtungen; dann entsprechen diesen alle möglichen Combinationen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$.

(Da nun die Ebene mit ihrer positiven Seite sich zum positiven Körpertheile, wie mit ihrer negativen Seite zum negativen Körpertheile verhält, indem beiderseits Anziehung ((oder Abstossung)) stattfindet, so kann man $\cos\delta$ das positive ((ein bestimmtes)) Zeichen geben, so dass $\Pi$ ein bestimmtes Zeichen erhält für alle $\alpha$, $\beta$, $\gamma$).

Nun denke man sich in den Richtungen der Normalen dieser Ebenen von dem ursprünglichen Punkte aus jedesmal solche Längen $r$ aufgetragen, dass $r^2\Pi =$ einer Constante $c$ wird. Jeder Combination $(\alpha, \beta, \gamma)$ entspricht nach 4) ein bestimmtes $\Pi$ und also auch ein bestimmtes $r$.

Die Längen der verschiedenen $r$ werden nun durch eine stetige Fläche abgegrenzt.

Bezeichnen wir die Coordinaten der Endpunkte, d. h. der Punkte dieser Fläche mit $x$, $y$, $z$, so ist allgemein (indem wir den Punkt, in welchem wir die Spannung der verschiedenen Ebenen untersuchen, zum Anfangspunkt nehmen)

$$\frac{x}{r} = \alpha, \quad \frac{y}{r} = \beta, \quad \frac{z}{r} = \gamma.$$

Demgemäss wird aus 4), indem wir zugleich mit $\frac{r^2}{c}$ multipliciren

$$\frac{A}{c}.x^2 + \frac{B}{c}.y^2 + \frac{C}{c}.z^2 + 2\frac{D}{c}yz + 2\frac{E}{c}zx + 2\frac{F}{c}xy = \frac{r^2}{c}.\Pi = \frac{c}{c} = 1.$$

Dies ist die Gleichung einer (Ober)fläche zweiten Grades, deren Mittelpunkt der Anfangspunkt ist. Macht nun eine der Hauptaxen dieser Fläche mit den Coordinatenaxen Winkel mit den Cosinus $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$, und ist ihre halbe Länge $= r_1$, so hat man nach einer bekannten Formel

$$\frac{1}{r_1^2} = \frac{\frac{A}{c}.\alpha_1 + \frac{F}{c}.\beta_1 + \frac{E}{c}.\gamma_1}{\alpha_1} = \frac{\frac{F}{c}.\alpha_1 + \frac{B}{c}.\beta_1 + \frac{D}{c}.\gamma_1}{\beta_1}$$
$$= \frac{\frac{E}{c}.\alpha_1 + \frac{D}{c}.\beta_1 + \frac{C}{c}.\gamma_1}{\gamma_1}.$$

Hieraus folgt

$$\frac{1}{r_1^4} = \frac{\alpha_1^2}{r_1^4} + \frac{\beta_1^2}{r_1^4} + \frac{\gamma_1^2}{r_1^4}$$
$$= \frac{1}{c^2}((A\alpha_1 + F\beta_1 + E\gamma_1)^2 + (F\alpha_1 + B\beta_1 + D\gamma_1)^2 + (E\alpha_1 + D\beta_1 + C\gamma_1)^2)$$
$$= \frac{p_1^2}{c^2}$$

nach 3)) wenn die der Ebene $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$ entsprechende Gesammtspannung mit $p_1$ bezeichnet wird, also

$$\frac{1}{r_1^2} = \frac{p_1}{c} = \frac{p_1}{r_1^2 . \Pi},$$

mithin

$$p_1 = \Pi$$

Demnach fällt für die drei Hauptebenen jener Fläche die gesammte Grösse der Spannung in die Richtung der Normale. Für jeden Punkt haben wir also drei auf einander senkrechte Hauptspannungsrichtungen.

Die drei Hauptspannungsgrössen bezeichnen wir durch $\Pi'$, $\Pi''$, $\Pi'''$; (sie sind zugleich die ganzen Spannungen).

Da $r$ in der kleinsten Axe ein Minimum, in der grössten ein Maximum besitzt, so wird gemäss der Relation $r^2\Pi = c$, eine der Hauptspannungen $\Pi$ ein Maximum (d. h. grösser als irgend ein senkrechter Spannungsanteil einer anderen Richtung), eine andere ein Minimum sein.

Nunmehr führen wir die drei Hauptspannungsrichtungen als Coordinatenrichtungen ein und behalten den Anfangspunkt bei.

Für diesen Fall wird

$$D = E = F = 0,$$

und

$$A = \Pi', \quad B = \Pi'', \quad C = \Pi'''.$$

Aus dem Schema

$$\begin{matrix} A & F & E \\ F & B & D \\ E & D & C \end{matrix} \quad \text{wird also} \quad \begin{matrix} \Pi' & 0 & 0 \\ 0 & \Pi'' & 0 \\ 0 & 0 & \Pi'''. \end{matrix}$$

Denken wir uns nun durch den Punkt eine beliebige Ebene ($\alpha$, $\beta$, $\gamma$), und untersuchen die Gesammtspannung für dieselbe in jenem Punkte, so erhalten wir dafür

$$p = \sqrt{p^2\lambda^2 + p^2\mu^2 + p^2\nu^2} = \sqrt{\Pi'^2\alpha^2 + \Pi''^2\beta^2 + \Pi'''^2\gamma^2}$$

Die senkrechte Spannungscomponente ist

$$\Pi = \Pi'\alpha^2 + \Pi''\beta^2 + \Pi'''\gamma^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 5)$$

Ist $\Pi' > \Pi'' > \Pi'''$, so ist

$$\sqrt{\Pi'^2\alpha^2+\Pi'^2\beta^2+\Pi'^2\gamma^2} > \sqrt{\Pi'^2\alpha^2+\Pi''\beta^2+\Pi'''^2\gamma^2}$$
$$> \sqrt{\Pi'''^2\alpha^2+\Pi'''\beta^2+\Pi'''^2\gamma^2},$$

also

$$\Pi' > p > \Pi''',$$

oder

$$p' > p > p'''.$$

Also, in den Hauptspannuugsrichtungen erreicht nicht ;uur die senkrechte Spannungscempenente, sondern anch die Gesammtspannung ihr Maximum und ihr Minimum.

Wir betrachten wieder einen Körper, auf den beliebige Kräfte wirken, unter deren Einfluss die Teilchen desselben gewisse Verschiebungen gegen einander erleiden.

Findet an einer Stelle eino Entfernung der Teilchen von einander statt, se nennt man das eine Dehnung des Körpers an dieser Stelle, eine Näherung der Teilchen bezeichnet man als Zusammendrückung.

So wie man Druck als negativen Zug ausehen kann, so kann man auch Zusammendrückung als negative Dehnung bezeichnen. Anch hier gelten allgemeine Gesetze, und es können nur solche Dehnungen und Zusammendrückungen eintreten, die diesen Bedingungen entsprechen.

Ein Punkt $M$ des Körpers habe jetzt, nach einer kleinen Verschiebung, die Ceordinaten $x$, $y$, $z$; vor der Verschiebung hatte er die Ceordinaten $x-\xi$, $y-\eta$, $z-\zeta$.

$\xi$, $\eta$, $\zeta$ sind die Compenenten der Verschiebung, die der Punkt $M$ erlitten hat. Diese nehmen wir nun se klein an, dass wir höhere Potenzen derselben vernachlässigen können (klein gegen die Distanz zweier materiellen Punkte des Körpers).

Die Verschiebung ist eine Function der Coordinaten $x$, $y$, $z$ des Punktes $M$; wir nehmen au, dass diese sich stetig ändern, so dass die Differentialquotienten immer endlich bleiben; diese werden sogar sehr kleine Werte annehmen, in Folge der angenommenen Kleinheit der Verschiebungen.

Der Punkt $M_1$ habe jetzt, nach der Verschiebung, die Ceordinaten $x+\delta x$, $y+\delta y$, $z+\delta z$.

Da nun $\xi = f(x, y, z)$ ist, se ist

$$\xi_1 = \xi + \frac{\partial \xi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \xi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \xi}{\partial z}\delta z.$$

Daher hatte $M_1$ ursprünglich parallel der $x$ Axe die Coordinate

$$x + \delta x - \xi_1 =$$
$$(x+\delta x) - (\xi + \frac{\partial \xi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \xi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \xi}{\partial z}\delta z).$$

Ebenso war die ursprüngliche $y$ Coordinate gleich

$$(y+\delta y) - (\eta + \frac{\partial \eta}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \eta}{\partial y}\delta z + \frac{\partial \eta}{\partial z}\delta z);$$

und die ursprüngliche $z$ Coordinate gleich

$$(z+\delta z) - (\zeta + \frac{\partial \zeta}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \zeta}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \zeta}{\partial z}\delta z).$$

Im damaligen Zustande war $(MM_1)^2 =$

$$\begin{aligned} r_0^2 = \quad & ((x-\xi) - (x+\delta x - \xi_1))^2 \\ & + ((y-\eta) - (y+\delta y - \eta_1))^2 \\ & + ((z-\zeta) - (z+\delta z - \zeta_1))^2 \\ = \quad & \left[\delta x - \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \xi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \xi}{\partial z}\delta z\right)\right]^2 \\ & + \left[\delta y - \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \eta}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \eta}{\partial z}\delta z\right)\right]^2 \\ & + \left[\delta z - \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \zeta}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \zeta}{\partial z}\delta z\right)\right]^2 \end{aligned}$$

Nun, nach der Verschiebung, ist $(MM_1')^2 =$

$$r^2 = \delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2,$$

$r$ mache mit den Coordinatenaxen Winkel, deren Cosinus $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ seien.

Dann ist

$$\frac{\delta x}{r} = \alpha, \quad \frac{\delta y}{r} = \beta, \quad \frac{\delta z}{r} = \gamma.$$

Dann ergibt sich sofort

$$\begin{aligned} \frac{r_0^2}{r^2} = & \left(\alpha - \frac{\partial \xi}{\partial x}\alpha - \frac{\partial \xi}{\partial y}\beta - \frac{\partial \xi}{\partial z}\gamma\right)^2 \\ & + \left(\beta - \frac{\partial \eta}{\partial x}\alpha - \frac{\partial \eta}{\partial y}\beta - \frac{\partial \eta}{\partial z}\gamma\right)^2 \\ & + \left(\gamma - \frac{\partial \zeta}{\partial x}\alpha - \frac{\partial \zeta}{\partial y}\beta - \frac{\partial \zeta}{\partial z}\gamma\right)^2. \end{aligned}$$

Nun entwickeln wir beide Seiten in Reihen. Wir setzen

$$r = r_0(1+\varepsilon),$$

wo $\varepsilon$ die Dehnung der Längeneinheit in der Richtung $MM_1$ bedeutet. (Die Richtungen $r_0$ und $r$ sind sozusagen parallel.)

Digitized by Google

Alsdann ist

$$\frac{r_0^2}{r^2} = \frac{1}{(1+\varepsilon)^2} = (1+\varepsilon)^{-2} = 1-2\varepsilon;$$

indem einer sehr kleinen Verschiebung auch eine sehr kleine Dehnung entspricht.

Entwickeln wir nun auch die andere Seite mit Vernachlässigung der Glieder mit Producten der Differentialquotienten, so ergibt sich die Gleichung

$$\begin{aligned} 1-2\varepsilon = & \frac{r_0^2}{r^2} \\ = & \alpha^2 - 2\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\alpha^2 + \frac{\partial \xi}{\partial y}\alpha\beta + \frac{\partial \xi}{\partial z}\alpha\gamma\right) \\ & + \beta^2 - 2\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\alpha\beta + \frac{\partial \eta}{\partial y}\beta^2 + \frac{\partial \eta}{\partial z}\beta\gamma\right) \\ & + \gamma^2 - 2\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\alpha\gamma + \frac{\partial \zeta}{\partial y}\beta\gamma + \frac{\partial \zeta}{\partial z}\gamma^2\right) \end{aligned}$$

Setzen wir nun

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = a; \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = b; \frac{\partial \zeta}{\partial z} = c;$$

$$\left(\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right) = 2d; \quad \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z}\right) = 2e; \quad \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\right) = 2f,$$

so erhalten wir

$$1-2\varepsilon = 1-2(a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + 2d\beta\gamma + 2e\gamma\alpha + 2f\alpha\beta$$

oder

$$\varepsilon = a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + 2d\beta\gamma + 2e\gamma\alpha + 2f\alpha\beta \quad . \; . \; . \; . \; . \; 6)$$

Hier haben wir für $\varepsilon$ eine Gleichung ganz von derselben Form, wie Gl. 4), die uns einen Ausdruck für $\Pi$ lieferte.

Statt der dortigen Coefficienten $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$ haben wir hier $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$.

So wie wir $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$ als gegeben annehmen, können wir sofort $\varepsilon$ nach einer beliebigen Richtung ($\alpha$, $\beta$, $\gamma$) bestimmen.

Auf die Gleichung 6) können wir nun Betrachtungen anwenden, die den früher (bei Gl. 4)) angewandten ganz analog sind.

Auch hier überzeugen wir uns von dem Vorhandensein dreier auf einander senkrechter Hauptdehnungsrichtungen, die mit den Hauptaxen der Fläche

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dyz + 2ezx + 2fxy = 1$$

zusammenfallen.

Ist $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ eine Hauptdehnungsrichtung, so wird die hier stattfindende Hauptdehnung durch

$$\varepsilon = \sqrt{(a\alpha_1 + f\beta_1 + e\gamma_1)^2 + (f\alpha_1 + b\beta_1 + d\gamma_1)^2 + (e\alpha_1 + d\beta_1 + c\gamma_1)^2}$$

ausgedrückt. Für eine andere Richtung findet diese Gleichung nicht statt. In der Tat, verfährt man wie früher, setzt $(r^2\varepsilon = c)$ (einfacher) $r^2\varepsilon = 1$, so bilden die Endpunkte der $r$ die eben erwähnte Fläche. (Wir betrachten hier einen Fall, wo nach allen Richtungen Ausdehnung stattfindet, also nach allen Richtungen $\varepsilon$ positiv ist).

Macht nun eine der Hauptaxen dieser Fläche mit den Coordinatenaxen Winkel mit den Cosinus $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ und ist ihre halbe Länge $= r_1$, so hat man nach einer bekannten Formel:

$$\frac{1}{r_1^2} = \frac{a\alpha_1 + f\beta_1 + e\gamma_1}{\alpha_1} = \frac{f\alpha_1 + b\beta_1 + d\gamma_1}{\beta_1} = \frac{e\alpha_1 + d\beta_1 + c\gamma_1}{\gamma_1},$$

und hieraus folgt leicht

$$\frac{1}{r_1^4} = \frac{\alpha_1^2}{r_1^4} + \frac{\beta_1^2}{r_1^4} + \frac{\gamma_1^2}{r_1^4} = (a\alpha_1 + f\beta_1 + e\gamma_1)^2 + (f\alpha_1 + b\beta_1 + d\gamma_1)^2 + (e\alpha_1 + d\beta_1 + c\gamma_1)^2,$$

also

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon r_1^2}{r_1^2} = \frac{1}{r_1^2} = \sqrt{(a\alpha_1 + f\beta_1 + e\gamma_1)^2 + (f\alpha_1 + b\beta_1 + d\gamma_1)^2 + (e\alpha_1 + d\beta_1 + c\gamma_1)^2}$$

Setzt man zur Abkürzung

$$a\alpha_1 + f\beta_1 + e\gamma_1 = L, \quad f\alpha_1 + b\beta_1 + d\gamma_1 = M, \quad e\alpha_1 + d\beta_1 + c\gamma_1 = N,$$

so kann man auch folgendermassen verfahren:

Man hat die Gleichung

$$\begin{aligned}\varepsilon &= a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + 2d\beta\gamma + 2e\gamma\alpha + 2f\alpha\beta \\ &= L\alpha + M\beta + N\gamma.\end{aligned}$$

Sobald man eine der Hauptrichtungen betrachtet, erhält man noch die Gleichungen

$$\frac{1}{r_1^2} = \frac{L_1}{\alpha_1} = \frac{M_1}{\beta_1} = \frac{N_1}{\gamma_1}.$$

In Folge dieser Gl. ist:

$$\begin{array}{l|l|l} L_1^2\beta_1^2 = L_1M_1\alpha_1\beta_1 & M_1^2\gamma_1^2 = M_1N_1\beta_1\gamma_1 & N_1^2\alpha_1^2 = L_1N_1\alpha_1\gamma_1 \\ L_1^2\gamma_1^2 = L_1N_1\alpha_1\gamma_1 & M_1^2\alpha_1^2 = L_1M_1\alpha_1\beta_1 & N_1^2\beta_1^2 = M_1N_1\beta_1\gamma_1 \end{array}$$

Somit ist für eine Hauptaxenrichtung

$$\varepsilon = L_1\alpha_1 + M_1\beta_1 + N_1\gamma_1 = \sqrt{(L_1\alpha_1 + M_1\beta_1 + N_1\gamma_1{}^2)}$$
$$= \sqrt{(L_1{}^2\alpha_1{}^2 + M_1{}^2\beta_1{}^2 + N_1{}^2\gamma_1{}^2 + 2L_1M_1\alpha_1\beta_1 + 2L_1N_1\alpha_1\gamma_4 + 2M_1N_1\beta_1\gamma_1)}$$
$$= \sqrt{L_1{}^2(\alpha_1{}^2 + \beta_1{}^2 + \gamma_1{}^2) - M_1{}^2(\alpha_1{}^2 + \beta_1{}^2 + \gamma_1{}^2) + N_1{}^2(\alpha_1{}^2 + \beta_1{}^2 + \gamma_1{}^2)}$$
$$= \sqrt{L_1{}^2 + M_1{}^2 + N_1{}^2}.$$

Die 3 Hauptaxen der eben erwähnten Fläche nehmen wir nun zu Coordinatenaxen. Was nehmen $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$ dann für Werte an?

Die entwickelten Gleichungen gelten für jedes rechtwinkelige Coordinatensystem, nur werden jedesmal die Coefficienten $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$ ihre Werte ändern.

Bezeichnen wir die drei Hauptdehnungen, d. i. die Dehnungen nach den drei Hauptrichtungen, mit $\varepsilon'$, $\varepsilon''$, $\varepsilon'''$, so haben wir für unser neues Coordinatensystem:

$$a = \varepsilon', \quad b = \varepsilon'', \quad c = \varepsilon''', \quad d = 0, \quad e = 0, \quad f = 0.$$

(Wäre dem nicht so, dann könnte die Gleichung obiger Fläche auf dieses System auch nicht von der Form $\varepsilon' y^2 + \varepsilon'' y^2 + \varepsilon''' z^2 = 1$ sein, d. h. die neuen Axen wären nicht die Hauptaxen der Fläche).

Die Dehnung nach einer beliebigen Richtung wird nun ausgedrückt durch $(\alpha, \beta, \gamma)$

$$\varepsilon = \varepsilon'\alpha^2 + \varepsilon''\beta^2 + \varepsilon'''\gamma^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 7)$$

Ist nun z. B. $\varepsilon' > \varepsilon'' > \varepsilon'''$, so ist offenbar

$$\varepsilon'\alpha^2 + \varepsilon'\beta^2 + \varepsilon'\gamma^2 > \varepsilon'\alpha^2 + \varepsilon''\beta^2 + \varepsilon'''\gamma^2 > \varepsilon'''\alpha^2 + \varepsilon'''\beta^2 + \varepsilon'''\gamma^2,$$

oder

$$\varepsilon' > \varepsilon > \varepsilon''', \text{ d. h.}$$

Die Dehnung erreicht in einer Hauptaxe ein Maximum, in einer andern Hauptaxe ein Minimum.

Jetzt nehmen wir drei beliebige, auf einander senkrechte Richtungen:

$$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \quad \alpha_2, \beta_2, \gamma_2; \quad \alpha_3, \beta_3, \gamma_3;$$

und suchen die Grösse der Dehnungen nach ihnen zu bestimmen. Wir haben sofort nach 7)

$$\varepsilon_1 = \varepsilon'\alpha_1{}^2 + \varepsilon''\beta_1{}^2 + \varepsilon'''\gamma_1{}^2$$
$$\varepsilon_2 = \varepsilon'\alpha_2{}^2 + \varepsilon''\beta_2{}^2 + \varepsilon'''\gamma_2{}^2$$
$$\varepsilon_3 = \varepsilon'\alpha_3{}^2 + \varepsilon''\beta_3{}^2 + \varepsilon'''\gamma_3{}^2$$

Addiren wir diese drei Gleichungen, und berücksichtigen wir, dass

$$\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2=\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2=\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2=1,$$

so kommt

$$\varepsilon_1+\varepsilon_1+\varepsilon_3=\varepsilon'+\varepsilon''+\varepsilon''' \quad \ldots \ldots \ldots 8)$$

Also für alle Systeme von je drei anf einander senkrechten Geraden, die man dnrch einen Punkt legen kann, ist die Snmme der drei Dehnnngen constant, gleich der Summe der drei Hauptdehnnngen.

(Ebenso konnten wir früher aus Gleichung 5) ableiten:

$$\Pi_1+\Pi_2+\Pi_3=\Pi'+\Pi''+\Pi''').$$

Bisher haben wir nur die lineare Ausdehnung betrachtet. Fassen wir nnn einmal ein kleines Körperchen ins Auge, so sehen wir, dass mit linearer Ausdehnung auch Volumenansdehnnng (kubische Ausdehnnug, Raumausdehuung) verbnnden ist.

Das Volnmen des Körperchens sei ursprünglich $V_0$, nach der Ausdehnnng $V$.

Wir setzen

$$V=V_0(1+v),$$

wo $v$ die Ausdehnnng der Volnmeneinheit bedeutet.

In welcher Beziehung steht nnn die Volnmenansdehnung zur linearen Ausdehnnng?

Es kommt anf Eins hinaus, welche Gestalt man für das Körperchen annehme; ob es eine Kngel, ein Würfel etc. etc. sei.

Wir denken uns eine nnendlich kleine Kugel mit dem Radius $r_0$. Nach verschiedenen Richtungen wird sich der Radins im allgemeinen verschieden ansdehnen.

Man wird die Beziehung erhalten:

$$r=r_0(1+\varepsilon),$$

wo $\varepsilon$ aus der jedesmaligen Richtnng $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ sich bestimmt nach der Formel 7) $\varepsilon=\varepsilon'\alpha^2+\varepsilon''\beta^2+\varepsilon'''\gamma^2$. So kommt

$$\frac{1}{r^2}=\frac{1}{r_0^2(1+\varepsilon)^2}=\frac{1}{r_0^2}\ (1+\varepsilon)^{-2}=\frac{1}{r_0^2}(1-2\varepsilon)$$

$$=\frac{1}{r_0^2}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2[\varepsilon'\alpha^2+\varepsilon''\beta^2+\varepsilon'''\gamma^2])$$

$$=\frac{1}{r_0^2}(\alpha^2(1-2\varepsilon')+\beta^2(1-2\varepsilon'')+\gamma^2(1-2\varepsilon'''))$$

$$=\frac{1}{r_0^2}\left(\frac{\alpha^2}{(1+\varepsilon')^2}+\frac{\beta^2}{(1+\varepsilon'')^2}+\frac{\gamma^2}{(1+\varepsilon''')^2}\right).$$

Nun nehmen wir die drei Hauptdehnungsrichtungen zu Coordinatenrichtungen, und den Mittelpunkt des Körperchens zum Coordinatenanfangspunkt. Dann ist die Gleichung der Oberfläche des Körperchens nach der Dehnung (da $r\alpha = x$, $r\beta = y$, $r\gamma = z$ ist),

$$1 = \frac{x^2}{r_0^2(1+\varepsilon')^2} + \frac{y^2}{r_0^2(1+\varepsilon'')^2} + \frac{z^2}{r_0^2(1+\varepsilon''')^2}.$$

Dies ist die Gleichung eines Ellipsoides mit den Halbaxen $r_0(1+\varepsilon')$, $r_0(1+\varepsilon'')$, $r_0(1+\varepsilon''')$.

Indem sich die Kugel in ein Ellipsoid verwandelt, hat sich das Volumen vermehrt um

$$\tfrac{4}{3}r_0^3\pi(1+\varepsilon')(1+\varepsilon'')(1+\varepsilon''') - \tfrac{4}{3}r_0^3\pi$$

oder um

$$\tfrac{4}{3}r_0^3\pi(\varepsilon'+\varepsilon''+\varepsilon''').$$

Demgemäss haben wir

$$V = V_0(1+v) = V_0(1+(\varepsilon'+\varepsilon''+\varepsilon''')),$$

$$v = \varepsilon'+\varepsilon''+\varepsilon''', \quad \text{d. h.}$$

Die kubische Ausdehnung an irgend einer Stelle ist gleich der Summe der drei Hauptdehnungen. Nach Gl. 8) ist nun auch

$$v = \varepsilon'+\varepsilon''+\varepsilon''' = \varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 9)$$

Daher haben wir allgemeiner den Satz:

Die Raumausdehnung an irgend einer Stelle des Körpers ist gleich der Summe der drei linearen Dehnungen nach irgend drei auf einander senkrechten Richtungen, und daher unter Anderem auch gleich der Summe der drei Hauptdehnungen.

Sind die drei Hauptdehnungen einander gleich, so ist

$$\varepsilon' = \varepsilon'' = \varepsilon'''$$

und also

$$\varepsilon = \varepsilon'(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) = \varepsilon';$$

also sind in diesem Falle die Dehnungen nach allen Richtungen gleich. Man hat hier

$$v = \varepsilon'+\varepsilon''+\varepsilon''' = 3\varepsilon',$$

d. h. die Raumausdehnung ist in diesem Falle gleich der dreifachen linearen Ausdehnung.

Bisher haben wir die Dehnung ganz für sich allein betrachtet; jetzt betrachten wir Dehnungserscheinungen zusammen mit Spannungserscheinungen.

Befindet sich ein Körper im natürlichen Zustande, und wirken keine äusseren Kräfte auf ihn ein, so herrscht unter dem Einflusse der Molekularkräfte Gleichgewicht in demselben.

Wirken nun aber äussere Kräfte auf ihn ein, dann findet doppeltes statt:

1) Dehnungen (Zusammendrückungen).

2) Innere Spannungen.

Beides entsteht also durch dieselbe Ursache.

Zwischen den Molekülen eines Körpers findet ein gewisser Zusammenhang statt.

Ist der Körper in allen Punkten ganz gleich beschaffen, so heisst er homogen; im anderen Falle heterogen. Ist er homogen, so kann von jedem einzelnen Punkte desselben aus nach verschiedenen Richtungen hin eine Verschiedenheit in der Lagerung der Moleküle stattfinden. Dies ist der Fall bei den krystallinischen Körpern, z. B. dem Kalkspath. Da zeigt sich nach den verschiedenen Richtungen um einen Punkt herum ein verschiedenes Verhalten hinsichtlich der Elasticität, der Fortpflanzung des Lichtes, des Schalles, der Leitungsfähigkeit für Wärme, für Elektricität. (Dann heisst der Körper heterotrop).

Ist das Verhalten dieser Eigenschaften des Körpers nach allen Richtungen um einen Punkt herum hingegen gleich, so heisst der Körper isotrop.

Unsere bisherigen Untersuchungen galten für beliebige Körper, waren sie nun heterogen, oder homogen und heterotrop, oder homogen und isotrop.

Von nun an setzen wir isotrope Körper voraus.

Unter dem Einflusse äusserer Kräfte kann der Körper nach verschiedenen Richtungen hin verschiedene Dehnungen erleiden, denen wieder verschiedene Spannungen entsprechen.

Wie wir nun früher gesehen haben, gibt es drei sogenannte Hauptspannungen, (unter denen sich das Maximum und das Minimum der ganzen Spannung sowol wie des normalen Anteils derselben befinden), welche ganz in die Normale der angegriffenen Ebene fallen.

Die drei Hauptdehnungsrichtungen fallen nun mit den drei Hauptspannungsrichtungen zusammen. Wo die stärkste, geringste (mittlere) Spannung stattfindet, da hat auch die grösste, geringste (mittlere) Dehnung stattgefunden.

Nun können wir einen Zusammenhang anfstellen zwischen den Hauptspannungen und den Hauptdehnungen. Wir bezeichnen sie, wie früher, durch resp. $\Pi'$, $\Pi''$, $\Pi'''$ und $\varepsilon'$, $\varepsilon''$, $\varepsilon'''$.

Durch die Hauptdehnungen und die Hauptspannungen ist dann sofort der ganze Zustand des Körpers hinsichtlich der Dehnung und Spannung nach jeder Richtung hin bestimmt.

Da nun $\varepsilon'$ mit $\Pi'$ der Richtung nach coincidirt, $\varepsilon''$ und $\varepsilon'''$ aber der Richtung nach auf $\Pi'$ senkrecht stehen, so wird in dem Ausdrucke für $\Pi'$ das $\varepsilon'$ in einer gewissen Weise vorkommen, die beiden anderen $\varepsilon''$ und $\varepsilon'''$ hingegen in einer anderen, aber, da der Körper als isotrop vorausgesetzt wird, unter sich gleichen Weise.

Da durch $\varepsilon'$, $\varepsilon''$, $\varepsilon'''$ alle Dehnungen bestimmt sind, so braucht $\Pi'$ blos von diesen drei Grössen abzuhängen.

Demnach können wir setzen

$$\Pi' = g + h_{,}\varepsilon_{,} + K_{,}\varepsilon'' + K_{,}\varepsilon''' + p\varepsilon'^2 + r\varepsilon''^2 + r\varepsilon'''^2$$
$$+ q\varepsilon'\varepsilon'' + q\varepsilon'\varepsilon'' + s\varepsilon''\varepsilon''' + \text{etc.} + \text{etc.} + \text{etc.} \ldots$$

Wegen der Kleinheit der $\varepsilon'$, $\varepsilon''$, $\varepsilon'''$ brauchen wir keine höheren Glieder als von der ersten Potenz zu berücksichtigen und erhalten einfacher:

$$\Pi' = g + h_{,}\varepsilon' + K_{,}\varepsilon'' + K_{,}\varepsilon'''.$$

Das constante Glied $g$ fällt aber auch noch weg; denn befindet sich der Körper im natürlichen Zustande, wo keine Dehnungen stattgefundén haben, so können auch keine Spannungen auftreten. Also kommt

$$\Pi' = h_{,}\varepsilon' + K_{,}\varepsilon'' + K_{,}\varepsilon'''.$$

Ebenso kommt

$$\Pi'' = K_{,,}\varepsilon' + h''\varepsilon'' + K_{,,}\varepsilon'''$$

und

$$\Pi''' = K_{,,,}\varepsilon + K_{,,,}\varepsilon_{,,} + h_{,,,}\varepsilon_{,,,}.$$

Vertauscht man die Werte von $\varepsilon'$ und $\varepsilon''$, so muss, da der Körper isotrop ist, nicht blos eine Aenderung, sondern auch eine Vertauschung der Werte von $\Pi'$ und $\Pi''$ stattfinden. Man erhält so:

$$\Pi' = K_{,,}\varepsilon'' + h_{,,}\varepsilon' + K_{,,}\varepsilon''' \quad \text{und} \quad \Pi'' = h_{,}\varepsilon'' + K_{,}\varepsilon' + K_{,}\varepsilon'''.$$

Da diese Relationen stattfinden, was auch $\varepsilon'''$ für Werte haben mag, so hat man sofort

$$h_{,}\varepsilon' + K_{,}\varepsilon'' = K_{,,}\varepsilon'' + h_{,,}\varepsilon' \quad \text{und} \quad K_{,,}\varepsilon' + h_{,,}\varepsilon'' = h_{,}\varepsilon'' + K_{,}\varepsilon'.$$

Hieraus folgt

$$h_{,} = h_{,,}, \quad K_{,} = K_{,,}.$$

(Am allereinfachsten konnte man von vorneherein $\varepsilon'' = \varepsilon''' = 0$ setzen).

Ebenso folgt nun auch

$$h_{,} = h_{,,,}, \quad K_{,} = K_{,,,},$$

so dass also

$$h_{,} = h_{,,} = h_{,,,}, \quad K_{,} = K_{,,} = K_{,,,}$$

ist. Wir setzen erstere $= h$, letztere $= K$.

Also haben wir

$$\begin{aligned} \Pi' &= h\varepsilon' + K\varepsilon'' + K\varepsilon''' \\ \Pi'' &= K\varepsilon' + h\varepsilon'' + K\varepsilon''' \\ \Pi''' &= K\varepsilon' + K\varepsilon'' + h\varepsilon'''. \end{aligned}$$

Diese Gleichnngen können wir mit Hülfe von Gl. 9) weiter nmformen:

$$\begin{aligned} \Pi' &= h\varepsilon' - K\varepsilon' + K\varepsilon' + K\varepsilon'' + K\varepsilon''' = (h-K)\varepsilon' + Kv \\ \Pi'' &= K\varepsilon' + k\varepsilon'' - K\varepsilon'' + K\varepsilon'' + K\varepsilon''' = (h-K)\varepsilon'' + Kv \\ \Pi''' &= K\varepsilon' + K\varepsilon'' + h\varepsilon'' - K\varepsilon''' + K\varepsilon'''_{,} = (h-K)\varepsilon''' + Kv. \end{aligned}$$

Wir setzen $(h-K) = k$, und haben dann:

$$\Pi' = k\varepsilon' + Kv; \quad \Pi'' = k\varepsilon'' + Kv; \quad \Pi''' = k\varepsilon'', + Kv.$$

Wir werden später die physikalische Bedeutung dieser beiden Constanten $k$ hnd $K$ kennen lernen.

Jetzt betrachten wir eine beliebige Ebene, und vergleichen die ihr entsprechende senkrechte Spannungscomponente mit der in ihrer Normale $(\alpha, \beta, \gamma)$ stattfindenden Dehnung. Dann ist nach Gl. 5)

$$\Pi = \Pi'\alpha^2 + \Pi''\beta^2 + \Pi'''\gamma^2.$$

Setzen wir nun für $\Pi'$, $\Pi''$, $\Pi'''$ ihre obigen Werte, so kommt:

$$\begin{aligned} \Pi &= (k\varepsilon' + Kv)\alpha^2 + (k\varepsilon'' + Kv)\beta^2 + (k\varepsilon''' + Kv)\gamma^2 \\ &= k(\varepsilon'\alpha^2 + \varepsilon''\beta^2 + \varepsilon'''\gamma^2) + Kv(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \\ &= k\varepsilon + Kv \quad \text{(nach Gl. 7)).} \end{aligned}$$

Demnach gilt die Gleichnng, welche für die drei Hauptrichtnngen gilt, auch für jede beliebige Richtnng $(\alpha, \beta, \gamma)$, nämlich:

$$\Pi = k\varepsilon + Kv \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 10)$$

Wir sahen früher, dass znr Bestimmung der einer Eben[illegible] in einem bestimmten Pnnkte znkommenden Spann[illegible] 6 Constant[illegible]

geben sein mussten, indem von den 9 Spannnngscomponenten $\begin{matrix} A & F & E \\ F & B & D \\ E & D & C \end{matrix}$ dreimal je zwei einander gleich sind.

So wie wir diese kennen, können wir für jede durch den Pnnkt gelegte Ebene die Spannnug der Grösse und Richtnng nach angeben· Indem wir $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$ in der früheren Bedeutung nehmen, haben wir ja die Gl. 3):

$$p\lambda = A\alpha + F\beta + E\gamma$$
$$p\mu = F\alpha + B\beta + D\gamma$$
$$p\nu = E\alpha + D\beta + C\gamma$$

Können wir nun die Werte von $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$ auf die Grössen $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$ znrückführen, dann sind die Spannungen ansgedrückt dnrch die Verschiebnngen. Dazu erinnern wir uns der Gleichnngen 4) und 6):

$$\Pi = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 + 2D\beta\gamma + 2E\gamma\alpha + 2F\alpha\beta$$

nnd

$$\varepsilon = a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + 2d\beta\gamma + 2e\gamma\alpha + 2f\alpha\beta.$$

Da nnn

$$\Pi = k\varepsilon + Kv$$

ist nach Gl. 10), so folgt:

$$A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 + 2D\beta\gamma + 2E\gamma\alpha + 2F\alpha\beta = k(a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + 2d\beta\gamma + 2e\gamma\alpha + 2f\alpha\beta) + Kv(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2),$$

oder

$$\left.\begin{aligned} &(A - ka - Kv)\alpha^2 + 2(D - kd)\beta\gamma \\ &+ (B - kb - Kv)\beta^2 + 2(E - ke)\gamma\alpha \\ &+ (C - kc - Kv)\gamma^2 + 2(F - kf)\alpha\beta \end{aligned}\right\} = 0.$$

Dies gilt für jede beliebige Richtnng $(\alpha, \beta, \gamma)$; daher muss jeder Coefficient $= 0$ sein, wie sich folgendermassen ergibt. Nehmen wir die Richtung $(1, 0, 0)$, d. h. $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, so folgt aus letzter Gleichnng sofort

$$(A - ka - Kv) . 1^2 = 0 \quad \text{oder} \quad A = ka + Kv.$$

Ebenso liefern die Richtnngen $(0, 1, 0)$ und $(0, 0, 1)$

$$(B - kb - Kv) = 0 \quad \text{nnd} \quad (C - kc - Kv) = 0.$$

Daher bleibt noch von obiger Gleichnng

$$2(D - kd)\beta\gamma + 2(E - ke)\gamma\alpha + 2(F - kf)\alpha\beta = 0 \quad \text{oder}$$
$$(D - kd)\beta\gamma + (E - ke)\gamma\alpha + (F - kf)\alpha\beta = 0.$$

Betrachten wir nun drei Richtungen, für welche successive $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ ist, nämlich Richtungen $(0, \beta, \gamma)$, $(\alpha, 0, \gamma)$, $(\alpha, \beta, 0)$, so folgt

$$(D - kd)\beta\gamma = 0 \quad \text{oder} \quad (D - kd) = 0,$$
$$(E - ke)\gamma\alpha = 0 \quad \text{oder} \quad (E - ke) = 0,$$
$$(F - kf)\alpha\beta = 0 \quad \text{oder} \quad (F - kf) = 0.$$

In diesen Relationen können wir noch für $a, b, c, d, e, f$ ihre Werte einsetzen und erhalten dann folgendes System:

11)
$$\left\{\begin{aligned}
A &= ka + Kv = k\frac{\partial\xi}{\partial x} + Kv \\
B &= kb + Kv = k\frac{\partial\eta}{\partial y} + Kv \\
C &= kc + Kv = k\frac{\partial\zeta}{\partial z} + Kv \\
D &= \quad kd \quad = \frac{k}{2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial z} + \frac{\partial\zeta}{\partial y}\right) \\
E &= \quad ke \quad = \frac{k}{2}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \frac{\partial\xi}{\partial z}\right) \\
F &= \quad kf \quad = \frac{k}{2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial\eta}{\partial x}\right)
\end{aligned}\right.$$

Diesen Betrachtungen liegt irgend ein rechtwinkeliges Coordinatensystem zu Grunde. Bezeichnen wir die Dehnungen nach Richtung dieser Axen durch $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\varepsilon_3$, so ist also

$$\varepsilon_1 = a = \frac{\partial\xi}{\partial x}, \quad \varepsilon_2 = b = \frac{\partial\eta}{\partial y}, \quad \varepsilon_3 = c = \frac{\partial\zeta}{\partial z},$$

und somit nach Gl. 9)

12)
$$v = \frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial z}.$$

Nun haben wir die Hauptgleichungen für die im Inneren eines Körpers auftretenden Spannungen entwickelt.

In der Gleichung 11) kommen noch die beiden unbestimmten Constanten $k$ und $K$ vor. Diese beiden Constanten müssen notwendig in der Gleichung vorkommen, da der Grad der Festigkeit für verschiedene Körper verschieden ist.

Können wir nun das Verhältniss von $k$ zu $K$ bestimmen?

Bisher haben wir keine Annahmen über den Zusammenhang der

Digitized by Google

Moleküle des Körpers gemacht, es sei denn, dass wir einen homogenen, isotropen Körper voranssetzten.

Canchy macht gewisse Hypothesen über die Moleküle, ihre Anordnung, ihre Wirknngen, und kommt anf Grnnd dessen zn dem Resultate $K = \frac{k}{2}$. Wir gehen nicht näher auf seine Entwickelnngen ein, da seine Annahmen nicht so ganz zuverlässig sind.

Poisson von anderen Betrachtungen ausgehend fand ebenfalls $K = \frac{k}{2}$.

Lamé nnd Clapeyron, wieder von anderen Betrachtnngen ausgehend, fanden dieselbe Gleichung.

Also mehrere Mathematiker gelangten mit ihren verschiedenen Hypothesen zu demselben Schlnsse. Lässt sich nun dieses Resultat experimentell prüfen?

Man kann folgende Untersuchuug anstellen:

Wir nehmen einen prismatischen Körper nnd belasten ihn. Wird er nun in die Länge gezogen, so zieht er sich seitlich zusammen.

Die nnn anznstellenden Beobachtnngen müssen mit der entwickelten Formel verglichen werden.

Sei der Stab sehr dünn. In Folge der Belastung dehnt sich die Längeneinheit um $\varepsilon'$ aus, die seitlichen Znsammenziehnngen oder negativen Dehnungen sind $\varepsilon''$ und $\varepsilon'''$. Ueberall in dem Körper entsteht nun in der Längsrichtnng eine Spannnng, eine Hauptspannung, die sich bestimmt durch die Gleichung:

$$\Pi' = P = k\varepsilon' + Kv.$$

Die beiden anderen Spannnngeu sind verschwindend klein, uud es ist

$$\Pi'' = 0 = k\varepsilon'' + Kv,$$
$$\Pi''' = 0 = k\varepsilon''' + Kv.$$

Hieraus folgt

$$k(\varepsilon'' - \varepsilon''') = 0, \quad (\varepsilon'' - \varepsilon''') = 0, \quad \varepsilon'' = \varepsilon'''.$$

Dies war voranszusehen.

Wir haben daher

$$0 = k\varepsilon'' + Kv = k\varepsilon'' + K(\varepsilon' + \varepsilon'' + \varepsilon''') = K\varepsilon' + (k + 2K)\varepsilon'',$$

mithin

$$\varepsilon'' = -\frac{K}{k+2K}.\varepsilon'.$$

Es ist dies eine Beziehnng zwischeu der Längenansdehnung und der seitlicheu Contraction. Da $\varepsilon''$ negativ ist, so sehen wir, dass eine Coutraction erfolgt.

Nach Cauchy's Annahme ist nun $K = \frac{k}{2}$; also

$$\varepsilon'' = -\frac{\frac{k}{2}}{k+2.\frac{k}{2}}.\varepsilon' = -\tfrac{1}{4}\varepsilon', \quad \varepsilon'' = -\tfrac{1}{4}\varepsilon'.$$

Der Versuch muss nun mit diesem theoretischen Resultate verglichen werden.

Man kann auch so sageu:

Wenn die Länge des Stabes znnimmt, so erfolgt anch eine Volumenzunahme, die je nachdem der Stab seitlich sich mehr oder weniger (auch: gar nicht) zusammenzieht, kleiner oder grösser ist. Welches ist nun das Verhältuiss zwischen Volumenzunahme und Längenzunahme?

Aus unserer obigen Gleichung $0 = k\varepsilon'' + Kv$ folgt

$$v = -\frac{k}{K}\varepsilon'' = \text{(nach Obigem)} -\frac{k}{K}\left(-\frac{K}{k+2K}\varepsilon'\right) = \frac{k}{k+2K}\varepsilon'.$$

Nach Cauchy und Poisson ist nun $K = \frac{k}{2}$ (und $\varepsilon'' = -\frac{1}{4}\varepsilon'$);

demnach kommt hier

$$v = +\tfrac{1}{2}\varepsilon' \left(\text{oder } v = -\frac{k}{K}\varepsilon'' = -2\varepsilon'' = \tfrac{1}{2}\varepsilon'\right).$$

Nach Canchy und Poisson ist also die seitliche Zusammenziehnng gleich $\frac{1}{4}$ der Läugenansdehnnng, und die Volnmenzunahme gleich $\frac{1}{2}$ der Längenausdehnung.

Wertheim fand dagegeu auf experimentellem Wege $\varepsilon'' = -\frac{1}{3}\varepsilon'$. Setzen wir dieses in unsere Gleichung $\varepsilon'' = -\frac{K}{k+2K}\varepsilon'$ ein, so kommt

$$-\tfrac{1}{3}\varepsilon' = -\frac{K}{k+2K}\varepsilon', \text{ mithin } k = K.$$

Um jenes Versuchsresultat zu erhalten wandte Wertheim eine hohle Kautschuckröhre an. (Bei einem sich ausdehnenden Glas- oder

Metallstabe wären sehr kleine Grössen zu messen). Hier kommt es auf den Querschnitt der hohlen Kautschukröhre nicht an. Er habe die Gestalt eines Ringes. Der Hohlraum verhält sich nun gerade so wie das Volumen selbst. Die Kautschuckröhre endete oben in eine Capillarröhre und war mit Flüssigkeit gefüllt. So wie nun das Volumen ein wenig zunahm, erfolgte eine bedeutende Abnahme der Länge des Flüssigkeitfadens in der Capillarröhre. So war eine genaue Messung der Volumenänderung ermöglicht. Wertheim fand nun $v$ immer kleiner als $\frac{1}{2}\varepsilon'$; und zwar angenähert $v = \frac{1}{2}\varepsilon'$ bei 7 Versuchsröhren. (Aus $v = \varepsilon' + \varepsilon'' + \varepsilon''' = \varepsilon' + \varepsilon'' + \varepsilon''$ folgt dann $\frac{1}{2}\varepsilon' - \varepsilon' = 2\varepsilon''$, also $\varepsilon'' = -\frac{1}{4}\varepsilon'$).

Kirchhoff hat durch ganz andere Methoden gefunden, dass einer beliebigen Längenausdehnung eine bestimmte, seitliche Contraction entspricht, und zwar $\varepsilon'' = -0{,}294 . \varepsilon'$.

Dieser Wert liegt zwischen denen von Wertheim und von Cauchy, nämlich zwischen 0,333... und 0,25.

Nach einer anderen Messung, auf die er nicht so viel Vertrauen setzte, fand Kirchhoff $\varepsilon'' = -0{,}387 . \varepsilon'$.

Das Mittel genommen, kann man sagen, Kirchhoff's Resultate haben Wertheim's Versuche bestätigt, wenngleich der Wert $\varepsilon'' = -\frac{1}{4}\varepsilon'$ noch nicht ganz sicher ist.

Unsere obigen Formeln waren ganz zuverlässig bis zur Einführung des Verhältnisses der Grössen $k$ und $K$. Ueber den Wert $\frac{K}{k}$ war man zu verschiedenen Resultaten gelangt. Dies erklärt sich wahrscheinlich (nicht ganz sicher) aus der elastischen Nachwirkung. Wilhelm Weber entdeckte sie zuerst au organischen Körpern.

Nehmen wir einmal an, ein Seidenfaden werde durch Belastung gedehnt; er erleidet eine seitliche Contraction. Noch längere Zeit nachher findet eine Aenderung in der Molekularlage statt; es kann dieses in dem ganzen Zeitraum bis 24 Stunden später noch andauern. Es werden dann die Wirkungen der Contraction eines Teils rückgängig, und so bewirkt die elastische Nachwirkung eine Verringerung der ursprünglichen Wirkung. Wie diese nun in Rechnung zu bringen sei, daran können wir hier nicht eingehen, da Alles zu hypothetisch würde.

Cauchy und Poisson haben die elastische Nachwirkung nicht einbegriffen; Wertheim hat in seinen Versuchsresultaten „sie natürlich einbegriffen“ erhalten.

Es gibt Fälle, die elastischen Schwingungen, wo wegen der schnellen Wechsel der Dehnungen und der Zusammenziehungen die elastische Nachwirkung nicht zu berücksichtigen ist. Auf solche Fälle sind die Formeln von Cauchy und Poisson anzuwenden; auf Gleichgewichtsveränderungen dagegen die von Wertheim. (Allerdings nicht ganz sicher). Wir haben also Schwingungsformeln und Gleichgewichtsgleichungen in dieser Hinsicht von einander zu unterscheiden.

(Auch bei Metallen findet elastische Nachwirkung statt, nur in geringerem Masse).

Anwendungen auf ein paar specielle Fälle. Im weiteren Verlauf der Untersuchung wird sich ein Zusammenhang zwischen den Constanten $k$, $K$ und dem Elasticitätscoefficienten $q$ ergeben.

Sei gegeben ein Körper in Gestalt eines Parallelepipedons. Auf ihn können nach einer, zwei oder drei Hauptrichtungen Kräfte wirken. Demnach unterscheiden wir verschiedene Fälle.

1) Er werde durch eine Kraft $P_1$ (bezogen auf die Querschnittseinheit) nach einer Dimension gedehnt; in Folge dessen wird er eine seitliche Contraction erleiden. Wir haben dann die Gleichungen:

$$\Pi' = P_1 = k\varepsilon' + Kv,$$
$$\Pi'' = 0 = k\varepsilon'' + Kv,$$
$$\Pi''' = 0 = k\varepsilon''' + Kv.$$

Durch Addition erhalten wir

$$P_1 = k(\varepsilon' + \varepsilon'' + \varepsilon''') + 3Kv = kv + 3Kv = (k+3K)v;$$

also

$$v = \frac{P_1}{k+3K}.$$

Dies in die erste Gleichung eingesetzt, kommt

$$P_1 = k\varepsilon' + \frac{KP_1}{k+3K}, \quad k\varepsilon' = \frac{k+2K}{k+3K}P_1, \quad P_1 = \frac{k+3K}{k+2K}k\varepsilon'.$$

Denken wir uns einen Stab, dessen Länge = 1 Meter, dessen Querschnitt ein Quadratmillimeter sei. Nimmt seine Länge im Verhältnisse von $1:(1+\varepsilon)$ zu und ist $P_1 = q\varepsilon$, so heisst $q$ der Elasticitätscoefficient. Wir haben nun

$$q\varepsilon' = P_1 = \frac{k+3K}{k+2K}.k\varepsilon', \quad q = \frac{k+3K}{k+2K}.k.$$

Wir haben also eine Beziehung zwischen dem Elasticitätscoefficienten und unseren Constanten

$$13)\qquad q = \frac{k+3K}{k+2K}\cdot k.$$

Nach Cauchy und Poisson ist $K = \frac{k}{2}$, also $q = \frac{7}{5}k$.

Nach Wertheim hingegen ist $K = k$, also $q = \frac{4}{3}k$.

2) Nehmen wir an, sowohl in der Längenrichtnng als in der Breitenrichtung wirke eine Kraft $P_2$. Dann wird der Körper in der Höhenrichtung eine Contraction erleiden. Wir haben dann:

$$\Pi' = P_2 = k\varepsilon' + Kv;\quad \Pi'' = P_2 = k\varepsilon'' + Kv;\quad \Pi''' = 0 = k\varepsilon''' + Kv.$$

Darans ergibt sich

$$2P_2 = k(\varepsilon' + \varepsilon'' + \varepsilon''') + 3Kv = (k+3K)v,$$

$$P_2 = k\varepsilon' + Kv = k\varepsilon' + K.\frac{2P_2}{k+3K},\quad k\varepsilon' = \frac{k+K}{k+3K}P_2,$$

$$P_2 = \frac{k+3K}{k+K}.k\varepsilon'.$$

Um hier dasselbe $\varepsilon'$ hervorzubringen wie im ersten Falle muss also der Wert der beiden $P_2$ grösser sein als der des dortigen $P_1$.

Dadurch, dass nach zwei Dimensionen Kräfte wirken, dass zur Spannung in der Längsrichtung noch eine seitliche Spannung hinzukommt, wird die Dehnung in der Längsrichtung erschwert.

3) Wirken nach allen drei Dimensionen drei gleiche Kräfte $P_3$, wie das der Fall ist, wenn der Körper sich in comprimirtem Wasser befindet, so ist

$$\Pi' = P_3 = k\varepsilon' + Kv;\quad \Pi'' = P_3 = k\varepsilon'' + Kv;\quad \Pi''' = P_3 = k\varepsilon''' + Kv.$$

Addirt man, so kommt

$$3P_3 = k(\varepsilon' + \varepsilon'' + \varepsilon''') + 3Kv = (k+3K)v.$$

Demgemäss haben wir

$$P_3 = k\varepsilon' + Kv = k\varepsilon' + K.\frac{3P_3}{k+3K},$$

also

$$k\varepsilon' = \frac{k}{k+3K}.P_3,\quad P_3 = \frac{k+3K}{k}.k\varepsilon'.$$

Die Dehnung nach der Längsrichtung ist also noch mehr erschwert.

Um in allen drei Fällen dieselbe Dehnung $\varepsilon'$ nach der Längsrichtung hervorzubringen, muss also sein

$$P_1 : P_2 : P_3 = \left(\frac{k+3K}{k+2K}.k\varepsilon' : \frac{k+3K}{k+K}.k\varepsilon' : \frac{k+3K}{k}.k\varepsilon'\right)$$

$$= \frac{1}{k+2K} : \frac{1}{k+K} : \frac{1}{k} = \frac{1}{1+\frac{2K}{k}} : \frac{1}{1+\frac{K}{k}} : 1.$$

Nach Cauchy und Poisson ist $K = \frac{k}{2}$, also $P_1 : P_2 : P_3 = \frac{1}{2} : \frac{2}{3} : 1$
$= 1 : \frac{4}{3} : 2.$

Nach Wertheim ist $K = k$, also $P_1 : P_2 : P_3 = \frac{1}{3} : \frac{1}{2} : 1 = 1 : \frac{3}{2} : 3.$

Wir betrachten nun einige Fälle, wie sie bei Schallschwingungen öfters vorkommen. Wir betrachten einen parallelepipedischen Körper, auf den nur nach einer Richtung (nach der Längsrichtung) eine Kraft wirke. Wir unterscheiden wieder 3 Fälle.

1) Er soll sich nach allen drei Dimensionen ausdehnen können. Die Kraft bezeichnen wir durch $P_1'$. Für diesen Fall fanden wir vorhin unter 1) bereits

$$P_1' = \frac{k+3K}{k+2K}.k\varepsilon'.$$

2) Wir nehmen an, dass er sich nur nach Längen- und Breitenrichtung dehnen könne, während in der Längsrichtung eine Kraft $P_2'$ auf ihn wirkt. Dann haben wir

$$\Pi' = P_2' = k\varepsilon' + Kv,$$
$$\Pi'' = 0 = k\varepsilon'' + Kv, \quad \varepsilon''' = 0.$$

Durch Addition kommt

$$P_2' = k(\varepsilon' + \varepsilon'') + 2Kv = (k+2K)v, \quad v = \frac{P_2'}{k+2K}$$

Sonach ist

$$P_2' = k\varepsilon' + K.\frac{P_2'}{k+2K}, \qquad P_2'.\frac{k+K}{k+2K} = k\varepsilon',$$

$$P_2' = \frac{k+2K}{k+K}.k\varepsilon'.$$

3) Wir nehmen an, dass der Körper sich nur nach der Längsrichtung dehnen könne, in welcher eine Kraft $P_3'$ auf ihn wirkt. Hier haben wir

$$\Pi''' = P_3' = k\varepsilon' + Kv, \quad \varepsilon'' = 0, \quad \varepsilon''' = 0,$$

mithin

$$P_3' = k(\varepsilon' + \varepsilon'' + \varepsilon''') + Kv = (k+K)v,$$

also

$$v = \frac{P_3'}{k+K}.$$

Digitized by Google

Demnach

$$P_3' = k\varepsilon' + Kv = k\varepsilon' + K.\frac{P_3'}{k+K}, \qquad P_3'.\frac{k}{k+K} = k\varepsilon',$$

$$P_3' = \frac{k+K}{k}.k\varepsilon'.$$

Um also in allen drei Fällen gleiche $\varepsilon'$ hervorzubringen, muss sein

$$P_1':P_2':P_3' = \left(\frac{k+3K}{k+2K}.k\varepsilon' : \frac{k+2K}{k+K}.k\varepsilon' : \frac{k+K}{k}.k\varepsilon'\right)$$

$$= \frac{k+3K}{k+2K} : \frac{k+2K}{k+K} : \frac{k+K}{k}.$$

Nach Poisson und Cauchy giebt dies $P_1':P_2':P_3' = \frac{5}{4}:\frac{4}{3}:\frac{3}{2} = 1:\frac{16}{15}:\frac{18}{15}$.
Nach Wertheim ist $P_1':P_2':P_3' = \frac{4}{3}:\frac{3}{2}:\frac{2}{1} = 1:\frac{9}{8}:\frac{6}{4}$.

Wirken äussere Kräfte auf den Körper ein, so entstehen, wie wir bereits wissen, Dehnungen in demselben. Gleichzeitig mit den Dehnungen treten innere Spannungen auf, die zuletzt gross genug werden, um zu verhindern, dass die äusseren Kräfte noch weitere Dehnungen bewirken. Für den Zustand des Gleichgewichts compensiren sich gegenseitig die äusseren Kräfte und die inneren Spannungen. Lassen aber die äusseren Kräfte nach, werden die Spannungskräfte auf irgend eine Weise ihnen überlegen, so werden die Spannungskräfte eines Teils zu bewegenden Kräften, sie streben danach, den früheren Zustand wiederherzustellen.

Wir denken uns nun ein unendlich kleines Parallelepipedon mit den 3 Kanten $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$, (dessen Flächen also Unendlich-Kleine zweiter Ordnung, dessen Inhalt ein Unendlich-Kleines dritter Ordnung ist). Durch den Mittelpunkt des Parallelepipeds legen wir drei Ebenen, die mit den Flächen des Parallelepipeds, also auch mit den Coordinatenebenen beziehungsweise parallel sind. Auf diese Ebenen wirken nun gewisse Spannungen, die durch gewisse Kräfte dargestellt werden. Zerlegen wir sie in ihre Componenten, so haben wir:

| Wirkend auf | in der $x$- | $y$- | $z$-Richtung. |
|---|---|---|---|
| die $x$ Ebene (senkrecht zur $x$ Axe) | $A$ | $F$ | $E$ |
| die $y$ Ebene | $F$ | $B$ | $D$ |
| die $z$ Ebene | $E$ | $D$ | $C$ |

Zuvörderst richten wir unsere Aufmerksamkeit auf die $x$ Richtung.

An den 6 Grenzflächen wirken 6 Componenten nach der $x$ Richtung, drei Paare zu je zweien. Die $x$ Componente für die mittlere

$x$ Ebene ist $A$ (auf die Flächeneinheit bezogen). Da die Schwerpunkte der beiden $x$ Flächen des Parallelepipeds um $+\frac{\delta x}{2}$ nach der positiven und der negativen Richtung hiervon abstehen, so sind die betreffenden Componenten für sie (absolut genommen) resp.

$$A + \frac{\partial A}{\partial x} \cdot \frac{\delta x}{2} \quad \text{und} \quad A - \frac{\partial A}{\partial x} \cdot \frac{\delta x}{2}.$$

Die beiden $x$ Flächen des Parallelepipeds haben nun den Inhalt $\delta y . \delta z$. Also sind die ganzen Werte jener beiden $x$ Componenten

$$\left(A + \frac{\partial A}{\partial x} \cdot \frac{\delta x}{2}\right) \delta y . \delta z \quad \text{und} \quad \left(A - \frac{\partial A}{\partial x} \cdot \frac{\delta x}{2}\right) \delta y . \delta z.$$

Da nun aber diese Molekularspannungen nach entgegengesetzten Richtungen wirken, also von einander zu subtrahiren sind, so wirkt in der $+x$ Richtung die Spannung:

$$\frac{\partial A}{\partial x} . \delta x \delta y \delta z.$$

Aehnlich resultirt aus den beiden entgegengesetzt gerichteten Spannungen

$$\left(F + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\delta y}{2}\right) \delta z \delta x \quad \text{und} \quad \left(F - \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\delta y}{2}\right) \delta z \delta x$$

die Resultante nach der $+x$ Richtung

$$\frac{\partial F}{\partial y} . \delta x \delta y \delta z.$$

Ebenso resultirt aus den beiden entgegengesetzt gerichteten Spannungen

$$\left(E + \frac{\partial E}{\partial z} \cdot \frac{\delta z}{2}\right) \delta x \delta y \quad \text{und} \quad \left(E - \frac{\partial E}{\partial z} \cdot \frac{\delta z}{2}\right) \delta x \delta y$$

die Resultante nach der $+x$ Richtung

$$\frac{\partial E}{\partial z} . \delta x \delta y \delta z.$$

Die Gesammtspannung, die auf das kleine Körperchen nach der $x$ Richtung wirkt, ist also

$$\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial E}{\partial z}\right) \delta x \delta y \delta z$$

Ebenso ergibt sich für die $y$ Componente

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial z}\right) \delta x \delta y \delta z.$$

Digitized by Google

Endlich ist die $z$ Componente

$$\left(\frac{\partial E}{\partial x}+\frac{\partial D}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z}\right)\delta x\,\delta y\,\delta z.$$

Diesen Moleknlarkräften muss die änssere Kraft das Gleichgewicht halten für den Znstand der Ruhe. Sie ist, wie wir annehmen, dem Massenteilchen proportional. Auf die Masseneinheit bezogen seien ihre Componenten $X$, $Y$, $Z$. Das Volumen des Parallelepipeds ist $\delta x\,\delta y\,\delta z$, seine Dichtigkelt sei $\varrho$. Dann hat man

$$\left(\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial E}{\partial z}\right)\delta x\,\delta y\,\delta z+X.\varrho\,.\,\delta x\,\delta y\,\delta z=0,$$

oder

$$\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial E}{\partial z}+\varrho X=0.$$

14) Ebenso

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial D}{\partial z}+\varrho Y=0$$

nnd

$$\frac{\partial E}{\partial x}+\frac{\partial D}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z}+\varrho Z=0.$$

Flüssige nnd luftförmige Körper können wir ebenfalls als elastische Körper betrachten, nnr haben wir hier noch eine gewisse Vereinfachung. Der Druck ist nach allen Richtungen gleich, und zudem die Spannung auf allen Ebenen senkrecht. In diesen Fällen wird $D=E=F=0$; dies drückt nämlich aus, dass die Kraft auf den betreffenden Ebenen senkrecht ist. Ferner wird $A=B=C=-P$, indem $P$ den Drnck bedeutet. (Zug = positive Spannnng, Druck = negative Spannung). Dadurch werden für diese Fälle unsere obigen Gleichnngen:

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\varrho X,\quad \frac{\partial P}{\partial y}=\varrho Y,\quad \frac{\partial P}{\partial z}=\varrho Z.$$

Dies sind die drei hydrostatischen Gleichnngen, welche Anwendung finden, wenn eine äussere Kraft auf eine Flüssigkeit wirkt. Nehmen wir z. B. an, jene äussere Kraft sei die Schwerkraft und wirke nach Richtnng der $z$ Axe, so ist

$$X=0,\quad Y=0,\quad Z=P.$$

Also sind die Gleichgewichtsgleichungen:

$$\frac{\partial P}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial P}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial P}{\partial z}=Z\varrho.$$

Wir setzen nun in Gl. 14) die früher in Gl. 11) gefundenen Werte für $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$ ein. Wir hatten:

$$A = k\frac{\partial \xi}{\partial x} + Kv; \quad F = \frac{k}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\right); \quad E = \frac{k}{2}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z}\right)$$

Mithin kommt

$$\frac{\partial A}{\partial x} = k\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + K\frac{\partial v}{\partial x}; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{k}{2}\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}\right); \quad \frac{\partial E}{\partial z} = \frac{k}{2}\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}\right).$$

Addiren wir diese drei Gleichungen, so kommt

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial E}{\partial z} = \frac{k}{2}\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}\right)$$
$$+ \frac{k}{2}\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial z}\right) + K\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Nun ist

$$\frac{k}{2}\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial z}\right) = \frac{k}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}\right)$$

und nach Gl. 12)

$$= \frac{k}{2} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

Daher erhalten wir

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial E}{\partial z} = \frac{k}{2}\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}\right) + \frac{k}{2}\frac{\partial v}{\partial x} + K\frac{\partial v}{\partial x}$$

Ebenso können wir ableiten:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial z} = \frac{k}{2}\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2}\right) + \frac{k}{2} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + K\frac{\partial v}{\partial y}$$

und

$$\frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = \frac{k}{2}\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2}\right) + \frac{k}{2}\frac{\partial v}{\partial z} + K\frac{\partial v}{\partial z}$$

Setzen wir dies in die Gl. 14) ein, und dividiren durch $\varrho$, so kommt

15)
$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{k}{2\varrho}\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}\right) + \frac{k+2K}{2\varrho}\frac{\partial v}{\partial x} + X = 0\\
&\frac{k}{2\varrho}\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2}\right) + \frac{k+2K}{2\varrho} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + Y = 0\\
&\frac{k}{2\varrho}\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2}\right) + \frac{k+2K}{2\varrho} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} + Z = 0
\end{aligned}\right.$$

Aus diesen Gleichgewichtsgleichungen kann man nun die Bewegungsgleichungen für elastische Schwingungen ableiten. Wir haben nach Gl. 14):

$$\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial E}{\partial z}\right)\delta x\,\delta y\,\delta z + X\varrho\,\delta x\,\delta y\,\delta z = 0.$$

Dieser Ausdruck stellt die gesammte Kraft dar, die die einzelnen Moleküle nach der $x$ Richtung zu verschieben sucht; wir denken uns, dass sie den Mittelpunkt des Parallelepipeds angreife. Dieser Ausdruck = Null gesetzt, gibt eine Gleichung, notwendig für das Gleichgewicht.

Nehmen wir nun einmal an, jener Ausdruck sei nicht Null, dann haben wir nicht mehr das durch Gl. 14) ausgedrückte Gleichgewicht, dann tritt Bewegung ein. Ist obiger Wert $= U$, so liefern uns die Fundamentalgleichungen für die Bewegung die Relation

$$m\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = U, \text{ wo } m = \varrho\,.\,\delta x\,\delta y\,\delta z \text{ ist.}$$

$x$, $y$, $z$ sind die Coordinaten irgend eines bewegten Punktes zur Zeit $t$. Im ursprünglichen Zustande hatte dieser Punkt $M$ die Coordinaten

$$x_0 = x - \xi, \quad y_0 = y - \eta, \quad z_0 = z - \zeta.$$

Sonach ist auch

$$x = x_0 + \xi, \quad y = y_0 + \eta, \quad z = z_0 + \zeta.$$

$x_0$, $y_0$, $z_0$ sind von $t$ unabhängig, aber $\xi$, $\eta$, $\zeta$ ändern sich mit der Zeit. Daher ist

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial x}{\partial t}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial t}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial t}; \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \text{ etc.}$$

Aus der Relation $m\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = U$ erhalten wir nun

$$\varrho\,.\,\delta x\,\delta y\,\delta z\,.\,\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial E}{\partial z}\right)\delta x\,\delta y\,\delta z + X\varrho\,.\,\delta x\,\delta y\,\delta z$$

oder

$$\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial E}{\partial z}\right) + \varrho X = \varrho\,\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}.$$

Ebenso folgen aus $m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = U_{,}$ und $m\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = U_{,,}$ die Gleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial z} + \varrho Y = \varrho\,\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}$$

und

$$\frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} + \varrho Z = \varrho\,\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}.$$

Setzen wir nun für $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$ wieder ihre früheren Werte ein, und dividiren durch $\varrho$, so erhalten wir

$$16)\quad \begin{cases} \frac{k}{2\varrho}\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}\right)+\frac{k+2K}{2\varrho}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+X=\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} \\ \frac{k}{2\varrho}\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\eta}{\partial z^2}\right)+\frac{k+2K}{2\varrho}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+Y=\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} \\ \frac{k}{2\varrho}\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial z^2}\right)+\frac{k+2K}{2\varrho}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}+Z=\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} \end{cases}$$

Man sieht nun in solchen Bewegungsgleichungen von der Schwere ab, indem die elastische Kraft gegen die Schwere sehr gross ist; und sonst die Schwere als gleichmässig wirkende Kraft in den meisten Fällen keinen Einfluss auf die Schwingungen hat.

Wenden wir nun die vorhin abgeleiteten Gleichungen auf specielle Fälle an.

Wir wollen Schallfortpflanzungen in einem dünnen prismatischen Stabe betrachten.

(Die hier anzuwendenden Betrachtungen gelten auch für eine Röhre, die mit Flüssigkeit oder mit Gas gefüllt ist, also für eine Flüssigkeitssäule oder eine Luftsäule, nur dass hier noch eine Vereinfachung eintritt.)

Denken wir uns die Teilchen eines Querschnitts des Stabes nach der Längsrichtung verschoben, und dann, mit einer gewissen anfänglichen Geschwindigkeit versehen, sich selbst überlassen. Bei einer Dehnung in der Längsrichtung sind zwei benachbarte Querschnitte des Stabes gleichsam auseinander gezogen. Die Teilchen der Querschnitte streben in Folge der elastischen Kraft resp. nach vorwärts und rückwärts, um sich einander wieder zu nähern.

Einer Dehnung oder Zusammendrückung in der Längsrichtung entspricht, wie wir wissen, beziehungsweise auch eine seitliche Zusammenziehung oder Dehnung.

Ist der Stab sehr dünn, so sind die seitlichen Bewegungen sehr klein im Vergleich zur Längenbewegung, und können dann ausser Acht gelassen werden.

Wir richten somit nur auf die Längsrichtung unsere Aufmerksamkeit und wählen für diese Richtung die $x$ Axe.

Weil wir den Stab als sehr dünn annehmen, so sind auch die zur Längsrichtung senkrechten Spannungen als verschwindend klein zu betrachten.

Die Componenten der auftretenden Spannung nach den drei Axen sind $A$, $F$, $E$. Von diesen sind also $F = 0$ und $E = 0$.

Wir haben nur Spannungen $(A)$ zu betrachten, die zum Querschnitte senkrecht sind.

Aus unserer früheren Gleichung

$$\left(\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial E}{\partial z}\right)+\varrho X=\varrho\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$$

erhalten wir also die vereinfachte Gleichung

$$\frac{1}{\varrho}\cdot\frac{\partial A}{\partial x}+X=\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}.$$

Steht der Stab vertical, versetzt man ihn durch eine momentane äussere Kraft in Schwingungen, so bleibt als beständige äussere Kraft noch die Schwerkraft übrig; dann bedeutet also $X$ die Schwerkraft, und diese ist dann einigermassen von Einfluss. Bei horizontaler Lage des Stabes können wir die Schwerkraft ganz unbedenklich vernachlässigen.

Dann wird unsere Gleichung noch einfacher:

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=\frac{1}{\varrho}\cdot\frac{\partial A}{\partial x},$$

wo

$$A=k\frac{\partial\xi}{\partial x}+Kv$$

zu setzen ist.

Wir hatten nun früher aus den Gleichungen

$$\Pi''=0=k\varepsilon''+Kv$$
$$\Pi'''=0=k\varepsilon'''+Kv$$

abgeleitet:

$$0=k(\varepsilon''+\varepsilon''')+2Kv=k(\varepsilon'+\varepsilon''+\varepsilon''')+2Kv-k\varepsilon',$$

oder

$$kv+2Kv=k\varepsilon',$$

also

$$v=\frac{k}{k+2K}\cdot\varepsilon'.$$

Dies gibt, da $\varepsilon'=\frac{\partial\xi}{\partial x}$ ist,

$$v=\frac{k}{k+2K}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial x}.$$

Sonach erhalten wir für $A$

$$A=k\frac{\partial\xi}{\partial x}+K\cdot\frac{k}{k+2K}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial x}$$
$$=k\frac{\partial\xi}{\partial x}\left(1+\frac{K}{k+2K}\right)=k\frac{\partial\xi}{\partial x}\cdot\frac{k+3K}{k+2K}$$

Also

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{k+3K}{k+2K} \cdot k \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

Der Ausdruck $\frac{k+3K}{k+2K} . k$ hat eine physikalische Bedeutung; er ist, wie wir früher in Gl. 13) sahen, gleich dem Elasticitätscoefficienten $q$. Somit kommt:

$$\frac{\partial A}{\partial x} = q . \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2},$$

und unsere obige Gleichung für die Bewegung wird:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{q}{\varrho} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

Jetzt leiten wir dieselbe Gleichung noch einmal ab, und zwar nicht aus allgemeinen Gleichungen, sondern direct aus einigen speciellen, nur von der Kenntniss des Elasticitätscoefficienten $q$ ausgehenden Betrachtungen.

$a$ sei der Inhalt des Querschnittes eines parallelepipedischen Stabes; $x$ sei die Abscisse irgend eines Querschnittes im natürlichen Zustande ($o_2$).

$x+\frac{\delta x}{2}$ und $x-\frac{\delta x}{2}$ seien die Abscissen bezüglich von zwei zu beiden Seiten von $o_2$ gelegenen Querschnitten ($o_3$ und $o_1$).

In Folge der Verschiebungen haben diese Querschnitte zur Zeit $t$ die Abscissen:

$o_2$ $\quad x+\xi$; zudem

$o_3$ $\quad x+\xi+\frac{\delta x}{2}+\frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\delta x}{2}$ und

$o_1$ $\quad x+\xi-\frac{\delta x}{2}-\frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\delta x}{2}$.

Die Entfernung $o_1 o_3$, die ursprünglich den Wert $\delta x$ hatte, ist also nach der Verschiebung gleich $\delta x+\frac{\partial \xi}{\partial x}\delta x$, hat also zugenommen im Verhältnisse von

$$\delta x : \delta x\left(1+\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) \quad \text{oder}$$

$$1 : \left(1+\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)$$

Bezeichnen wir — unabhängig von früheren Betrachtungen —

die Dehnung $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ durch $\varepsilon'$, so können wir dieses Verhältniss auch schreiben $1:(1+\varepsilon')$.

Eine Zusammendrückung entspricht einem negativen Werte von $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ oder $\varepsilon'$.

Um diese Dehnung $\varepsilon'$ hervorzubringen, ist eine Kraft erforderlich ($P$), die sich bestimmt durch die Gleichung

$$P = q\varepsilon',$$

wo $q$ den Elasticitätscoefficienten bedeutet. Hier ist $P$ bezogen auf die Einheit des Querschnitts. Für unseren Stab mit dem Querschnitt $a$ ist die Kraft

$$P = aq\varepsilon' = aq \cdot \frac{\partial}{\partial x}$$

erforderlich.

Nachdem die Dehnung erfolgt ist, streben mit einer solchen Kraft die Teilchen $o_1$ und $o_3$, einander zu nähern (oder sich von einander zu entfernen, wenn $\varepsilon'$ negativ, also eine Zusammendrückung erfolgt war).

Während nun bei $o_2$ mit der Kraft $aq\frac{\partial \xi}{\partial x}$ eine Zusammenziehung oder mit der Kraft $-aq\frac{\partial \xi}{\partial x}$ eine Dehnung angestrebt wird, wirkt bei $o_4$, einem um $\delta x$ entfernten Querschnitte, dessen ursprüngliche Coordinate $x+\delta x$ war, eine dehnende Kraft von der Grösse

$$-aq\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\delta x\right).$$

Die Stellen $o_2$ und $o_4$ wirken nun folgendermassen auf einander.

$o_2$ zieht mit einer Kraft $aq\frac{\partial \xi}{\partial x} \ldots o_4$ nach der negativen Richtung, $o_4$ zieht $o_2$ mit einer Kraft $aq\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\delta x\right)$ nach der positiven Richtung.

Es resultirt demnach eine Kraft $aq\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\delta x$, die das Teilchen $(o_1 o_2 o_3)$ in der positiven $x$ Richtung zu bewegen sucht.

Aus unserer Grundgleichung

$$m\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = U$$

haben wir jetzt, da $m = \varrho . a\delta x$ ist, wo $\varrho$ die Masse der Volumeneinheit, und $a\delta x$ das Volumen des Teilchens bedeutet,

$$\varrho . a\delta x \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = U = aq \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\delta x,$$

mithin

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{q}{\varrho} . \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}.$$

Dies ist die schon vorhin erhaltene Gleichung.

Da $q$ und $\varrho$ positive Grössen sind, so können wir setzen

17) $$\frac{q}{\varrho} = c^2,$$

(wo $c$ also von unserem früheren $c$ wohl zu unterscheiden ist).

In Folge dessen wird unsere Gleichung

18) $$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 . \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

Die allgemeine Auflösung dieser partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung ist

19) $$\xi = f(x-ct) + F(x+ct).$$

Sie enthält zwei völlig willkürliche Functionen $f$ und $F$, eine mit dem Argument $(x-ct)$ und eine mit dem Argument $(x+ct)$.

Dass diese Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung 18) genügt, davon kann man sich leicht durch Differentiiren überzeugen. Man erhält

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -cf'(x-ct) + cF'(x+ct)$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 f''(x-ct) + c^2 F''(x+ct)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = f'(x-ct) + F'(x+ct)$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = f''(x-ct) + F''(x+ct)$$

Also

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2(f''(x-ct) + F''(x+ct)) = c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

Unseren dünnen prismatischen Stab, den wir gleichsam als gerade Linie ansehen können, liessen wir in die Richtung der $x$ Axe fallen, und erhielten dann die obige Beziehung Gl. 19), die immer gültig ist,

was für willkürliche Functionen wir auch wählen mögen. Wir wollen nun eine der beiden Functionen specialisiren, und zwar $F=0$ setzen.

Dann behalten wir

$$\xi = f(x-ct).$$

Der Punkt $x$ hat zur Zeit $t$ eine gewisse Verschiebung $\xi$; zur Zeit $t'$ hat ein anderer Punkt $x'$ die Verschiebung

$$\xi_1 = f(x'-ct').$$

Wählen wir nun den Punkt $x'$ so, dass die Gleichung stattfindet

$$x' = x + c(t'-t),$$

so wird

$$\xi_1 = f(x+ct'-ct-ct') = f(x-ct) = \xi;$$

d. h. zur Zeit $t'$ findet am Punkte $x'$ dieselbe Verschiebung statt, wie zur Zeit $t$ am Punkte $x$. Während der Zeit $(t'-t)$ hat sich also der Zustand des Punktes $x$ um $(x'-x)$ in der positiven $x$ Richtung fortgepflanzt, wobei $\frac{x'-x}{t'-t}=c$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist. Mit derselben Geschwindigkeit pflanzt sich der Verschiebungszustand eines jeden Punktes in der positiven $x$ Richtung fort; d. i. das ganze Verschiebungssystem wandert mit der Geschwindigkeit $c$ auf dem ganzen Stabe (dies ist das, was bei der Fortpflanzung des Schalles stattfindet).

Nehmen wir nun einmal an $f$ sei $=0$; dann kommt

$$\xi = F(x+ct).$$

Setzen wir $x'+ct'=x+ct$, also $x'=x-c(t'-t)$, mithin $c=-\frac{x'-x}{t'-t}$, so wird

$$\xi_1 = F(x'+ct') = F(x+ct) = \xi;$$

d. h. um die Zeit $t'$ befindet sich der Stab bei $x'$ in demselben Zustande, wie zur Zeit $t$ bei $x$; hier fällt nun in die Augen, dass die Verschiebung unverändert mit der Geschwindigkeit $c$ auf dem Stabe nach rückwärts wandert.

Haben wir nun

$$\xi = f(x-ct) + F(x+ct),$$

so können wir $\xi = \xi_1 + \xi_2$ setzen, d. h. $\xi$ in zwei solche Teile $\xi_1$ und $\xi_2$ zerlegen, dass

$$\xi_1 = f(x+ct) \text{ und } \xi_2 = F(x+ct) \text{ ist.}$$

Hiernach ist klar, dass die Verschiebung, die auf dem Stabe

stattfindet, sich in zwei Teile teilt, von denen der eine nach der positiven, der andere nach der negativen Richtung fortwandert, beide mit der gleichen Geschwindigkeit $c$. (Wie wenn zwei Schallsysteme in entgegengesetzter Richtung gegen einander und von einander wandern). Um an den einzelnen Punkten die Verschiebung zu erhalten, hat man die aus den beiden Systemen resultirenden Verschiebungen zu addiren.

Betrachten wir nun die Schallfortpflanzungsgeschwindigkeit $c$ etwas näher.

Wir haben dafür

$$c = \sqrt{\frac{q}{\varrho}} = \sqrt{\frac{\text{Elasticitätscoefficient}}{\text{Dichtigkeit}}}$$

In der Gleichung

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{q}{\varrho} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

ist die Längeneinheit, somit auch die Volumeneinheit, und also auch die Masse $\varrho$ der Volumeneinheit willkürlich. Mit wachsendem $\varrho$ nimmt $\xi$ sowohl wie auch $x$ ab, so dass $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$ abnimmt, während $\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$ seinen Wert behält. Wie $\xi$ und $x$ verhält sich auch $c$ oder $\frac{x'-x}{t'-t}$. Und so ist in der Gleichung

$$c = \sqrt{\frac{q}{\varrho}} \quad \text{oder} \quad c^2 = \frac{q}{\varrho}$$

etwas gelegen, was eine derartige Beziehung zwischen der Masse der Volumeneinheit und zwischen der Längeneinheit constituirt, dass die Willkürlichkeit in der Wahl der Längeneinheit keinen Einfluss auf das Endresultat hat. Nimmt man die Längeneinheit $k$ mal kleiner, folglich die Masseneinheit $k$ mal grösser, so bleibt $q$ constant, $\varrho$ wird $k^2$ mal kleiner, also $c^2$ wird $k^2$ mal grösser, $c$ wird $k$ mal grösser; $c$ enthält also $k$ mal so viele Einheiten wie vorher, aber $k$ mal kleinere Einheiten.

Bestimmen wir nun die Schallgeschwindigkeit in einem Stahlstabe.

Für einen Gussstahlstab, dessen Querschnitt ein Quadratmillimeter war, bestimmte Wertheim (auf diesen Querschnitt als Einheit bezogen) den Elasticitätscoefficienten $q$ zu 19300 Kilogramm.

(Dies enthält eine Beziehung zwischen Längeneinheit und Kraft $q$).

Wir setzen $k_, = k_{,,}$, und bezeichnen mit $\frac{1}{k_,}$ Millimeter die Ein-

heit in der Längsrichtung des Stabes, mit $\frac{1}{k_{,,}}$ Millimeter in einer darauf senkrechten Richtung. (Die Unterscheidung von $k_{,}$ und $k_{,,}$ gewährt eine gewisse Uebersichtlichkeit). Auf die Flächeneinheit $\frac{1}{k_{,,}^2}$ Quadratmillimeter bezogen wird dann der Elasticitätscoefficient $q = \frac{19300}{k_{,,}^2}$ Kilogramm.

Wird durch das Gewicht $p$ die Längeneinheit um $\delta$ ausgedehnt, so ist die neue Länge $l_1 = l(1+\delta)$ und $p = q.\delta$.

Wäre es möglich, dass $\delta = 1$ werden könnte, so würde das entsprechende $p = q.1 = q$ sein. Demnach kann man den Elasticitätscoefficienten $q$ auch als die Kraft bezeichnen, welche in dem erwähnten (in der Wirklichkeit unmöglichen, aber) als möglich gedachten Falle die Dehnung $\delta = 1$ hervorbringen würde.

Ein Kubikcentimeter Wasser (im Maximum der Dichtigkeit bei 4° C.) hat das Gewicht eines Grammes; also wiegt

$$1 \text{ Kubikmillimeter Wasser} = \frac{1}{10^3} \text{ Gr.} = \frac{1}{10^3.10^3} \text{ Kilogrm.}$$

Also wiegt die Volumeneinheit Wasser oder

$$\frac{1}{k_{,}.k_{,,}.k_{,,}} \text{ Kubikmillimeter Wasser} = \frac{1}{10^3.10^3.k_{,}.k_{,,}.k_{,,}} \text{ Kilogrm.}$$

Die Masse von der Volumeneinheit Wasser ist somit gleich

$$\frac{1}{10^6.k_{,}.k_{,,}^2.g} = \frac{1}{10^6.k_{,}.k_{,,}^2.9{,}809}.\text{*)}$$

(Es kann $k_{,} = k_{,,}$ einen solchen speciellen Wert haben, dass diese Masse der Volumeinheit Wasser auch = 1 wird).

Stahl hat nun das specifische Gewicht 7,72; somit ist die Masse der Volumeneinheit Stahl

$$\varrho = \frac{7{,}72}{10^6.k_{,}.k_{,,}^2.9{,}809},$$

wo $g = 9^{\text{m}}{,}809 = 9809^{\text{mm}}$ die Fallgeschwindigkeit bedeutet.

Führen wir nun, wie es hier noch nötig ist, in $g$ als Längeneinheit $\frac{1}{k_{,}}$ Millimeter (und nicht $\frac{1}{k_{,,}}$ Millimeter, als der Verschiebung

*) Die Anordnung könnte exacter sein.

$\xi$ nicht entsprechend) ein, so wird die Masseneinheit $k_{,}.1000$ mal grösser, also $\varrho$ wird $k_{,}.1000$ mal kleiner, und es kommt

$$\varrho = \frac{7,72}{10^6.k_{,}.k_{,,}^2.9,809.10^3.k_{,}} = \frac{7,72}{10^6.k_{,}^2.k_{,,}^2.9809},$$

oder auch: Eine Kraft $= \frac{7,72}{10^6.9809.k_{,}^2.k_{,,}^2}$ ist erforderlich, um der Masse $\varrho$ der Volumeneinheit eine Geschwindigkeit von $\frac{1}{k_{,}}$ Millimeter in der Secunde zu erteilen.

Nun ist $q = \frac{19300}{k_{,,}^2}$ Kilogramm eine Kraft, welche $\frac{19300}{k_{,,}^2}.\frac{1}{g}$ Masseneinheiten die Beschleunigung $g$ oder $\frac{19300}{k_{,,}^2}$ Masseneinheiten die Beschleunigung 1 Meter zu erteilen im Stande ist.

Mit Rücksicht auf die für $\varrho$ angewandte neue Masseneinheit und neue Längeneinheit erhält man $q$ als die Kraft, welche $\frac{19300}{k_{,,}^2}$ Masseneinheiten (der zweiten Art) eine Beschleunigung von $\frac{1}{1000.k_{,}}$ Meter oder von $\frac{1}{k_{,}}$ Millimeter oder von der neuen Längeneinheit zu erteilen im Stande ist. Sonach haben wir

$$\sqrt{\frac{q}{\varrho}} = \sqrt{\frac{19300}{k_{,,}^2}.\frac{10^6.9809.k_{,}^2.k_{,,}^2}{7,72}} = \sqrt{\frac{19300.10^6.9809.k_{,}^2}{7,72}}$$

$$= 10^3.k_{,}.4952 \text{ Längeneinheiten} = 10^3.k_{,}.4954.\frac{1}{k_{,}} \text{ Millimeter}$$

$$= 10^3.4952 \text{ Millimeter} = 4952 \text{ Meter (in der Secunde).}$$

In der Luft beträgt nun die Schallgeschwindigkeit $333^m$ in der Secunde; mithin ist sie in Gussstahl $\frac{4952}{333} = 14,87$ mal so gross wie in der Luft.

Bald werden wir eine Bestätigung dieser Theorie durch eine andere Methode finden, wenn wir **begrenzte** Stäbe betrachten.

Bezeichnen wir die angenblickliche Verschiebung in einem Punkte $x$ zur Zeit $t$ mit $\xi$, so ist also

$$\xi = f(x-ct) + F(x+ct).$$

Kennen wir den Anfangszustand des ganzen Stabes, d. h. die anfänglichen Verschiebungen und die anfänglichen Geschwindigkeiten

für jedes Teilchen desselben, dann können wir auch die Verschiebungen für alle späteren Zeiten angeben. Kurz es müssen bekannt sein die Functionen von $x$ (für $t = 0$):

$\xi_0 = f(x) + F(x) = \varphi(x)$ und

$\frac{\partial \xi}{\partial t}_{[t=0]}$ d. h. die anfängliche Geschwindigkeit, die wir $= \psi'(x)$ setzen wollen. Hierfür ist auch

$$\psi'(x) = \frac{\partial \xi}{\partial t}_{[t=0]} = \{-cf'(x-ct) + cF'(x+ct)\} \text{ (für } t = 0)$$
$$= -cf'(x) + cF'(x).$$

Durch Integration kommt

$$\psi(x) = -cf(x) + cF(x),$$

indem wir die Integrationsconstante gleich Null setzen. Somit ist

$$-f(x) + F(x) = \frac{\psi(x)}{c},$$

also

$$f(x) = \tfrac{1}{2}\left(\varphi(x) - \frac{\psi(x)}{c}\right).$$

$$F(x) = \tfrac{1}{2}\left(\varphi(x) + \frac{\psi(x)}{c}\right)$$

Da wir $\varphi(x)$ und $\psi'(x)$ nur für die Ausdehnung $l$ des Stabes kennen, so kennen wir die Functionen $f(x)$ und $F(x)$ einstweilen auch nur für die Argumente von $x = 0$ bis $x = l$. Wir haben zu untersuchen, wie es mit $f(M)$ für die Werte $M$ von $M = 0$ bis $M = -\infty$ und mit $F(N)$ für die Werte $N$ von $N = l$ bis $N = +\infty$ sich verhält. Dazu müssen wir über die Grenzen des Stabes Bedingungen voraussetzen und unterscheiden drei Fälle.

Entweder ist jeder Endpunkt des Stabes fest; oder jeder Endpunkt des Stabes ist frei, so dass am freien Ende kein Widerstand stattfindet [denn der Widerstand der Luft ist so unbedeutend, dass die Schwingungen des Stabes in der Luft eine Zeitlang ebenso stark sind als im luftleeren Raume); oder der eine Endpunkt des Stabes ist fest, der andere ist frei.

1) Nehmen wir an, beide Enden des Stabes seien fest.

Dann ist für alle Zeiten $t$

für $x = 0$ auch $\xi = 0$, und für $x = l$ ebenfalls $\xi = 0$,

also

$$\xi_0 = f(-ct) + F(+ct) = 0 \quad \text{und}$$
$$\xi_l = f(l-ct) + F(l+ct) = 0.$$

Setzen wir $ct = z$, so haben wir einfacher

$\alpha)$ $$f(-z) + F(+z) = 0$$
$\beta)$ $$f(l-z) + F(l+z) = 0$$
oder
$\alpha)$ $$f(-z) = -F(+z)$$
$\beta)$ $$f(l-z) = -F(l+z).$$

Diese Gleichungen gelten für alle positiven Werte von $z$.

Wir kennen $F(z)$ für alle Werte $z$ von $z = 0$ bis $z = l$, also kennen wir $f(-z)$ von $z = l$ bis $z = -l$ zufolge Gl. $\alpha$). Demgemäss kennen wir

$F(z)$ von $z = 1l$ bis $z = 3l$ (nach Gl. $\beta$)). Sodann
$f(-z)$ (für alle $-z$ bis $-z = -3l$)
von $-z = -l$ bis $-z = -3l$ (nach Gl. $\alpha$)). Dann
$F(z)$ von $z = 3l$ bis $z = 5l$ (nach Gl. $\beta$)). Dann
$f(-z)$ von $-z = -3l$ bis $-z = -5l$ (nach Gl. $\alpha$)). Dann
$F(z)$ von $z = 5l$ bis $z = 7l$ (nach Gl. $\beta$)) u. s. w.

so dass also die Werte der Functionen $f$ und $F$ bekannt sind für alle Werte, die allen möglichen Zeiten $t$ und allen möglichen Punkten $x$ entsprechen. Dann ist auch

$$\xi = f(x-ct) + F(x+ct)$$

bekannt für alle Werte, die es überhaupt nur annehmen kann.

$f(M)$ ist bekannt für alle Argumente, die der Function $f(x-ct)$ zukommen, nämlich zwischen $M = l$ bis $M = -\infty$. Ebenso ist $F(N)$ bekannt für alle Argumente, die der Function $F(x+ct)$ zukommen, nämlich zwischen $N = 0$ bis $N = +\infty$.

Nun sind die Functionen $f$ und $F$ nicht nur bestimmt; wir können auch noch beweisen, dass sie periodisch sind. Wir haben:

$$\begin{aligned} +f(-A-2l) &= -F(A+2l) \quad \text{nach } \alpha) \\ &= -F(l+(A+l)) \\ &= f(l-(A+l)) = f(-A) \quad \text{nach } \beta) \\ +F(B+2l) &= F(l+(B+l)) = -f(l-(B+l)) \quad \text{nach } \beta) \\ &= -f(-B) = F(+B) \quad \text{nach } \alpha). \end{aligned}$$

So sind also die beiden Functionen $f$ und $F$ um $2l$ periodisch.

Ein Punkt $x$ hat zu zwei verschiedenen Zeiten $t$ und $t'$ die resp. Verschiebungen

$$\xi_t = f(x-ct) + F(x+ct) \quad \text{und}$$
$$\xi_{t'} = f(x-ct') + F(x+ct').$$

Setzen wir nun $t' = t + \tau$, und bestimmen wir ferner $\tau$ so, dass

$$c(t'-t) = c\tau = 2l,$$

so kommt

$$\begin{aligned} \xi_{t'} &= f(x-ct-c\tau) + F(x+ct+c\tau) \\ &= f(x-ct-2l) + F(x+ct+2l) \\ &= f(x-ct) + F(x+ct) = \xi_t. \end{aligned}$$

Zur Zeit $t' = t + \tau$ ist also die Verschiebung des Punktes $x$ dieselbe wie zur Zeit $t$.

Die Schwingungsdauer $\tau$ ist demnach $= \frac{2l}{c}$, und da $\frac{l}{c}$ die Zeit bedeutet, in welcher der Schall sich um die Strecke $l$ fortpflanzt, so ist $\tau = \frac{2l}{c}$ die Zeit, die der Schall gebraucht, um (die Strecke $l$) den ganzen Stab hin und zurück zu durchlaufen. Bedeutet $n$ die Anzahl der Schwingungen in der Zeiteinheit, so ist

$$n = \frac{1}{\tau} = \frac{c}{2l}$$

Ferner ist noch

$$\tau = 2l \cdot \frac{1}{c} = 2l \cdot \sqrt{\frac{\varrho}{q}} \quad \text{und}$$

20)
$$n = \frac{1}{2l} \cdot c = \frac{1}{2l} \cdot \sqrt{\frac{q}{\varrho}}$$

Dies also findet statt, wenn der Stab an beiden Enden fest ist.

2) Nehmen wir jetzt den Fall, wo beide Endpunkte des Stabes frei sind.

An den freien Enden des Stabes findet nun wohl Verschiebung, aber, da sich dort kein Widerstand vorfindet, keine Spannung, keine Dehnung statt.

Die Grenzbestimmungen lauten demnach (für alle Zeiten $t$)

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}_{(x=0)} = 0 \quad \text{und}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}_{(x=l)} = 0.$$

$\frac{\partial \xi}{\partial x}$ bedentet bekanntlich die „verhältnissmässige Dehnung" in der Längsrichtnng. Man erhält nnn leicht

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = f'(x-ct) + F'(x+ct);$$

also

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}_{(x=0)} = f'(-ct) + F'(+ct) = 0$$

nnd

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}_{(l=x)} = f'(l-ct) + F'(l+ct) = 0.$$

Diese Gleichungen entsprechen $f'$ nnd $F'$ in derselben Weise, wie früher im Falle 1) die beiden Gleichungen $f(-ct) + F(+ct) = 0$ nnd $f(l-ct) + F(l+ct) = 0$ den Fnnctionen $f$ und $F$ entsprachen. So sind nnn $f'$ nnd $F'$ für alle Werte bestimmt, deren Argumente hier vorkommen können, so bald sie nur und ihre Derivirten für die Argumente zwischen 0 nnd $l$ bekannt sind. Die Fnnctionen $f'$ und $F'$ sind zndem periodisch, und die Daner einer solchen um $2l$ periodischen Schwingung ist wieder $\tau = \frac{2l}{c}$. Also Dehnnng und Zusammendrücknng, dargestellt durch

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = f'(x-ct) + F'(x+ct),$$

sind periodisch. Desgleichen ist auch die Geschwindigkeit der Verschiebungen periodisch, da

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -cf'(x-ct) + cF'(x+ct)$$

aus zwei nm $2l$ periodischen Teilen besteht. Der Unterschied zwischen diesem und dem ersten Falle besteht darin, dass dort die Function selbst, hier ihre Ableitnngen nach $x$ gegeben sind.

Wie steht es nun mit der Function $\xi$ selbst?

Die Gleichnng

$$\xi = f(x-ct) + F(x+ct)$$

zeigt, dass nur solche Fnnctionen von $x$ nnd $t$ für $\xi$ zulässig sind, in welchen $x$ und $t$ so vorkommen, dass die Fnnction eben geteilt werden kann in 2 Teile, einen mit dem Argument $(x-ct)$, einen mit dem Argument $(x+ct)$. Eine Potenz $(t^n)$ von $t$ würde Glieder von der Form $(x-ct)^m.(x+ct)^{n-m}.h$ enthalten, wo also die fraglichen Argumente $(x-ct)$ nnd $(x+ct)$ von einander nntrennbar wären (für $n=1$ ausgenommen). Zn einer solchen Potenz $t^n$ müssten also noch

Glieder $h_0 x^n$, $h_1 x^{n-1} t$, $h_2 x^{n-2} t^2$, ... hinzutreten, um Functionen der verlangten Art bilden zu können. Hat man Functionen

$$\xi_1 = f_1(x-ct)+F_1(x+ct),\quad \xi_2 = f_2(x-ct)+F_2(x+ct),\quad \text{etc. etc.}$$

so ist z. B.

$$\xi = \xi_1+\xi_2-\xi_3+\xi_4+\ldots = (f_1+f_2-f_3+f_4+\ldots)+(F_1+F_2-F_3+F_4+\ldots)$$

wieder eine Function der verlangten Art.

Im Falle 1) war $F(+z) = -f(-z)$, also

$$F(x+ct) = -f(-x-ct) = -f(2l-x-ct).$$

Setzen wir dort $2l - x = x_1$, so dass $x+x_1 = 2l$, so wird

$$\xi = f(x-ct)+F(x+ct) = f(x-ct) - f(x_1-ct).$$

(Zu einer um $\frac{\tau}{2} = \frac{l}{c}$ späteren Zeit ist (für dasselbe $x$)

$$\xi_1 = f\left(x-ct-c\cdot\frac{l}{c}\right) - f\left(x_1-ct-c\,.\,\frac{l}{c}\right) = f(x-l-ct) - f(l-x-ct),$$

woraus durchaus nicht folgt, dass zu zwei um $\frac{\tau}{2}$ entfernten Zeiten die Verschiebungen gleiche und entgegengesetzte Werte hätten).

Schreiben wir $\xi = f+F = f_1+f_2+F_1+F_2$ so:

$$\xi = \left[f(x-ct)+\frac{h\,.(x-ct)}{2c}\right] - h\,.\,\frac{(x-ct)}{2c}$$
$$+\left[F(x+ct)-\frac{h\,.(x+ct)}{2c}\right]+h\,.\,\frac{(x+ct)}{2c},$$

so ist $\xi$ in der in 1) erklärten Art periodisch.

Die beiden Teile $f_2$ und $F_2 = -h\,.\,\frac{x-ct}{2c}+h\,.\,\frac{(x+ct)}{2c} = ht$ bezeichnen eine in der $x$ Richtung erfolgende (für alle Punkte gleiche) Translation.

Die Teile $f_1$ und $F_1$ stellen deshalb keine periodische Verschiebung wie in 1) dar, indem hier die mit der Geschwindigkeit $h$ erfolgende Translation allemal in derselben Weise von den Functionen $f$ und $F$ abgezogen ist (bei positiven und negativen Werten derselben).

Im Falle 1) sind an die Functionen $\xi$ selbst die Bedingungen geknüpft, für $x = 0$ sowohl als für $x = l$ solle $\xi = 0$ sein. Verschiedene Combinationen von zwei Functionen $f$ und $F$ können die-

sem entsprecben: $f_{,}$ und $F_{,}$, $f_{,,}$ und $F_{,,}$, u. s. w. Jedenfalls aber nicbt gleichzeitig $f(x-ct)$ und $F(x+ct)$ einerseits und

$$f(x-ct)+h.\frac{x-ct}{2c} \quad \text{und} \quad F(x+ct)-h.\frac{(x+ct)}{2c} \quad \text{andererseits.}$$

In dem Falle 2) dagegen sind die Bedingungen an die Ableitung von $\xi$ nach $x$ für $x=0$ und $x=l$ geknüpft; an die Functionen $f'$ und $F'$. Anch hier gibt es verschiedene Functionen $f$ und $F$, deren zugehörige $f'$ und $F'$ den gestellten Bedingungen entsprechen. Zudem aber, wenn ein bestimmtes $f'$ und $F'$ vorliegt, entsprechen diesem mehrere $f$ und $F$. Integriren wir die Gleichung

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}=f'(x-ct)+F'(x+ct),$$

so kommt

$$\xi=f(x-ct)+F(x+ct)+\Gamma,$$

wo die Constante $\Gamma$ von $x$ unabhängig ist, höchstens von $t$ abhängig sein kann. Man sieht, dass $\xi$ ausser der durch $f(x-ct)+F(x+ct)$ dargestellten periodischen Bewegung (die Bewegung ist periodisch, da die Geschwindigkeit periodisch ist) noch für alle Punkte des Stabes eine gleichförmige Bewegung in sich begreift; dass es ausser dem periodischen Teile noch einen Teil enthalten kann, der gleichzeitig für alle Punkte des Stabes zu- oder abnimmt. Ein solcher Fall tritt ein, wenn der schwingende Stab in der $x$ Richtung fortgeschleudert wird. $\Gamma$ ist von $x$ unabhängig, als Integrationsconstante. (Dass $\Gamma$ nicht $=hx$ sein kann, stimmt überein damit, dass nicht gleichzeitig $\xi=f+F$ und $\xi=f+F+hx$ den gestellten Bedingungen genügen können; durch die Hinzufügung von $hx$ (zum ursprünglichen Zustand) wird die Periodicität der Dehnung nicht beeinflusst.) $\Gamma$ ist höchstens von $t$ abhängig. Wäre $\Gamma=h.t^{n}$, so würde, wenn der Stab unter dem Einflusse verschiedener Kräfte, noch diese Bewegung hinzu durchmachte, die Hinzufügung dieser veränderlichen Translation zur früheren periodischen Bewegung die Periodicität aufhören machen; die Gesammtbewegung wäre nicht periodisch. In Uebereinstimmung damit rührt eben das $h.t^{n}$ von der Wirksamkeit fremder Kräfte her. Wohl kann $\Gamma=h.t(+d)$ sein. In diesem Falle ist die Translation unveränderlich. Die Geschwindigkeit, die der Function

$$\xi=f(x-ct)+F(x+ct)+ht$$

entspricht, ist

$$\left(\begin{aligned}\frac{\partial \xi}{\partial t}&=\frac{\partial}{\partial t}\left[f(x-ct)-\frac{h(x-ct)}{2c}+F(x+ct)+\frac{h(x+ct)}{2c}\right]\\ &=-cf'(x-ct)+\frac{h}{2}+F'(x+ct)+\frac{h}{2}\end{aligned}\right)$$

für alle Punkte und alle Zeiten um eine Constante vergrössert. Aber die Dehnung und Zusammendrückung ist, wie es sein muss, in den Fällen $\xi = f + F$ und $\xi = f + F + ht$ unverändert dieselbe.

Für uns ist die Periodicität der Bewegungen wichtig. Nimmt man zwei gleich lange Glasröhren, die aber verschiedene Dicken haben können, und reibt sie mit einem Tuche, so hört man denselben Ton (vorausgesetzt, dass sie aus derselben Glassubstanz bestehen). Dies kommt daher, dass in der Formel $n = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{q}{\varrho}}$ die Dicke nicht vorkommt. Also ist die Schwingungszahl und die davon abhängige Tonhöhe für beide Stäbe dieselbe.

Nimmt man aber zwei Glasröhren, von denen die eine doppelt so lang ist wie die andere, so gibt die kürzere einen Ton, der die Octave des Tones ist, den die längere gibt. Dann ist

$$n_{,} = \frac{1}{2l_{,}}\sqrt{\frac{q}{\varrho}} \quad \text{und} \quad n_{,,} = \frac{1}{2l_{,,}}\sqrt{\frac{q}{\varrho}},$$

also

$$\frac{n_{,}}{n_{,,}} = \frac{2l_{,,}}{2l_{,}} = 2, \quad n_{,} = 2n_{,,}, \quad \text{da} \quad l_{,,} = 2l_{,} \quad \text{ist.}$$

Da $c = 2n.l$ ist, so kann man diese Formel zur Bestimmung von $c$ benutzen. Das $l$ kann man messen, das $n$ ist durch die Tonhöhe leicht zu bestimmen. Auf diese Weise fand Wertheim die Schallgeschwindigkeit

| | $c$ |
|---|---|
| für Blei (gezogen, nicht gegossen) | 4,3 |
| wenn sie für Luft = | 1 ist. |
| Für Zinn | 7,5 |
| „ Zink | 11,0 |
| „ Kupfer | 11,2 |
| „ Eisen und Stahl | 15,1 |
| welches Letztere sehr gut mit unserem früher erhaltenen Resultat $c = 14{,}87$ übereinstimmt. | |
| „ Glas | 16 |
| „ Fichte | 10,0 |
| „ Eiche | 11,6 |
| „ Tanne | 14 |
| „ Rottanne | 11,0 |
| „ Weisstanne | 11,8 |

Dass wir für Eisen und Tanne beinahe dasselbe $c = \sqrt{\frac{q}{\varrho}}$ haben, rührt daher, dass bei Eisen das $q$ und $\varrho$ fast in demselben Verhältnisse grösser sind, wie bei der Tanne.

Digitized by Google

Auf diesem Wege kann man nun weiter auch den Elasticitätscoefficienten bestimmen, wie dies vielfach angewandt worden ist.

Statt der früheren Formel

$$p = q\delta \quad \text{oder} \quad q = \frac{p}{\delta}$$

bedient man sich dann der Formel

$$c = \sqrt{\frac{q}{\varrho}}. \quad \text{oder} \quad c^2 = \frac{q}{\varrho}, \quad \text{oder} \quad q = \varrho . c^2.$$

Ist $c$ bekannt, so findet man dann leicht $q$.

Dieser zweite Fall kommt am häufigsten vor.

3) Jetzt kommt der dritte Fall, wo das eine Ende des Stabes fest, das andere frei ist.

Ist der Stab am Ende $x = 0$ befestigt,
am Ende $x = l$ frei,
so hat man die Grenzbedingungen:

$$\xi_{(x=0)} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \xi}{\partial x_{(x=l)}} = 0.$$

Also

$$f(-ct) + F(+ct) = 0 \quad \text{und}$$
$$f'(l-ct) + F'(l+ct) = 0;$$

wo $ct$ nur positive Werte hat.

Setzen wir $ct = z$, so kommt statt dessen

$$f(-z) + F(+z) = 0,$$
$$f'(l-z) + F'(l+z) = 0.$$

Letztere Gleichung integrirt, gibt

$$-f(l-z) + F(l+z) = C.$$

Aehnlich, wie im ersten Falle, findet man jetzt, dass die Functionen $f$ und $F$ für sämmtliche, ihnen zukommende Argumente bekannt sind, sobald sie für die zwischen 0 und $l$ liegenden Argumente bekannt sind. Zudem sind die Verschiebungen hier auch periodisch. Man hat nämlich

$$\gamma) \quad f(-A-2l) = -F(A+2l) = -F(l+(A+l)) = -C - f(l-(A+l))$$
$$= -f(-A) - C.$$

$$\delta) \quad F(B+2l) = F(l+(B+l)) = C + f(l-(B+l)) = C + f(-B)$$
$$= -F(+B) + C.$$

Daher hat man Folgendes:

Für den Punkt $x$ ist zur Zeit $t$

$$\xi_t = f(x - ct) + F(x + ct).$$

Für denselben Punkt ist zur Zeit $t_, = t + \tau$

$$\xi_{t_,} = f(x - ct - c\tau) + F(x + ct + c\tau).$$

Setzen wir $c\tau = 2l$, so wird

$$\begin{aligned}\xi_{t_,} &= f(x - ct - 2l) + F(x + ct + 2l)\\ &= -f(x - ct) - C - F(x + ct) + C \text{ (nach } \gamma) \text{ und } \delta))\\ &= -f(x - ct) - F(x + ct) = -\xi_t.\end{aligned}$$

Ein Teilchen, das zur Zeit $t$ nach der positiven Richtung verschoben war, ist nach der Zeit $\tau = \frac{2l}{c}$ d. i. zur $t_, = t + \tau$ um ebensoviel also nach der negativen Richtung hin verschoben. So hat man

$$\xi_t = -\xi_{t+\tau} = \xi_{t+2\tau} = -\xi_{t+3\tau} = \xi_{t+4\tau} = \dots$$

Nach der Zeit $2\tau$ befinden sich alle Teilchen wieder in demselben Zustande. Hier hat man also dasselbe wie früher, nur dass hier die Dauer einer Schwingungsperiode $= 2\tau$ ist, also das Doppelte beträgt, wie bei einem Stabe, der an beiden Enden frei ist.

Die Anzahl $n$ der Schwingungen in der Zeiteinheit ist, da

$$2\tau = T = \frac{4l}{c} = 4l\sqrt{\frac{\varrho}{q}} \text{ ist,}$$

21)

$$\text{hier } n = \frac{1}{4l} \cdot c = \frac{1}{4l}\sqrt{\frac{q}{\varrho}},$$

also halb so gross, wie in den beiden früheren Fällen.

Hat man zwei gleich lange Stäbe von derselben Beschaffenheit, und ist der eine an beiden Enden frei, der andere am einen Ende fest, am anderen frei, so gibt der letztere einen Ton, der die tiefere Octave des Tones des anderen ist.

Hiermit wissen wir, dass die Schwingungen der Stäbe periodisch sind. Ueber den Verlauf derselben wissen wir sonst nichts; sondern in jedem einzelnen Falle müssen noch nähere Bestimmungen z. B. des Anfangszustandes hinzukommen.

Jetzt betrachten wir einige andere Fälle.

Wir wissen, dass eine Röhre, die mit einer Flüssigkeitssäule oder mit einer Luftsäule gefüllt ist, sich ebenso wie ein elastischer Stab verhält. Nur hat eben das $c$ hier einen ganz anderen Wert.

Röhren, die mit Luft gefüllt sind, finden am häufigsten Gebrauch.

Eine mit Luft gefüllte Röhre (Pfeife) verhält sich in Bezug auf Schwingungen, also im Wesentlichen wie ein elastischer Stab eines festen Stoffes. Auch hier sind die Grenzbedingungen festzustellen; sie fordern, wie im Vorigen verschiedene Fälle zu unterscheiden. Die Resultate sind dann dem Vorigen entsprechend.

Nehmen wir eine gedakte Pfeife, d. h. eine solche, die am einen Ende offen, am anderen geschlossen ist, so entspricht diese einem Stabe, der am einen Ende fest, am anderen frei ist.

Indessen findet keine vollständig genaue Uebereinstimmung der Schwingungen in beiden Fällen statt, da hier die äusseren Luftteilchen am offenen Ende Widerstand leisten, somit an diesem offenen Ende die Dehnung nicht vollständig gleich Null zu setzen ist.

Denken wir uns die Pfeife von dem leichten Wasserstoffgas umgeben, dann ist das Resultat übereinstimmender; indessen erfolgt dann alsbald eine Vermischung der beiden Luftarten, und wegen dieser Störung sind hier die Sachen nicht wol auszuführen.

Denken wir uns hingegen eine an beiden Enden offene Pfeife, so ist hier an den freien Enden die Verdichtung und die Verdünnung viel geringer; wir können also hier die Dehnungen und Zusammendrückungen an den freien Enden, wenn auch nicht so vollkommen genau wie bei einem elastischen Stabe, wir können sie doch angenähert gleich Null setzen. Im Wesentlichen gelten dann hier die früher entwickelten Gesetze, wenn auch nicht so scharf.

Denken wir uns nun die Gase in einer Röhre befindlich, die einen Quadratcentimeter Querschnitt hat. Hier wird keine seitliche Ausdehnung stattfinden.

Die Oersted'sche Presse bestimmt nun, um wie viel das Volumen einer Flüssigkeit abnimmt, wenn der auf dieselbe ausgeübte Druck, auf den Quadratmeter bezogen, um eine Atmosphäre $= 10333$ Kilogramm zunimmt.

Sei diese Abnahme, auf die Einheit des Volumen bezogen, $= \mu$. Für Wasser ist $\mu = 0{,}0000476$ die Zusammendrückung.

Comprimiren wir das in der Röhre befindliche Gas, so wird die Volumenabnahme der Längenabnahme proportional sein.

Dann erhält das $\mu$ dieselbe Bedeutung wie das $\delta$ beim elastischen Stabe. Auch hier entspricht einem bestimmten Drucke $P$ eine bestimmte Zusammendrückung $\mu$ nach der Gleichung

$$P = q \cdot \mu \quad \text{oder} \quad \frac{P}{\mu} = q,$$

wo $q$ den Elasticitätscoefficienten für die betreffende Flüssigkeit bedeutet.

Aus der Länge $l$ wird alsdann $l(1-\mu)$. Die Zusammendrückbarkeit ist experimentell zu bestimmen.

Wie verhält sich's mit der Dehnung?

Wegen der Stetigkeit der Kräfte müssen wir annehmen, dass, wenn Kräfte von einem gewissen Sinne aus durch Null hindurch im entgegengesetzten Sinne wirken, dass dann die sie darstellende Function continuirlich bleibt; und demgemäss haben wir die negative Dehnung oder Zusammendrückung absolut gleich der (durch dieselbe, nur im entgegengesetzten Sinne wirkenden, Kraft $P$ hervorgebrachten) positiven Dehnung zu setzen.

Um einen festen Körper oder eine Flüssigkeit zu comprimiren, ist dieselbe Kraft erforderlich, wie umgekehrt, um die gleich grosse Ausdehnung zu bewirken (nur dass die Kraft in einem anderen Sinne zu nehmen ist). Sonach ist in unserem jetzigen Falle

$$-P = q(-\mu) = -q\mu$$

die erforderliche Zugkraft, um die Ausdehnung $\mu$ zu bewirken.

Da nun $q = \frac{P}{\mu}$ der Elasticitätscoefficient für eine Flüssigkeit ist, so haben wir für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in derselben

$$C = \sqrt{\frac{P}{\mu\varrho}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 22)$$

wo $\varrho$ die Masse Flüssigkeit in der Volumeneinheit bezeichnet.

Für Wasser ist $\mu = 0{,}0000476$.

1 Kubikcentimeter Wasser wiegt 1 Gramm, 1 Kubikmeter Wasser also 1000 . 1000 Gramm oder 1000 Kilogramm.

Die in 1 Kubikmeter Wasser enthaltene Masse ist somit $= \frac{1000}{9{,}809}$, oder eine Kraft $= \frac{1000}{9{,}809}$ Kilogr. erteilt einem Kubikmeter Wasser die Beschleunigung von 1 Meter.

Auf den Quadratmeter Flüssigkeitsoberfläche bezogen ist nun $P = 10333$ Kilogr., (also auf 1 Quadratmeter bez.) $q = \frac{10333}{0{,}0000476}$

der Elasticitätscoefficient; oder auf den Quadratmeter Flüssigkeitsoberfläche müssen $\frac{10333}{0,0000476}$ Kilogr. wirken, um die Flüssigkeitssäule auf die Hälfte zu verkürzen, ein Fall, der nicht eintritt, aber zur bequemeren Auffassung als möglich gedacht wird.

Dieser Kraft $q = \frac{P}{\mu} = \frac{10333}{0,0000476}$ Kilogramm erteilt $\frac{10333}{0,0000476}$ Masseneinheiten die Beschleunigung von 1 Meter. Diese Kraft ist zu dividiren durch obige Kraft $\frac{1000}{9,809}$ Kilogr. Oder so:

$\frac{10333}{0,0000476}$ Kilogr. geben $\frac{10333}{0,0000476}$ M. eine Beschleunigung = 1 Meter.

Sie geben ($\varrho =$) $\frac{1000}{9,809}$ M. eine wie grosse Beschleunigung?

So erhält man

$$c = \sqrt{\frac{10333 \, . \, 9,809}{0,0000476 \, . \, 1000}} = 1459^{\text{m}}.$$

Also in Wasser ist die Schallgeschwindigkeit gleich 1459 Meter.

Um Quecksilber um ebensoviel zu comprimiren (wie Wasser) bedarf es eines circa 10 mal stärkeren Druckes.

Unter dem Drucke einer Amosphäre $P = 10333$ Kilogr. hat $\mu$ hier nur den Wert 0,0000463. Die Masse eines Kubikmeters Quecksilber ist $\frac{1000 \, . \, 13,6}{9,809}$, indem 13,6 das specifische Gewicht des Quecksilbers ist.

Auf den Quadratmeter Flüssigkeitsoberfläche bezogen ist

$$q = \frac{P}{\mu} = \frac{10333}{0,00000463} \text{ Kilogr.}$$

Demnach kommt

$$c = \sqrt{\frac{10333 \cdot 9,809}{0,00000463 \, . \, 1000 \, . \, 13,6}} = 1270^{\text{m}}.$$

Also:

Schallgeschwindigkeit für Quecksilber = 1270 Meter.

Weil hier die elastische Kraft im Zähler und die Dichtigkeit im Nenner einander entgegengesetzt sind, deshalb ist das $c$ für Quecksilber fast ebenso gross wie für Wasser.

## Fortpflanzung des Schalles in der Lnft.

Bezeichnen wir das Volumen eines Lnftquantums mit $V$, die Znsammendrückung mit $-\partial V$, dann ist die verhältnissmässige Zusammendrücknng $= -\frac{\partial V}{V}$.

Bezeichnen wir die Druckänderung mit $\partial p$, so ist die Volumenänderung proportional der Druckänderung, und sonach

$$\partial p = -q \cdot \frac{\partial V}{V}$$

(eine Gleichung, die der früheren $p = q\delta$ analog ist).

$q$ ist hier dasselbe, was bei festen Körpern der Elasticitätscoefficient ist.

Wir wollen nun statt des Volnmens die Dichtigkeit einführen. Es ist

$$V = \frac{1}{\varrho};$$

also

$$\partial V = -\frac{\partial \varrho}{\varrho^2}. \quad \frac{\partial V}{V} = -\frac{\partial \varrho}{\varrho}.$$

Also

$$\partial p = q \cdot \frac{\partial \varrho}{\varrho}$$

und

$$q = \varrho \cdot \frac{\partial p}{\partial \varrho}.$$

Unsere Formel für die Schallgeschwindigkeit wird hiernach

$$c = \sqrt{\frac{q}{\varrho}} = \sqrt{\frac{\varrho \cdot \frac{\partial p}{\partial \varrho}}{\varrho}} = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \varrho}}$$

Newton wandte nun lediglich das Mariotte'sche Gesetz an, nämlich:

$$p \,.\, V = p_1 \,.\, V_1,$$

oder auch

$$\frac{p}{q} = \frac{p_1}{\varrho_1}, \quad p = \frac{p_1}{\varrho_1} \cdot \varrho$$

$$\partial p = \frac{p_1}{\varrho_1}, \partial \varrho.$$

Somit ist

$$\frac{\partial p}{p} = \frac{\partial \varrho}{\varrho}$$

oder

$$\frac{\partial p}{\partial \varrho} = \frac{p}{\varrho}.$$

Setzt man diesen Wert in die Formel für $c$ ein, so kommt:

$$c = \sqrt{\frac{p}{\varrho}}.$$

Dieses Resultat stimmte nicht mit der Erfahrung überein; Laplace fand die Ursache dieser Differenz. Während der Compression wird Wärme erzeugt, welche wegen der grossen Geschwindigkeit der Schwingungen nicht so schnell an die Umgebnng abgegeben werden kann; während der Verdünnung entsteht wieder Abkühlung. Jene Erwärmung bewirkt Vermehrung der Elasticität, und somit grössere Geschwindigkeit der Fortpflanznng.

Das Mariotte'sche Gesetz gilt eben nur für constante Temperaturen.

Hier nun also hätte Newton statt

$$p \,.\, V = p_{,} \,.\, V_{,}$$

setzen müssen

$$\frac{p}{p_{,}} = \left(\frac{V_{,}}{V}\right)^k,$$

wo $k$ das Verhältniss der beiden specifischen Wärmen der Lnft, resp. bei constantem Drnck nnd bei constantem Volumen bezeichnet.

Hieraus folgt

$$\frac{p}{p_{,}} = \left(\frac{\varrho}{\varrho_{,}}\right)^k$$

und

$$\partial p = p_{,} \,.\, \frac{k \varrho^{k-1} \partial \varrho}{\varrho_{,}^{\,k}}.$$

Beide Gleichungen durch einander dividirt, kommt

$$\frac{\partial p}{p} = \frac{k \,.\, \partial \varrho}{\varrho},$$

also

$$\frac{\partial p}{\partial \varrho} = k \,.\, \frac{p}{\varrho}.$$

Dies eingesetzt, erhält man das correcte Resultat von Laplace, welches sehr gut mit der Erfahrung übereinstimmt

$$c = \sqrt{k} \quad \sqrt{\frac{p}{\varrho}}. \qquad \text{23)}$$

(Zur Bestimmung von $c$ ist also die Kenntniss von $k$ erforderlich).

Als diese Idee einmal ausgesprochen war, zweifelte Niemand mehr an der Richtigkeit derselben.

Umgekehrt kann man aus obiger Formel und den Beobachtungen die Grösse $k$ auch bestimmen. Führen wir dies einmal aus.

Der Druck der Atmosphäre auf den Quadratmeter bezogen beträgt 10333 Kilogr.

Ein Kubikdecimeter oder ein Liter Luft (bei 0° C.) wiegt 1,293187 Gramm, also wiegt 1 Kubikmeter Luft 1,293187 Kilogramm.

Also ist die in einem Kubikmeter enthaltene Masse Luft

$$\varrho = \frac{1,293187}{9,809}.$$

Somit kommt nach Newton's Formel

$$c = \sqrt{\frac{p}{\varrho}} = \sqrt{\frac{10333 \,.\, 9,809}{1,293187}} = 280^{\text{m}}.$$

Experimentell findet man hingegen

$$c = 332^{\text{m}},5;$$

und da dies mit der Laplace'schen Formel übereinstimmen muss

$$\sqrt{k} \,.\, \sqrt{\frac{p}{\varrho}} = 332,5;$$

mithin

$$332,5 = \sqrt{k} \,.\, 280$$

und

$$k = \left(\frac{332,5}{280}\right)^2 = 1,410;$$

ein Resultat, welches sehr gut mit dem aus der mechanischen Wärmetheorie erhaltenen übereinstimmt.

Welchen Unterschied macht es auf die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles, wenn ein anderer Druck, eine andere Temperatur stattfindet?

Es ist

$$p \,.\, V = R \,.\, T,$$

wo die Constante $R$ sich bestimmt aus

$$p \,.\, V_0 = R \,.\, T_0,$$

also

$$R = \frac{p_0 V_0}{T_0}.$$

Unter $T$ verstehen wir nie Grösse $(a+t)$, wo $t$ die Temperatnr in Geraden angibt, und $a$ eine Coustante bedeutet, die für Luft $= 273$ ist.

So kommt

$$p \cdot V = \frac{p_0 \cdot V_0 \cdot T}{T_0} = p_0 V_0 \frac{(a+t)}{a} = p_0 V_0 \frac{(273+t)}{273}$$
$$= p_0 V_0 \left(1 + \frac{1}{273} t\right) = p_0 V_0 \left(1 + \frac{t}{a}\right) = p_0 V_0 (1 + \alpha t);$$

oder anch

$$\frac{p}{\varrho} = \frac{p_0}{\varrho_0}(1 + \alpha t).$$

Dies eingesetzt, kommt

$$c = \sqrt{k} \cdot \sqrt{\frac{p}{\varrho}} = \sqrt{k} \cdot \sqrt{\frac{p_0}{\varrho_0}} \cdot \sqrt{(1+\alpha . t)}.$$

In dieser Formel kommt der Druck nicht mehr vor; hier ist lediglich die Temperaturänderung zu berücksichtigen. Da

$$c = \sqrt{k} \cdot \sqrt{\frac{p_0}{\varrho_0}}$$

die Schallgeschwindigkeit bei 0 Grad, nämlich $c_{(t=0)}$ darstellt, so ist auch

$$c_t = c_{(t=0)} \cdot \sqrt{(1+\alpha t)} \quad \ldots\ldots\ldots\ 24)$$

Für

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $t = 0^0$ | $10^0$ | $20^0$ | $30^0$ | ist |
| $\sqrt{(1+\alpha t)} = 1$ | 1,018 | 1,036 | 1,054. | |

Alle vorhergehenden Entwickelnngen beziehen sich auf den Fall, dass die Luft sich in einer Röhre befindet.

Von grösserer Wichtigkeit ist für uns der Fall, wo der Schall sich im freien Ranme kugelförmig ausbreitet. Hier müssen wir annehmen, dass nm das erregte Centrum herum nach alleu Richtnngen die Verbreitung des Schalles erfolge, und dass die Verschiebung in der Richtung jedes Radius nach vorwärts und rückwärts erfolge.

Wegen verhältnissmässiger Grösse des Radius sind die entsprechenden Verschiebungen nach vorwärts nnd nach rückwärts auf allen Radien einander gleich.

In einem gewissen Moment hat die Verschiebung $\xi$ an irgend einer (um $r$ vom Centrum entfernten) Stelle eines Radius einen gewissen Wert: es ist

$$\xi = \varphi(r).$$

Betrachten wir einen unendlich schmalen Kegel, der in der Ruhelage die Länge $r$ hat; dessen Spitze im Centrum liegt, und dessen Basis in der Kugelfläche liegt, die $= r^2\pi$ ist. Durch die Kugelflächen, deren Radien bezüglich gleich $r - \frac{\partial r}{2}$ und gleich $r + \frac{\partial r}{2}$ sind, wird jener Kegel und seine Verlängerung in zwei Flächenstücken geschnitten, welche als Grundflächen zweier Kegel betrachtet werden können, die mit dem ersten Kegel Spitze und Richtung gemeinsam haben.

In einem späteren Momente hat die Basis des ersten Kegels eine Verschiebung erlitten, dann ist die Länge des Kegels $= r + \xi$, wo $\xi = \varphi(r)$ positiv oder negativ ist, je nachdem die Verschiebung in der einen Richtung oder in der entgegengesetzten erfolgt ist. In diesem selbigen Momente werden die Längen der beiden anderen Kegel sein

$$r + \frac{\partial r}{2} + \xi + \frac{\partial \xi}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{2} \quad \text{und}$$

$$r - \frac{\partial r}{2} + \xi - \frac{\partial \xi}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{2}.$$

Der Längenunterschied dieser beiden Kegel, der ursprünglich $= \partial r$ war, ist dann also $= \partial r + \frac{\partial \xi}{\partial r} . \partial r$.

Das Stückchen $\partial r$ hat sich dann also gedehnt im Verhältnisse von

$$\partial r : \partial r\left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial r}\right) = 1 : 1 + \frac{\partial \xi}{\partial r}.$$

Diese Betrachtungen sind den früheren analog. Jetzt tritt ein Unterschied ein.

Um das Volumen eines Teilchens zu erhalten, multipliciren wir den mittleren Querschnitt desselben mit seiner Länge. Wir führen den körperlichen Winkel $\partial\sigma$ des Kegels ein ($\partial\sigma$ das Maass des körperlichen Winkels überhaupt, das Flächenelement für den Radius 1).

Für den Kegel, dessen Länge im Zustande der Ruhe $= r$ war, ist das Flächenstückchen der Basis $= r^2 . \partial\sigma$, folglich das Volumen des Körperteilchens, dass im Zustande der Ruhe die Differenz der beiden anderen Kegel war, $= r^2 . \partial\sigma . \partial r$. Nach der Verschiebung erhält man dafür das Volumen

$$(r + \xi)^2 . \partial\sigma . \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial r}\right) \partial r$$

oder

$$\left(1+\frac{\xi}{r}\right)^2 \cdot \left(1+\frac{\partial \xi}{\partial r}\right) . r^2 \partial \sigma \partial r.$$

Die Entwickelung gibt, wenn wir die Verschiebung so klein annehmen, dass wir blos erste Potenzen derselben zu berücksichtigen brauchen

$$\left(1+2\frac{\xi}{r}\right) \cdot \left(1+\frac{\partial \xi}{\partial r}\right) . r^2 \partial \sigma \partial r =$$

$$\left(1+2\frac{\xi}{r}+\frac{\partial \xi}{\partial r}\right) . r^2 \partial \sigma \partial r.$$

Die verhältnissmässige Zunahme des Volumens $= v$ gesetzt, ist also

$$V : V_1 = 1 : (1+v)$$

$$= 1 : \left(1+2\frac{\xi}{r}+\frac{\partial \xi}{\partial r}\right).$$

Also

$$v = 2 . \frac{\xi}{r} + \frac{\partial \xi}{\partial r} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 25)$$

Bei unseren früheren Betrachtungen, wo nur Dehnung nach einer Seite (der Längsrichtung des Stabes, der Röhre) vorausgesetzt wurde, war $v = \frac{\partial \xi}{\partial x}$ oder auch $= \frac{\partial \xi}{\partial r}$.

Der Druck, unter dem die Luft sich während der verschiedenen Schwingungsphasen befindet, ist eine Function von $V$ oder auch von $\varrho$ nach dem Mariotte'schen Gesetze. Es ist.

$$\frac{\partial p}{\partial \varrho} = \frac{p}{\varrho} = \frac{p_1}{\varrho_1},$$

also

$$p = \frac{p}{\varrho} . \varrho = \frac{\partial p}{\partial \varrho} . \varrho$$

und

$$p_1 = \frac{p_1}{\varrho_1} . \varrho_1 = \frac{\partial p}{\partial \varrho} . \varrho_1 :$$

daher

$$p_1 = p + \frac{\partial p}{\partial \varrho} (\varrho_1 - \varrho).$$

Nun ist

$$\varrho = \frac{1}{V}, \quad \text{und} \quad \varrho_1 = \frac{1}{V_1} = \frac{1}{V(1+v)}$$

Daher

$$\varrho_1 - \varrho = \frac{1}{V(1+v)} - \frac{1}{V}$$

$$= -\frac{v}{V(1+v)} = -\frac{v}{V}(1-v+v^2-\ldots) = -\frac{v}{V},$$

da $v$ sehr klein ist, oder auch $= -\varrho . v$.

Also

$$p_1 = p - \frac{\partial p}{\partial \varrho} \cdot \varrho v = p - \varrho \frac{\partial p}{\partial \varrho} \cdot v.$$

Hier können wir $p_1$ als laufenden Wert der Function betrachten, $p$ als einen bestimmten Wert derselben, dem ein bestimmter Wert von $\varrho$ entspricht. Dann sind in der letzten Formel nur $p_1$ und $v$ als veränderlich zu betrachten.

Jetzt kommt es darauf an, die bewegende Kraft zu suchen.

Denken wir uns wieder einen unendlich schmalen Kreiskegel mit der Winkelöffnung $\partial \sigma$.

Für die Ruhelage sei seine Länge $= r$, also seine Basis $= r^2 . \partial \sigma$. Fügt man seiner Länge ein Stück $\partial r$ hinzu, so entsteht ein neuer Kegel, dessen Basis $= (r + \delta r)^2 . \partial \sigma$ ist. Die Differenz dieser beiden Kegel ist ein Körperteilchen, ein abgestumpfter Kegel, auf dessen gesammte Oberfläche, wenn es eine Verschiebung erlitten hat, Kräfte wirken, die es in seine Ruhelage zurückzuführen streben.

Der Druck $p_1$, der an irgend einer Stelle des Raumes stattfindet, ist offenbar eine Function von $r$; (da $p_1$ eine Function von $v$ ist, so ist auch $r$ eine Function von $v$, und umgekehrt).

In Folge der Verschiebung $\xi$ wird aus $r$ offenbar $(r + \xi)$, also aus $r^2 \partial \sigma$ wird $(r + \xi)^2 \partial \sigma$. Auf dem die dem Anfangspunkte (Centrum) zugewandte Grundfläche jenes abgestumpften Kegels wirkt, auf die Flächeneinheit bezogen, ein Druck $p_1$, der das Teilchen in der Richtung des Radius zu verschieben sucht.

Da die Grösse dieser Basis $= (r + \xi)^2 \partial \sigma$ ist, so ist die auf sie wirkende Gesammtkraft gleich

$$p_1 . (r + \xi)^2 \partial \sigma.$$

Die gegenüber liegende Basis des abgestumpften Kegels hat nun ebenfalls eine Verschiebung erlitten. Aus $(r + \delta r)$ ist geworden die Länge $(r + \delta r + \xi + \frac{\partial}{\partial r} . \delta r)$; also ist die Grösse jener Basis nach der Verschiebung gleich

$$(r + \delta r + \xi + \frac{\partial \xi}{\partial r} . \delta r)^2 \partial \sigma.$$

Ihre Entfernung von der ersten Basis beträgt $\delta r + \frac{\partial \xi}{\partial r} . \delta r$, also wirkt hier, auf die Flächeneinheit bezogen, die Kraft $p_1 + \frac{\partial p_1}{\partial r} (\delta r + \frac{\partial \xi}{\partial r} \delta r)$ oder, mit Vernachlässigung eines sehr kleinen Gliedes, der Druck

$p_1 + \frac{\partial p_1}{\partial r}.\partial r$. Der auf die letztere Basis wirkende Gesammtdruck, der dem vorhin betrachteten Drucke entgegengesetzt zu nehmen ist, wird sonach dargestellt durch den Ausdruck

$$-(p_1 + \frac{\partial p_1}{\partial r}\,\delta r)((r+\xi)+(\delta r + \frac{\partial \xi}{\partial r}.\delta r))^2\partial\sigma =$$

$$-(p + \frac{\partial p_1}{\partial r}.\delta r)((r+\xi)^2 + 2(r+\xi)(1+\frac{\partial \xi}{\partial r})\delta r)\partial\sigma =$$

$$-p_1(r+\xi)^2\partial\sigma - [2p_1(r+\xi)(1+\frac{\partial \xi}{\partial r}) + (r+\xi)^2\frac{\partial p_1}{\partial r}]\delta r.\partial\sigma.$$

Nun haben wir noch den Druck auf die seitliche Begrenzung unseres Teilchens auszudrücken.

Unser Teilchen ist seitlich ganz symmetrisch von den entsprechenden Teilchen anderer (Kreis)kegel umgehen.

Wir können die Basis unseres Kreiskegels als eben ansehen, da die Winkelöffnung als sehr klein angenommen wird. Legen wir im Abstande 1 vom Centrum eine mit der Grundfläche des Kegels parallele Ebene durch unseren Kegel, so schneidet letzterer einen Kreis von jener Fläche ab. Der Radius dieser Kreisfläche sei $\varepsilon$. Dann ist (das Element des körperlichen Winkels), die Winkelöffnung des Kegels

$$\partial\sigma = \varepsilon^2.\pi.$$

Gleichzeitig ist $\varepsilon$ der Sinus des Winkels, den die Axe des Kegels mit einer Seitenlinie desselben macht, oder auch, da dieser Winkel sehr klein ist, gleich diesem Winkel selbst.

Wirkt nun eine Kraft $P$ normal gegen eine Stelle der seitlichen Begrenzung, des Metalles, so wird nur ein Teil derselben, die Componente

$$P.\cos(90-\varepsilon) = P\sin\varepsilon = P.\varepsilon$$

nach Richtung der Axe wirken.

Der andere Bestandteil $P\sin(90-\varepsilon)$ wirkt normal zur Axe des Kegels; diesem wird von dem entsprechenden, diametral entgegen wirkenden Teile einer der Kraft $P$ absolut gleichen, aber gegenüber auf der anderen Seite des Kegels wirkenden Kraft das Gleichgewicht gehalten. Denkt man sich den Mantel unseres Körperteilchens auf passende Art in noch kleinere Teilchen geteilt, und beachtet dass, auf diese gleiche Kräfte in entsprechender Weise wirken, so zwar, dass sich also die zur Kegelaxe senkrechten Componenten je zweier gegenüber liegender Kräfte zerstören, so ist ersichtlich, dass die sämmtlichen zur Kegelaxe normalen Bestandteile jener seitlich wirken-

den Kräfte verschwinden, und nur ihre in der Richtung der Axe selbst wirkenden Bestandteile in Betracht kommen.

Die Summe dieser Bestandteile ist gleich der auf den Mantel des Kegelteilchens von allen Seiten her wirkenden Gesammtkraft, multiplicirt mit $\varepsilon$.

Für diese Gesammtkraft selbst nehmen wir nur ihren mittleren Wert an.

An den Enden des abgestumpften Kegels, die resp. um $(r+\xi)$ und $(r+\xi+\delta r+\frac{\partial\xi}{\partial r}\delta r)$ vom Centrum abstehen, hat der Druck (auf die Flächeneinheit bezogen), bezüglich die Werte $p_1$ und $p_1+\frac{\partial p_1}{\partial r}.\delta r$, also hat er (in der Entfernung $(r+\xi+\frac{\delta r}{2}+\frac{\partial\xi}{\partial r}\frac{\delta r}{2})$ vom Centrum) den mittleren Wert $p_1+\frac{\partial p_1}{\partial r}\cdot\frac{\delta r}{2}$.

Diesen Wert haben wir mit dem Werte des Mantels unseres Kegelteilchens zu multipliciren, um die eben bezeichnete Gesammtkraft zu finden.

Die Seitenlinie unseres abgestumpften Kegels hat nun den Wert $\delta r+\frac{\partial\xi}{\partial r}\cdot\delta r=\delta r(1+\frac{\partial\xi}{\partial r})$.

Die Radien seiner Grudflächen haben die Werte $(r+\xi).\varepsilon$ und $(r+\xi+\delta r+\frac{\partial\xi}{\partial r}\,\delta r)\,\varepsilon$; also ist der mittlere Radius $=(r+\xi+\frac{\delta r}{2}+\frac{\partial\xi}{\partial r}\cdot\frac{\delta r}{2})\varepsilon$.

Sonach ist der Mantel des Kegelteilchens gleich

$$\delta r(1+\frac{\partial\xi}{\partial r})\,(r+\xi+\frac{\delta r}{2}+\frac{\partial\xi}{\partial r}\cdot\frac{\delta r}{2})\,\varepsilon.2\pi,$$

oder mit Weglassung höherer Potenzen gleich

$$\delta r(r+\xi)\,(1+\frac{\partial\xi}{\partial r}).2\varepsilon\pi.$$

Die auf den Mantel wirkende Gesammtkraft ist somit absolut

$$(p_1+\frac{\partial p_1}{\partial r}\cdot\frac{\delta r}{2})(r+\xi)\,(1+\frac{\partial\xi}{\partial r}).\delta r.2\varepsilon\pi,$$

oder mit Vernachlässigung höherer Potenzen gleich

$$2p_1(r+\xi)(1+\frac{\partial\xi}{\partial r}).\delta r.\varepsilon\pi,$$

Um die Summe der „der Axe des Kegels parallelen" Bestandteie der seitlich wirkenden Kräfte zu erhalten, haben wir dies noch mit $\varepsilon$ zu multipliciren. Dann kommt

$$2p_1.(r+\xi)\left(1+\frac{\partial\xi}{\partial r}\right)\delta r.\varepsilon^2\pi$$

oder

$$2p_1.(r+\xi)\left(1+\frac{\partial\xi}{\partial r}\right)\delta r.\partial\sigma.$$

Addiren wir nun die drei Componenten, die resp. auf die beiden Grundflächen und den Mantel unseres Körperteilchens nach Richtung der Axe desselben wirken. so kommt

$$p_1(r+\xi)^2.\partial\sigma$$
$$-p_1(r+\xi)^2\partial\sigma-\left[2p_1(r+\xi)\left(1+\frac{\partial\xi}{\partial r}\right)+(r+\xi)^2\frac{\partial p_1}{\partial r}\right]\delta r.\partial\sigma$$
$$+2p_1(r+\xi)\left(1+\frac{\partial\xi}{\partial r}\right)\delta r.\partial\sigma.$$

Hier hebt sich nun fast Alles auf, und als Kraft die das Körperteilchen in der Richtung des Radius zu verschieben sucht, bleibt nur

$$U=-(r+\xi)^2\frac{\partial p_1}{\partial r}.\delta r.\partial\sigma$$
$$=-r^2\left(1+\frac{\xi}{r}\right)^2\frac{\partial p_1}{\partial r}.\delta r.\partial\sigma.$$

Da $\frac{\xi}{r}$ (namentlich in einem beträchtlichen Abstande $r$ vom Anfangspunkte) sehr klein ist, und gegen 1) vernachlässigt werden kann, so erhalten wir einfacher

$$U=-r^2.\frac{\partial p_1}{\partial r}.\delta r.\partial\sigma.$$

Wir hatten nun oben eine Gleichung abgeleitet

$$p_1=p-\frac{\partial p_1}{\partial\varrho}\varrho.v;$$

in welcher nur $p_1$ und $v$ veränderlich sind. Demnach kommt nach Differentiation nach $r$

$$\frac{\partial p_1}{\partial r}=-\varrho\frac{\partial p}{\partial\varrho}.\frac{\partial v}{\partial r};$$

und dies substituirt, kommt

$$U = r^2 \varrho \frac{\partial p}{\partial \varrho} \cdot \frac{\partial v}{\partial r} . \delta r . \partial \sigma.$$

Das Volumen nnseres Kegelteilchens $V$ ist nun gleich

$$\left(1 + \frac{\xi}{r} + \frac{\delta r}{2r} + \ldots\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial r}\right) . r^2 \, \delta r \, \partial \sigma$$

oder mit Vernachlässigung (der geringen Dehnung) und sehr kleiner Grösse gleich $r^2 \delta r \partial \sigma$; also seine Masse

$$m = \varrho V = \varrho \, . \, r^2 \delta r \, \partial \sigma.$$

Substituiren wir dies Alles in die Bewegungsgleichung

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{U}{m},$$

so kommt

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{r^2 \varrho \frac{\partial p}{\partial \varrho} \cdot \frac{\xi v}{\partial r} . \delta r . \partial \sigma}{\varrho . r^2 \delta r \, \partial \sigma} = \frac{\partial p}{\partial \varrho} \cdot \frac{\partial v}{\partial r}.$$

Durch Differentiation kommt

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial r}\right) = \frac{\partial p}{\partial \varrho} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}$$

Erstere Gleichung mit 2, letztere mit $r$ multiplicirt, dann beide addirt, erhalten wir

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(2\xi + r \frac{\partial \xi}{\partial r}\right) = \frac{\partial p}{\partial \varrho} \left(2 \frac{\partial v}{\partial r} + r \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}\right)$$

Nun ist (nach 25))

$$2\xi + r \frac{\partial \xi}{\partial r} = rv$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} 2 \cdot \frac{\partial v}{\partial r} + r \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} &= \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial r} + r \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \\ &= \frac{\partial v}{\partial r} + \left(\frac{\partial v}{\partial r}\right) \frac{\partial r}{\partial r} + r \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial v}{\partial r}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial r}(v) + \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial v}{\partial r}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(v + r \frac{\partial v}{\partial r}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rv)\right) = \frac{\partial^2 (rv)}{\partial r^2}. \end{aligned}$$

Hiernach wird unsere Bewegungsgleichung

$$\frac{\partial^2 (rv)}{\partial t^2} = \frac{\partial p}{\partial \varrho} \cdot \frac{\partial^2 (rv)}{\partial r^2},$$

oder, wenn wir

$$\frac{\partial p}{\partial \varrho} = \frac{p}{\varrho} = c^2$$

setzen

$$\frac{\partial^2 (rv)}{\partial t^2} = c^2 \cdot \frac{\partial^2 (rv)}{\partial r^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 26)$$

Das allgemeine Integral dieser partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung ist

$$rv = f(r - ct) + F(r + ct) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 27)$$

Vergleichen wir dieses mit dem früheren Resultat über die Bewegung der Luft in einer Röhre. Dort hatten wir

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \qquad v = \varepsilon' = \frac{\partial \xi}{\partial x}.$$

Durch Differentiation kommt

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) = c^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) \quad \text{oder} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2 \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

Der wesentliche Unterschied besteht darin, dass wir dort $v$ hatten, während wir hier $rv$ haben.

Dort hatten wir (mit Aenderung der dortigen Schreibweise

$$\xi = {}'f(x - ct) + {}'F(x + ct) = \int f(x - ct)\partial x + \int F(x + ct)\partial x$$

und

$$v = f(x - ct) + F(x + ct).$$

Hier haben wir

$$(rv) = f(r - ct) + F(r + ct).$$

Aehnlich wie dort, finden wir auch hier, dass an einer in Bewegung befindlichen Stelle die Bewegung aus zwei Teilen resultirt, von denen der eine in der Richtung des Radius in einem gewissen Sinne, der andere im entgegengesetzten Sinne über das System fortwandert, was Alles rings um das Centrum statthat; dass die eine Schallwelle in der Richtung des Radius vom Centrum aus fortwandert, die andere in der entgegengesetzten Richtung auf das Centrum zu. Wir brauchen blos die erstere zu betrachten. Während bei der Bewegung der Luft in einer Röhre die Gleichung

$$v_1 = f(x - ct)$$

zu erkennen gibt, dass die Verschiebungen und Dehnungen $\xi_1$ und $v_1$ unverändert und mit der constanten Geschwindigkeit $c$ in der positiven Richtung über das ganze System fortwandern, zeigt hier die Gleichung

$$rv_1 = f(r - ct)$$

oder

$$v_1 = \frac{f(r-ct)}{r},$$

dass in der positiven (von Centrum ausgehenden) Richtung ein constanter Wert von $rv_1$ mit der constanten Geschwindigkeit $c$ über das ganze System sich hinzieht; dass somit die Dehnung dem Radius umgekehrt proportional sein wird. Je grösser der Radius, desto geringer die Verdichtungen und Verdünnnngeu. Dies Letztere ist der Uuterschied gegen das Frühere; sonst finden auch hier dieselben Beziehungen statt.

Die Intensität des Schalles ist nun proportional dem Quadrate des Verdichtungs- oder Verdünnungs-Maximums (oder auch proportional dem Quadrate des Verschiebungs-Maximums). Demnach erhalten wir als Endrulsat den Satz:

In einem freien, nach allen Seiten ausgedehnten Raume findet die Fortpflanzung des Schalles ebenso und mit derselben Geschwindigkeit statt, wie in einer Röhre, nur mit dem Unterschiede, dass bei ersterer Ansbreitnug die Intensität nach dem umgekehrten Verhältnisse des Quadrates des Radius abnimmt.

XII.

# Wälzung eines cylindrisch begrenzten Körpers auf Horizontalebene.

Von

**R. Hoppe.**

---

Es soll die Bewegung eines Körpers berechnet werden, der zum Teil von einer cylindrischen Fläche beliebigen Querschnitts, im übrigen beliebig begrenzt ist, eine horizontale Ebene ausschliesslich mit dem cylindrischen Teile berührt und nicht daran gleitet, bei beliebig verteilter Masse und allein wirkender Schwere. Hieran schliesst sich die Untersuchung tantochronischer Oscillation.

Der Schwerpunkt der Walze sei Anfang der am Körper festen $xyz$, die $z$ Axe in der Richtung der Cylinderseite. Bezeichne $m$ die Masse, $mn^2$ das Trägheitsmoment um die $z$ Axe, $\tau$ den Richtungswinkel der Tangente der Cylinderbasis gegen die $x$ Axe, so dass

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \cos\tau; \quad \frac{\partial y}{\partial s} = \sin\tau$$

und die Gleichung der Tangente

$$X = x + U\cos\tau; \quad Y = y + U\sin\tau$$

wird, wenn $xy$ ein Punkt der Cylinderfläche ist.

Sind ferner $x_1 y_1 z_1$ die im Raume festen Coordinaten, die Horizontalebene, auf welcher die Walze liegt, $x_1 z_1$ Ebene, die $x_1 y_1$ Ebene zusammenfallend mit der $xy$ Ebene, $x_0 y_0$ die Coordinaten des Schwerpunkts, so sind die Coordinatenrelationen:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + x\cos\tau + y\sin\tau \\ y_1 &= y_0 - x\sin\tau + y\cos\tau \end{aligned} \qquad z_1 = z \tag{1}$$

Wir wollen nun $xyz$, $x_1y_1z_1$ auf den Berührungspunkt der Cylinderbasis, dagegen $x_2y_2z_2$ im Sinne der $xy$, $x_3y_3z_3$ im Sinne der $x_1y_1z_1$ auf ein Element des Körpers anwenden. Dann gelten die Gl. (1) noch allgemein, und man hat:

$$\begin{aligned} x_3 &= x_0 + x_2 \cos\tau + y_2 \sin\tau \\ y_3 &= y_0 - x_2 \sin\tau + y_2 \cos\tau \end{aligned} \qquad z_3 = z_2 \qquad (2)$$

$$y_1 = 0; \qquad z_1 = z = 0$$

und damit keine Gleitung der Walze auf der berührenden Ebene statthabe:

$$x_1 = s$$

wo $s$ den Bogen der Cylinderbasis bis zum Berührungspunkt bezeichnet, und der Anfang der $x_1$ dem der $s$ entsprechend gewählt ist. Subtrahirt man nach Einsetzung dieser Werte die Gl. (1) (2), so kommt:

$$\begin{aligned} x_3 &= s + (x_2 - x)\cos\tau + (y_2 - y)\sin\tau \\ y_3 &= \phantom{s} - (x_2 - x)\sin\tau + (y_2 - y)\cos\tau \end{aligned}$$

zwei Gleichungen, welche die Wälzung geometrisch bestimmen. Darin sind $s$, $x$, $y$, $\tau$ Functionen der Zeit allein, $x_2$, $y_2$ variiren mit dem Körperelement allein, $x_3$, $y_3$ mit beiden.

Zur dynamischen Bestimmung reicht die Gleichung der lebendigen Kraft hin:

$$\int \frac{\partial x_3^2 + \partial y_3^2}{\partial t^2} \partial m = 2cm - 2g \int y_3 \partial m$$

Man findet:

$$\begin{aligned} \partial x_3 &= \{-(x_2 - x)\sin\tau + (y_2 - y)\cos\tau\}\partial\tau \\ \partial y_3 &= -\{(x_2 - x)\cos\tau + (y_2 - y)\sin\tau\}\partial\tau \\ \partial x_3^2 + \partial y_3^2 &= \{(x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2\}\partial\tau^2 \end{aligned}$$

Ist dann $mn^2$ das Trägheitsmoment der Walze für die $z$ Axe, so hat man:

$$\int x_2 \partial m = 0; \quad \int y_2 \partial m = 0; \quad \int (x_2^2 + y_2^2)\partial m = mn^2$$

daher:

$$\begin{aligned} \int (\partial x_3^2 + \partial y_3^2)\partial m &= \{mn^2 + m(x^2 + y^2)\}\partial\tau^2 \\ \int y_3 \partial m &= m(x \sin\tau - y\cos\tau) \end{aligned}$$

Dies eingeführt giebt:

$$(n^2 + x^2 + y^2)\frac{\partial\tau^2}{\partial t^2} = 2c - 2g(x\sin\tau - y\cos\tau)$$

Sei nun

$$u = x\sin\tau - y\cos\tau$$

dann wird

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = u' = x\cos\tau + y\sin\tau$$

$$u^2 + u'^2 = x^2 + y^2$$

daher

$$\partial t = \frac{\partial \tau}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{n^2 + u^2 + u'^2}{c - gu}} \tag{3}$$

Zur Anwendung ist $u$ in $\tau$ darzustellen. Die Gleichung der Cylinderbasis sei

$$f(x, y) = 0$$

woraus durch Differentiation:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\cos\tau + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\tau = 0$$

In beiden Gleichungen hat man zu substituiren:

$$\left.\begin{aligned} x &= u'\cos\tau + u\sin\tau \\ y &= u'\sin\tau - u\cos\tau \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

dann sind durch sie die Werte von $u$ und $u'$ bestimmt:

Ist z. B. die Cylinderbasis ein Kreis, und man lässt die $x$ Axe durch den Mittelpunkt gehen, so lautet die Gleichung nebst ihrer Derivirten:

$$(x-e)^2 + y^2 = a^2; \qquad (x-e)\cos\tau + y\sin\tau = 0$$

Letztere giebt unmittelbar:

$$u' = e\cos\tau$$

woraus zugleich:

$$u = e\sin\tau + \text{const.}$$

Erstere Gleichung fügt dann nur noch den Wert $a$ für die Const. hinzu, so dass

$$u = a + e\sin\tau$$

und Gl. (3) wird:

$$\partial t = \frac{\partial \tau}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{n + a^2 + e^2 + 2a\sin\tau}{c - ga - ge\sin\tau}}$$

mithin $t$ elliptisches Integral in $\tau$. Die weitere Gestaltung ist von Bender in T. LX. p. 113. vollzogen.

Fernere Beispiele ergeben sich aus der Annahme

$$u = b\tau^k$$

Die Bewegungsgleichung wird:

$$\partial t = \frac{\partial \tau}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{n + b^2\tau^{2k} + 4kb^2\tau^{2k-2}}{c - gb\tau^k}}$$

die Gleichuugen der Cylinderbasis:

$$x = b\tau^{k-1}(k\cos\tau + \tau\sin\tau)$$
$$y = b\tau^{k-1}(k\sin\tau - \tau\cos\tau)$$

Letztere ist demnach eine Spirale, insbesondere für $k = 1$ eine Kreisevolvente; doch ist der Schwerpnnkt der Walze ein bestimmter Punkt, im genannten Falle der Mittelpunkt. Elliptisches Integral wird $t$ allgemein für $k = 1$ uud $k = 2$. Bei specieller Bestimmung des Trägheitsmoments kaun das Integral für $k = 2$ und $k = \frac{1}{2}$ noch einfachere Formen annehmen. Sei

$$k = 2; \quad n = 16b^2$$

dann findet man:

$$t = \frac{(8gb + c)\sigma - c\sin\sigma\cos\sigma}{2g\sqrt{2gb}}; \quad \tau = \sin\sigma\sqrt{\frac{c}{b}}$$

und die Oscillationsdaner:

$$T = 2R\frac{8gb + c}{g\sqrt{2gb}}$$

Sei ferner

$$k = \tfrac{1}{2}; \quad n = 2\sqrt{2}.b^2$$

dann gicht die Berechnuug:

$$t = \frac{2\sqrt{2}}{g^4b^3}\sqrt{c - gb\sqrt{\tau}} \times$$
$$\left\{\frac{c}{35}(4c + gb\sqrt{\tau})^2 + \frac{g^2b^2\tau}{7}(c + gb\sqrt{\tau}) + \frac{\sqrt{2}}{3}g^2b^2(2c + gb\sqrt{\tau})\right\}$$

Ist $u$ beliehige ganze Fnnction 2. Grades von $\tau$, so erhält man nur den Fall $k = 2$ wieder, mit andern Werten von $n$ und $c$.

Untersncht man den Fall einer tantochronisch oscillirenden Walze, so ergieht sich zngleich der Grenzwert der Oscillationsdaner für den Fall nicht tantochronischer Gestalt. Die Gleichgewichtslage wird bestimmt durch $u' = 0$, wo der Radiusvector normal zur Tangente ist. Sie ist stabil, wenn $u$ ein Minimum, labil, wenn es ein Maximum ist. Ihr mögen die Werte

$$\tau = \alpha; \quad u = a$$

entsprechen. Setzt man

$$\frac{c}{g} - a = e^2; \quad \frac{c}{g} - u = e^2\cos^2\sigma$$

so wird

$$\partial t = \frac{\partial\tau}{\sqrt{2g}\,e\cos\sigma}\sqrt{n + u^2 + u'^2}$$

Giebt es nun einen Punkt der Nullgeschwindigkeit, so tritt diese ein für $\sigma = \mathrm{R}$, $3\mathrm{R}$, etc., während in der Gleichgewichtslage $\sigma = 0$, $2\mathrm{R}$, etc. ist; daher ist die Dauer einer vollen Schwingung:

$$T = \frac{4}{e\sqrt{2g}} \int_0^{\mathrm{R}} \frac{\partial \sigma}{\sigma' \cos \sigma} \sqrt{n^2 + u^2 + u'^2}$$

Im allgemeinen lässt sich $u$ nach ganzen positiven Potenzen von $\tau - \alpha$ entwickeln. Dies vorausgesetzt, ist der Coefficient von $\tau - \alpha$ null; der von $(\tau - \alpha)^2$ muss, wenn er nicht null ist, positiv sein, so dass

$$e^2 \sin^2 \sigma = h^2(\tau - \alpha)^2 + A(\tau - \alpha)^3 + B(\tau - \alpha)^4 + \dots$$

wird, woraus wieder folgt, dass sich $\tau - \alpha$, daher auch $\frac{\partial t}{\partial \sigma}$ nach ganzen positiven Potenzen von $e \sin \sigma$ entwickeln lässt, und letzteres die Form hat:

$$\frac{\partial t}{\partial \sigma} = A_1 + B_1 e \sin \sigma + C_1 (e \sin \sigma)^2 + \dots$$

Da nun die Schwingungsweite durch $e$ bestimmt wird, welches allein in $e$ enthalten ist, so kann $T$ nur dann unabhängig von ersterer sein, wenn $B_1$, $C_1$, ... in infin. null sind. Dann ist aber auch $\frac{\partial t}{\partial \sigma}$ constant und hat denjenigen Wert, welcher auch ohne Tautochronismus einer unendlich kleinen Elongation als Grenzwert entsprechen würde.

Um letztern zu bestimmen, hat man für unendlich kleines $e$

$$\lim \sqrt{n^2 + u^2 + u'^2} = \sqrt{n^2 + a^2}; \quad \lim \frac{\tau - \alpha}{e} \quad \frac{\sin \sigma}{h}$$

daher

$$\lim (e \sigma' \cos \sigma) = h$$

$$\lim T = \frac{4\mathrm{R}}{h} \sqrt{\frac{n^2 + a^2}{2g}} = \frac{4\mathrm{R}}{h} \sqrt{\frac{J}{2gm}} \tag{5}$$

wo $J$ das Trägheitsmoment der Walze für diejenige Cylinderseite als Axe bedeutet, welche in der Gleichgewichtslage den horizontalen Boden berührt, während $h$, und mit ihm umgekehrt proportional $T$, jeden Wert haben kann.

Es zeigte sich ferner, dass $\tau$ und $\frac{\partial t}{\partial \sigma}$ Functionen von $e \sin \sigma$ sind, ausserdem weder von $e$ noch von $\sigma$ abhängig. Soll daher $T$ unabhängig von $e$ sein, so darf auch $\frac{\partial t}{\partial \sigma}$ nicht $\sigma$ enthalten. Die Bedingung tautochronischer Oscillation ist daher, wenn $b$ eine beliebige Constante bezeichnet:

$$\frac{\sqrt{n^2+u^2+u'^2}}{e\,\sigma'\cos\sigma} = 2\sqrt{b}$$

oder, wenn man

$$u = a+\varrho\,; \quad (e\sin\sigma)^2 = \varrho$$

setzt:

$$\{n^2+(a+\varrho)^2\}\left(\frac{\partial\tau}{\partial\varrho}\right)^2+1 = \frac{b}{\varrho}$$

woraus:

$$\partial\tau = \partial\varrho\sqrt{\frac{b-\varrho}{\varrho\{n^2+(a+\varrho)^2\}}} \tag{6}$$

Zur Reduction des elliptischen Integrals $\tau$ setzen wir

$$a+b = n\,\mathrm{tg}(\alpha+\beta)\,; \quad a = n\,\mathrm{tg}(\alpha-\beta) \tag{7}$$

$$\varrho = \frac{n\sin\beta\,(1-\pi\cot\alpha\cot\beta)}{\cos\alpha\cos(\alpha-\beta)\,(1+\pi)} \tag{8}$$

dann wird

$$\partial\tau = -\sqrt{\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}}\,\frac{\partial\pi}{\sin\alpha(1+\pi)}\,\frac{1+\pi\cot\alpha\cot\beta}{\sqrt{(1-\pi^2\cot^2\alpha\cot^2\beta)(1+\pi^2\cot^2\alpha)}} \tag{9}$$

Ferner sei der Modul der $\Theta$ Functionen bestimmt durch

$$\sin\beta = \left(\frac{H\mathrm{R}}{\Theta\mathrm{R}}\right)^2; \quad \cos\beta = \left(\frac{\Theta 0}{\Theta\mathrm{R}}\right)^2 \tag{10}$$

das constante Argument $\gamma$ durch

$$\sin\alpha = \frac{\Theta 0}{\Theta\mathrm{R}}\,\frac{Hi\gamma}{iH(i\gamma+\mathrm{R})}\,; \quad \cos\alpha = \frac{H\mathrm{R}}{\Theta\mathrm{R}}\,\frac{\Theta(i\gamma+\mathrm{R})}{H(i\gamma+\mathrm{R})} \tag{11}$$

und das variable Argument $\omega$ durch

$$\pi = \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta\,\frac{\Theta 0}{H\mathrm{R}}\,\frac{H(\omega+\mathrm{R})}{\Theta\omega} = \frac{Hi\gamma\,H(\omega+\mathrm{R})}{i\Theta(i\gamma+\mathrm{R})\Theta\omega} \tag{12}$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\mu = \Theta 0 H\mathrm{R}\,\frac{H(i\gamma+\mathrm{R})}{\Theta i\gamma}+\frac{\Theta^2\mathrm{R}\,Hi\gamma\,\Theta(i\gamma+\mathrm{R})+\Theta i\gamma\,H'(i\gamma+\mathrm{R})}{i\Theta i\gamma\,H(i\gamma+\mathrm{R})} \tag{13}$$

so ergiebt die Integration von (9):

$$\tau = \mu\omega+\frac{i}{2}\log\frac{\Theta(\omega+i\gamma)}{\Theta(\omega-i\gamma)}+\mathrm{arctg}\,\frac{H(i\gamma+\mathrm{R})H\omega}{\Theta i\gamma\,\Theta(i\gamma+\mathrm{R})} \tag{14}$$

woraus:

$$\left.\begin{aligned} e^{i\tau} &= e^{i\mu\omega}\,\frac{\Theta i\gamma\,\Theta(\omega+\mathrm{R})+iH(i\gamma+\mathrm{R})H\omega}{\Theta\mathrm{R}\,\Theta(\omega+i\gamma)} \\ e^{-i\tau} &= e^{-i\mu\omega}\,\frac{\Theta i\gamma\,\Theta(\omega+\mathrm{R})-iH(i\gamma+\mathrm{R})H\omega}{\Theta\mathrm{R}\,\Theta(\omega-i\gamma)} \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Hier ist die Constante in $\tau$ so bestimmt, dass $\tau$ mit $\omega$ und $\varrho$, also in der Gleichgewichtslage, verschwindet. Ferner wird nach obiger Einführung (10), (11), (12), wenn man der Kürze wegen

$$N = \frac{nH(i\gamma+\mathrm{R})[\Theta 0 \Theta(i\gamma+\mathrm{R}) + iH\mathrm{R}Hi\gamma][H\mathrm{R}\Theta\omega - \Theta 0 H(\omega+\mathrm{R})]}{\Theta i\gamma \Theta 0 H\mathrm{R}[\Theta(i\gamma+\mathrm{R})\Theta\omega - iHi\gamma H(\omega+\mathrm{R})]} \tag{16}$$

setzt,

$$\varrho = N\frac{H(i\gamma+\mathrm{R})}{\Theta i\gamma}; \quad \varrho' = N\frac{\Theta(\omega+\mathrm{R})}{H\omega} \tag{17}$$

Jetzt ist die Gleichung der Basis der cylindrischen Oberfläche für tautochronische Oscillation:

$$\begin{aligned} x+iy &= \{\varrho' - i(a+\varrho)\}e^{i\tau} \\ &= \left\{N\frac{H(i\gamma+\mathrm{R})H\omega - i\Theta i\gamma\Theta(\omega+\mathrm{R})}{\Theta i\gamma H\omega} - ia\right\}e^{i\tau} \end{aligned} \tag{18}$$

s. Gl. (15) (16), und

$$T = 4\mathrm{R}\sqrt{\frac{2b}{g}} = 8\mathrm{R}\frac{H(i\gamma+\mathrm{R})}{\Theta i\gamma}\sqrt{\frac{n}{g}} \tag{19}$$

ist die Dauer einer vollen Schwingung.

## XIII.

# Ein Beitrag zur Theorie der merkwürdigen Punkte im Dreieck.

Von

Herrn Dr. **J. Lange.**

---

1. $ABC$ sei das Mittendreieck von $A''B''C''$, und $A'B'C'$ dasjenige von $ABC$; dann sind diese Dreiecke zu je zweien ähnlich und ähnlich liegend für den gemeinsamen Schwerpunkt $S$ als Aehnlichkeitspunkt, und zwar $A''B''C''$ nnd $ABC$, $ABC$ und $A'B'C'$ mit $S$ als innerem Aehnlichkeitspunkt und dem Aehnlichkeitsverhältnis 2:1, $A''B''C''$ und $A'B'C'$ mit $S$ als äusserem Aehnlichkeitspunkt und dem Aehulichkeitsverhältnis 4:1. Irgend drei entsprechende Punkte $X''XX'$ in diesem dreifachen System liegen mit $S$ in einer graden Linie harmonisch, $X'$ in der Mitte von $X''X$, denn die Punktpaare $XX'$ nnd $SX''$ trennen sich gegenseitig und wegen $SX''=2SX=4SX'$ ist $\frac{1}{SX''}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{SX'}-\frac{1}{SX}\right)$ nnd $X'X''=X'X$. Drei entsprechende Punkte sind z. B. die Mittelpunkte der Umkreise, daher gilt in Anwendnng auf $ABC$ der Satz:

I. Höhenschnitt, Schwerpunkt, Mittelpunkt des Umkreises und derjenige des Feuerbachschen Kreises liegen in einer graden Linie harmonisch: Eulersche Linie.

2. Es seien ferner $OO_aO_bO_c$ die Mittelpunkte der Berührungskreise für $ABC$, von denen jeder dem Dreiseit $ABC$ als eingeschrieben, die drei andern im Gegensatz hierzu als angeschrieben betrachtet werden sollen; $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_a\mathfrak{A}_b\mathfrak{A}_c$, $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_a\mathfrak{B}_b\mathfrak{B}_c$, $\mathfrak{C}\mathfrak{C}_a\mathfrak{C}_b\mathfrak{C}_c$ ihre Berührungspunkte auf den Seiten $abc$. Drückt man die Abschnitte $B\mathfrak{A}=B\mathfrak{C}$, $B\mathfrak{A}_a=B\mathfrak{C}_a$ etc. in bekannter Weise aus durch $s$, $s-a$, $s-b$, $s-c$, so erkennt man leicht, wie die Berührungspunkte achtmal zu je dreien sich so ordnen lassen, dass das Product ihrer Abstandsverhältnisse von den Ecken der zugehörigen Seite $=-1$ ist, worans dann mit Hülfe der Umkehrung des Ceva folgt:

II. Die Ecktransversalen nach den Berührungspunkten eines eingeschriebenen Kreises schneiden sich in je einem Punkt $LL_aL_bL_c$.

III. Die Ecktransversalen nach dem Berührungspunkt des der Gegenseite angeschriebenen Kreises schneiden sich in je einem Punkt $O''O_a''O_b''O_c''$.

3. Die Lote auf den Seiten in den Fusspunkten der Transversalen durch die Punkte $L$ schneiden sich bekanntlich in $OO_aO_bO_c$ Da aber auch die Fusspunkte der Transversalen durch die Punkte $O''$ die Seiten des Dreiecks so in zweimal drei Abschnitte teilen, dass die Summe der Quadrate von drei nicht zusammenstossenden Abschnitten gleich ist der Summe der Quadrate der drei andern nicht zusammenstossendon Abschnitte, so folgt

IV. Die Radien der angeschriebenen Kreise nach dem Berührungspunkt der zugehörigen Seite schneiden sich in je einem Punkt $PP_aP_bP_c$.

4. Es werde $O\mathfrak{A}$ von $A\mathfrak{A}_a$ in $\mathfrak{A}'$, $O_a\mathfrak{A}_a$ von $A\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{A}_a'$, $O_b\mathfrak{A}_b$ von $A\mathfrak{A}_c$ in $\mathfrak{A}_b'$, $O_c\mathfrak{A}_c$ von $A\mathfrak{A}_b$ in $\mathfrak{A}_c'$, $OO_a$ von $BC$ in $D$ und $O_bO_c$ von $BC$ in $E$ geschnitten. $AODO_a$ sind vier harmonische Punkte, folglich $\mathfrak{A}(AODO_a)$ und $\mathfrak{A}_a(AODO_a)$ harmonische Strahlenbüschel, daher $\mathfrak{A}O\mathfrak{A}'\infty$ und $\mathfrak{A}_aO\mathfrak{A}_a'\infty$ je vier harmonische Punkte, d. h. $O$ die Mitte von $\mathfrak{A}\mathfrak{A}'$ und $O_a$ die Mitte von $\mathfrak{A}_a\mathfrak{A}_a'$. Ebenso folgt vermittelst der harmonischen Punkte $O_bAO_cE$, dass $O_b$ die Mitte $\mathfrak{A}_b\mathfrak{A}_b'$ und $O_c$ die Mitte von $\mathfrak{A}_c\mathfrak{A}_c'$ ist. Da nun $A'$ die Mitte sowohl von $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_a$ als von $\mathfrak{A}_b\mathfrak{A}_c$ ist, so muss $A'O \parallel A\mathfrak{A}_a$, $A'O_a \parallel A\mathfrak{A}$, $A'O_b \parallel A\mathfrak{A}_c$, $A'O_c \parallel A\mathfrak{A}_b$ sein, und es wird halbirt $A\mathfrak{A}$ von $A'O$, $A\mathfrak{A}_a$ von $A'O_a$, $A\mathfrak{A}_b$ von $A'O_b$ und $A\mathfrak{A}_c$ von $A'O_c$, d. h.

V. Die Verbindungslinien einer Seitenmitte mit den Mittelpunkten der Berührungskreise sind parallel den Ecktransversalen von der gegenüberliegenden Ecke nach den Berührungspunkten der Berührungskreise; jede Verbindungslinie halbirt die demselben Kreise angehörige Transversale, und jede Transversale trifft einen nicht zugehörigen Berührungskreis im Gegenpunkt eines Berührungspunktes.

VI. Die Linien, welche den Mittelpunkt eines eingeschriebenen Kreises mit den Mitten der Seiten verbinden, sind den Ecktransversalen nach den Punkten $O''O_a''O_b''O_c''$ parallel.

VII. Die Linien, welche die Mittelpunkte der angeschriebenen Kreise mit der Mitte der zugehörigen Seite verbinden, sind den Ecktransversalen nach den Punkten $LL_aL_bL_c$ parallel, schneiden sich selbst also in je einem Punkte $L'L_a'L_b'L_c'$ und die Seiten des Mittendreiecks $A'B'C'$ in den Berührungspunkten seiner Berührungskreise.

Die Punkte $L$ und $L'$ entsprechen sich im Aehnlichkeitssystem $ABC$ und $A'B'C'$ und liegen daher mit $S$ in je einer Graden $l l_a l_b l_c$.

5. Die Punkte $O''$ entsprechen nach VI. den Punkten $O$ im Aehnlichkeitssystem $A''B''C''$ und $ABC$, sind also die Mittelpunkte der Berührungskreise für $A''B''C''$. Nimmt man dazu noch die entsprechenden Punkte $O'$ für $A'B'C'$, so hat man nach 1. den Satz:

VIII. Die Transversalenschnitte $O''$, die Mittelpunkte $O$ und $O'$ der Berührungskreise für $ABC$ und dessen Mittendreieck liegen mit dem Schwerpunkt in je einer graden Linie harmonisch.

6. Es ist $\mathfrak{AB}$ Basis eines gleichschenkligen Dreiecks, dessen Aussenwinkel an der Spitze durch $O_aO_b$ halbirt wird, demnach $\mathfrak{AB}$ $O_aO_b$, ebenso $\mathfrak{BC} \parallel O_bO_c$ etc., folglich sind $\mathfrak{ABC}$ und $O_aO_bO_c$. $\mathfrak{A}_a\mathfrak{B}_a\mathfrak{C}_a$ und $OO_bO_c$ etc. ähnlich und ähnlich liegend. Auch in diesen Systemen entsprechen den Punkten $L'$ von $O_aO_bO_c$ die Punkte $L$ von $\mathfrak{ABC}$; sind also $N$ die Aehnlichkeitspunkte, so heisst dies

IX. Die Linien, welche die Berührungspunkte eines eingeschriebenen Kreises mit dem Mittelpunkt des derselben Seite angeschriebenen Kreises verbinden, schneiden sich in je einem Punkte $NN_aN_bN_c$ auf den Linien $l l_a l_b l_c$.

7. Nach 6. ist $\mathfrak{A}_b\mathfrak{C}_b \parallel O_aO_c$, $\mathfrak{A}_c\mathfrak{B}_c \parallel O_aO_b$, $\mathfrak{B}_a\mathfrak{C}_a \parallel O_bO_c$. Nennt man $\mathfrak{A}_b\mathfrak{C}_b$, $\mathfrak{A}_c\mathfrak{B}_c$ etc. Berührungssehnen von $O_bO_c$ etc., $\alpha\beta\gamma$ die Schnittpunkte von $\mathfrak{A}_b\mathfrak{C}_b$ mit $\mathfrak{A}_c\mathfrak{B}_c$ etc., so ist erstens $O_aBC$ ähnlich und ähnlich liegend mit $\alpha\mathfrak{A}_b\mathfrak{A}_c$ für den Aehnlichkeitspunkt $A'$ und das Aehnlichkeitsverhältnis $A'\mathfrak{A}_c : A'C = b+c : a$, folglich geht $\alpha O_a$ durch $A'$ und $L'$, ebenso $\beta O_b$ durch $B'$ und $L'$, $\gamma O_c$ durch $C'$ und $L'$; und da zweitens auch $\alpha\beta\gamma$ und $O_aO_bO_c$ ähnlich und ähnlich liegend sind, so ergiebt sich

X. Die Mittelpunkte je dreier Ankreise einerseits und je drei diesen Kreisen angehörige Berührungssehnen andrerseits bilden zwei ähnliche Dreiecke, welche ähnlich liegen für die Punkte $L'L_a'L_b'L_c'$ als Aehnlichkeitspunkte.

8. Sind $A_1B_1C_1$ die Fusspunkte der Höhen in $ABC$, so ist $\pm BA_1 = \frac{c^2+a^2-b^2}{2a}$, und da $BA' = \frac{a}{2}$, so wird $A'A_1 = \frac{b^2-c^2}{2a}$; ferner ist $A'\mathfrak{A}_a = \frac{b-c}{2}$, folglich $A'A_1 : A'\mathfrak{A}_a = b+c : a$ d. h. nach 7. $A_1$ und $\mathfrak{A}_a$ sind entsprechende Punkte und demnach $\alpha A_1$ und $O_a\mathfrak{A}_a$ entsprechende Linien der Dreiecke $\alpha BC$ und $O_a\mathfrak{A}_b\mathfrak{A}_c$; es steht also $\alpha A_1$ senkrecht auf $BC$, sie deckt die Höhe $AA_1$, ebenso decken $\beta B_1$

und $\gamma C_1$ die Höhen $BB_1$ und $CC_1$; in dem System $\alpha\beta\gamma$ und $O_aO_bO_c$ entsprechen sich also der Höhenpunkt und ein Punkt $P$, d. h. nach X.

XI. Der Höhenpunkt liegt mit je einem Punkt $L'$ und $P$ in einer Graden.

9. Die Dreiecke $O_aO_bO_c$, $OO_bO_c$, $OO_aO_c$, $OO_aO_b$ werden bezeichnet mit $FF_aF_bF_c$, der Mittelpunkt des Umkreises von $ABC$ mit $M$. $M$ ist Feuerbachscher Kreis für jedes der Dreiecke $F$, weil er durch die Fusspunkte ihrer Höhen geht; je ein Punkt $O$ ist Höhenpunkt eines Dreiecks $F$; hieraus und aus der Umkehrung des Satzes: „Der Umkreisradius nach einer Ecke steht senkrecht auf der Verbindungslinie der Fusspunkte der nicht zugehörigen Höhen“ folgt:

XII. Die Punkte $P$ sind die Umkreiscentra für die Dreiecke $F$, je zwei Punkte $O$ und $P$ liegen mit $M$ in grader Linie und zwar gleich weit von $M$ entfernt.

10. $ABC$ werde der Kürze wegen mit $\Delta$, die Dreiecke, welche von den Berührungspunkten der Kreise $OO_aO_bO_c$ gebildet werden, mit $JJ_aJ_bJ_c$, und diejenigen, welche von den Fusspunkten der Transversalen durch $O''O_a''O_b''O_c''$ gebildet werden, mit $J''J_a''J_b''J_c''$ bezeichnet. Die Winkel des Dreiecks $J$ sind $R-\frac{A}{2}$, $R-\frac{B}{2}$, $R-\frac{C}{2}$, der Radius des Umkreises $O$ ist $\varrho$, folglich nach einem bekannten Satze

$$J = 2\varrho^2 \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = \Delta\,.\,\frac{\varrho}{2r}$$

wo $r$ den Radius von $M$ bedeutet. Die Winkel des Dreiecks $J_a$ sind $R+\frac{A}{2}$, $\frac{B}{2}$, $\frac{C}{2}$, der Radius des Umkreises $O_a$ ist $\varrho_a$, folglich

$$J_a = 2\varrho_a^2 \cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \Delta\,.\,\frac{\varrho_a}{2r}$$

11. Es ist $J'' = \Delta - (\mathfrak{A}_a\mathfrak{B}_bC + \mathfrak{A}_a\mathfrak{C}_cB + \mathfrak{B}_b\mathfrak{C}_cA)$ und

$$\mathfrak{A}_a\mathfrak{B}_bC = \Delta\frac{(s-a)(s-b)}{ab} = \frac{\varrho\varrho_c}{2rh_c}$$

$$\mathfrak{A}_a\mathfrak{C}_cB = \Delta\frac{(s-a)(s-c)}{ac} = \frac{\varrho\varrho_b}{2rh_b}$$

$$\mathfrak{B}_b\mathfrak{C}_cA = \Delta\frac{(s-b)(s-c)}{bc} = \frac{\varrho\varrho_a}{2rh_a}$$

wo $h_ah_bh_c$ die Höhen von $ABC$ bedeuten, folglich

$$J'' = \Delta - \frac{\Delta}{2r}\left(\frac{\varrho\varrho_a}{h_a} + \frac{\varrho\varrho_b}{h_b} + \frac{\varrho\varrho_c}{h_c}\right) = \Delta - \frac{\Delta}{2r}(2r - \varrho) = \Delta\frac{\varrho}{2r}$$

$$J_a'' = \mathfrak{A}\mathfrak{B}_c C + \mathfrak{A}\mathfrak{C}_b B + \mathfrak{B}_c\mathfrak{C}_b A - \Delta$$

$$= \Delta\left(\frac{s(s-c)}{ab} + \frac{s(s-b)}{ac} + \frac{(s-b)(s-c)}{bc}\right) - \Delta$$

$$= \frac{\Delta}{2r}\left(\frac{\varrho\varrho_a}{h_a} + \frac{\varrho_a\varrho_c}{h_b} + \frac{\varrho_a\varrho_b}{h_c}\right) - \Delta = \frac{\Delta}{2r}(2r + \varrho_a) = \Delta\frac{\varrho_a}{2r}$$

Demnach ergeben sich folgende beachtenswerte Relationen

XIII.
$$J = J'' = \Delta\frac{\varrho}{2r}$$
$$J_a = J_a'' = \Delta\frac{\varrho_a}{2r}$$
$$J_b = J_b'' = \Delta\frac{\varrho_b}{2r}$$
$$J_c = J_c'' = \Delta\frac{\varrho_c}{2r}$$

$$J : J_a : J_b : J_c = \varrho : \varrho_a : \varrho_b : \varrho_c = J'' : J_a'' : J_b'' : J_c''$$

$$J_a + J_b + J_c - J = 2\Delta = J_a'' + J_b'' + J_c'' - J''$$

12. Die Dreiecke $F$ und $J$ sind ähnlich, die Radien ihrer Umkreise sind $2r$ und $\varrho$, folglich

$$F : J = 4r^2 : \varrho^2$$

da aber nach XIII.

$$J : \Delta = \varrho : 2r$$

so folgt

XIV.
$$F : \Delta = \Delta : J = 2r : \varrho$$
$$F_a : \Delta = \Delta : J_a = 2r : \varrho_a$$
$$F_b : \Delta = \Delta : J_b = 2r : \varrho_b$$
$$F_c : \Delta = \Delta : J_c = 2r : \varrho_c$$

Berlin, 1. December 1880.

## XIV.

# Beitrag zu einer Classe von bestimmten Integralen complexer Functionen.

Von

Herrn Dr. **Niemöller.**

---

Ist $fz = (z+a_1)^{n_1}(z+a_2)^{n_2} \ldots (z+a_m)^{n_m}$, worin die ganzzahligen positiven Exponenten $n_1$, $n_2$ ... sämmtlich oder zum Teil sehr gross sind, so bietet die Berechnung von $\int_a^b f(z)\,dz$ bekanntlich gar keine Schwierigkeiten, wenn die Constanten $a_1$, $a_2$ ... ferner $a$ und $b$ endlich und reell sind. Man hat nur die Stellen aufzusuchen, wo der absolute Wert von $f(z)$ auf dem Integrationswege den grössten Betrag erreicht. Diese Stellen sind bei $a$, $b$ oder bei den reellen Wurzeln von $f' = 0$, die zwischen $a$ und $b$ liegen. An diesen Stellen ist $f(z)$ nach der Methode von Laplace in eine Exponentialgrösse zu verwandeln und über eine kleine Strecke zu integriren, deren Grösse von der Grösse der Exponenten $n$ abhängig ist.

Bedeutend schwieriger wird die Berechnung des Integrals, wenn die Constanten $a_1$, $a_2$ ..., $a$, $b$ complexe Zahlen sind. Sind z. B. $a$ und $b$ reell, die übrigen Constanten complex, so müsste man bei einer Integration über die reelle Axe von $a$ nach $b$ im allgeminen unendlich viel Stellen berücksichtigen, da die Anzahl der Punkte, wo der absolute Betrag von $f(z)$ ein Maximum erreicht, unendlich gross ist von der Ordnung des höchsten in $f(z)$ vorkommenden Exponenten. Es wäre demnach die Laplace'sche Methode nicht anwendbar.

Um diese Methode auch im allgemeinen Falle noch anwenden zu können, müssen wir einen Integrationsweg in der Ebene der complexen $z$ von $a$ nach $b$ aufsuchen, auf dem nur eine endliche Anzahl von Stellen liegen, in denen der absolute Betrag von $f(z)$ ein Maximum erreicht. Da $fz$ eine ganze eindeutige Function von $z$ ist, so können wir den Integrationsweg beliebig verschieben.

Um einen solchen Weg aufzufinden, betrachten wir die Norm von $fz$, also $U^2+V^2$, wenn

$$f(z)=U+Vi$$

ist. Ueber der Ebene der complexen $z$ errichten wir die Fläche

$$\zeta=U^2+V^2.$$

Diese Fläche hat bekanntlich nirgends ein Maximum oder Minimum wie leicht aus den Bedingungsgleichungen folgt, die Euler für die Maxima oder Minima einer Fläche aufgestellt hat. Es ist daher stets möglich, von irgend einem Punkte der Fläche aus so weiter zu gehen, dass $\zeta$ fortwährend wächst oder fortwährend abnimmt. Nennen wir die Punkte, wo $\zeta$ oder $f(z)$ verschwindet, die Nullpunkte der Fläche, so werden wir im letzteren Falle zu einem Nullpunkt der Fläche, im ersten Falle zum Unendlichkeitspunkt gelangen.

Von Wichtigkeit für unsere Aufgabe sind die Punkte, in denen die ersten partiellen Differentialquotienten von $U$ und $V$ nach $x$ und $y$ verschwinden. Diese Stellen sollen Verzweigungspunkte von $f(z)$ heissen *). Man findet sie aus der Gleichung

$$\frac{dfz}{dz}=0.$$

Setzen wir voraus, dass $fz$ an einer dieser Stellen, z. B. an der Stelle $z_0$, wo $f'z_0=0$ ist, nicht verschwindet, so kann man die Gestalt der Fläche in der Nähe dieser Stelle leicht angeben. Wir setzen

$$z=z_0+h,$$

dann ist

$$fz=fz_0+\frac{h^2}{2}f''z_0+\dots$$

Wir setzen ferner

$$h=\varepsilon(\cos\varphi+i\sin\varphi),\quad \frac{f''z_0}{2f(z_0)}=r(\cos\psi+i\sin\psi),$$

$\varepsilon$ sei sehr klein. Es ist dann

*) Der Name würde eigentlich nur dann passen, wenn $f(z)$ mehrdeutig wäre und sich in den Punkten verzweigte.

$$U+Vi=(U_0+V_0i)(1+\varepsilon^2 r(\cos(2\varphi+\psi)+i\sin(2\varphi+\psi)),$$

also

$$\zeta=(U+Vi)(U-Vi)=\zeta_0+2\zeta_0\varepsilon^2 r\cos(2\varphi+\psi)$$

für sehr kleine Werte von $\varepsilon$. Lässt man $\varphi$ von 0 bis $2\pi$ wachsen, so findet man, dass man durch $z_0$ zwei auf einander senkrechte Gerade so legen kann, dass auf der einen dieser Geraden in der Nähe von $z_0$ $\zeta<\zeta_0$ ist, während auf der andern $\zeta>\zeta_0$ ist. Die Fläche ist also bei $z_0$ sattelförmig. Nimmt man hinzu, dass die Fläche nirgends ein Maximum oder Minimum hat, so folgt nach dem Vorhergehenden sofort, dass man durch jeden Verzweigungspunkt zwei sich rechtwinklig schneidende Curven so legen kann, dass auf der einen Curve, die wir mit (*b*) bezeichnen wollen, $\zeta$, also auch der absolute Betrag von $f(z)$ sein Minimum im betrachteten Punkte erhält und nach beiden Seiten wächst, während auf der andern Curve (*a*) der absolute Betrag dort sein Maximum erreicht und nach beiden Seiten abnimmt. (*a*) verbindet zwei Nullpunkte, sie kann nicht zu demselben Nullpunkte zurückkehren, denn sonst müsste sie die Curve (*b*) ausser im Verzweigungspunkte noch einmal schneiden, was nach der Art, wie (*a*) von diesem Verzweigungspunkte aus fortgesetzt werden soll, unmöglich ist. Die Curve (*b*), die nach beiden Seiten ins Unendliche geht, muss notwendig aus demselben Grunde zwischen den Nullpunkten liegen. Denken wir uns durch (*b*) die Ebene in zwei Teile geteilt, so liegen die beiden Nullpunkte in getrennten Feldern.

Wir legen nun durch sämmtliche Verzweigungspunkte die Curven (*a*) und (*b*) in der $z$ Ebene und wählen dann folgenden Integrationsweg: Zunächst gehen wir von $a$ nach einem Nullpunkte so, dass der abs. Betrag von $fz$ abnimmt. Es darf also keine Curve (*b*) überschritten werden. Dann integriren wir über so viele Curven (*a*), bis wir zu einem Nullpunkt gelangen, von dem wir mit fortwährend wachsendem abs. Betrage nach $b$ gelangen können. Aus den Sätzen über die Anzahl der Wurzeln von $fz$ und $fz'$ folgt leicht, dass jeder Nullpunkt mit irgend einem andern durch eine Curve (*a*) in Verbindung stehen muss, obiger Integrationsweg ist also stets möglich. Ist $\lambda$ die Anzahl aller in der Ebene liegenden Curven (*a*), sind ferner $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_\lambda$ die Werte des Integrals erstreckt über eine Curve (*a*) von einem Nullpunkt zum folgenden, die leicht nach der Laplace'schen Methode gefunden werden können, sind endlich $\varphi_b$ und $\varphi_a$ die Werte des Integrals erstreckt über den letzten und ersten Teil des Integrationsweges, so ist

$$1)\quad \int_a^b fz\,dz = A_1\varphi_1+A_2\varphi_2 \ldots + A_\lambda\varphi_\lambda+\varphi_a+\varphi_b,$$

wo die Constanten $A$ entweder $+1$, $-1$ oder 0 sind. Die Constanten $A$ würden in dem Falle sämmtlich verschwinden, wenn die von $a$ und $b$ ausgehenden Curven nach demselben Nullpunkt führten. Die Grössen $A$ müssen durch geometrische Betrachtungen ermittelt werden.

Wir müssen nun eine Gleichung für die Curven ($a$) und ($b$) aufsuchen. Den Bedingungen, welchen die ($a$) und ($b$) unterworfen sind, genügen die Proportionen der Curven stärkster Steigung (oder stärksten Abfalls), welche auf der Fläche $\zeta = U^2+V^2$ durch die Verzweigungspunkte gelegt werden können. Diese Projectionen sollen kurz Steigungscurven heissen. Die Differentialgleichung der Steigungscurven ist bekanntlich

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} dy - \frac{\partial \zeta}{\partial y} dx = 0.$$

Setzt man $\zeta = U^2+V^2$ und benutzt die bekannten Relationen $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}$ und $\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}$, so geht obige Gleichung über in

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{V}{U}\right) dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{V}{U}\right) dy = 0.$$

Die Steigungscurven haben also zur Gleichung $U = CV$. $C$ ist eine Constante. Soll die Curve durch einen Punkt $z_0$ gehen, in dem $U$ und $V$ die Werte $U_0$ und $V_0$ haben, so hat die durch diesen Punkt gehende Steigungscurve die Gleichung:

$$2) \quad \frac{U}{U_0} = \frac{V}{V_0} = \frac{U+Vi}{U_0+V_0} = w,$$

wo $w$ ein reeller Parameter ist. Alle Steigungscurven gehen durch die Nullpunkte, aber nicht alle Zweige derselben. Die Steigungscurven verzweigen sich da, wo $\frac{\partial(U-CV)}{\partial x}$ und $\frac{\partial(U-CV)}{\partial y} = 0$ ist, also in den Verzweigungspunkten. Zwei verschiedene Steigungscurven können sich nur in den Nullpunkten schneiden. Um an einem einfachen Beispiel die Lage der Curven ($a$) und ($b$) zu zeigen, betrachten wir $\int_\alpha^\beta (a+2bz+cz^2)^n dz$, wo sämmtliche Constanten complex sein sollen und $ac-b^2$ von Null verschieden sei. Statt den abs. Betrag der $n$ten Potenz zu betrachten, betrachten den abs. Betrag selbst. Setzen wir statt $z$ ein $\frac{-b+diz}{c}$, wo $d = \sqrt{ac-b^2}$ und das Zeichen von $d$ beliebig aber fest gewählt ist, so geht das Integral über in

$$3)\quad \frac{i d^{2n+1}}{c^{n+1}} \int\limits_{\frac{\alpha c+b}{di}}^{\frac{\beta c+b}{di}} (1-z^2)^n \, dz.$$

Der Verzweigungspunkt findet sich aus $\frac{d(1-z)^2}{dz} = 0$ bei $z = 0$. Die Nullpunkte sind $z = \pm 1$. $U$ ist $= 1 - x^2 + y^2$, $V = -2xy$, $U_0 = 1$, $V_0 = 0$, die Gleichung der Curven ($a$) und ($b$) ist also

$$UV_0 - VU_0 = 0 \quad \text{oder} \quad xy = 0.$$

Die Curve ($a$)ist also die reelle Achse und geht durch die Nullpunkte, die Curve ($b$) ist die $y$ Achse. $U^2 + V^2$ wächst in der Tat auf der $y$ Achse nach beiden Seiten.

Es ist nun klar, dass, wenn $\frac{\alpha c + b}{di}$ und $\frac{\beta c + b}{di}$ beide auf derselben Seite der $y$ Achse liegen, die von diesen Punkten (den Endpunkten des Integrationsweges) ausgehenden Steigungscurven nach demselben Nullpunkt führen, so dass dann der Verzweigungspunkt nicht in Frage kommt. Liegen diese Punkte aber auf verschiedenen Seiten der $y$ Achse, hat z. B. $\frac{\alpha c + b}{di}$ einen negativen reellen, $\frac{\beta c + b}{di}$ einen positiven reellen Teil, so integrirt man von $\frac{\alpha c + b}{di}$ auf einer Steigungscurve nach $-1$, von $-1$ nach $+1$, von $+1$ nach $\frac{\beta c + b}{di}$.

Setzt man $z = \frac{u}{\sqrt{n}}$, so ist

$$\int\limits_{-1}^{+1} (1-z^2)^n \, dz = \int\limits_{-\sqrt{n}}^{+\sqrt{n}} \left(1 - \frac{u^2}{n}\right)^n \frac{du}{\sqrt{n}},$$

und dieses ist in erster Annäherung

$$= \frac{2}{\sqrt{n}} \int\limits_0^{\infty} e^{-u^2} \, du = \sqrt{\frac{\pi}{n}}.$$

Der Wert des obigen Integrals von $-1$ nach $+1$ ist also in erster Annäherung $= i \sqrt{\frac{\pi}{n}} \frac{d^{2n+1}}{c^{n+1}}$.

Um den Wert des Integrals erstreckt über die erste Steigungscurve von $\frac{\alpha c + b}{di}$ bis zu einem Nullpunkt zu finden, setze man in

3) für $z$ ein $\frac{\alpha c+b}{di}+\frac{cf(\alpha)iz}{2(\alpha c+b)d^2}$, wo $f\alpha=a+2b\alpha+c\alpha^2$. Das Integral geht dann über in

$$\frac{-f\alpha^{n+1}}{2(\alpha c+b)}\int_0^1 (1-z)^n dz=-\varphi(\alpha),$$

wo $\varphi(\alpha)=\frac{f(\alpha)^{n+1}}{2(n+1)(\alpha c+b)}$. Das Integral $\int_\alpha^\beta (a+2bz+cz^2)^n$ ist also in erster Annäherung $=\varphi(\beta)-\varphi(\alpha)\pm\varepsilon i\sqrt{\frac{\pi}{n}}\frac{d^{2n+1}}{c^{n+1}}$. $\varepsilon$ ist 0, wenn die reellen Teile von $\frac{\alpha c+b}{di}$ und $\frac{\beta c+b}{di}$ beide dasselbe Zeichen haben, sonst ist $\varepsilon=1$. Das obere Zeichen gilt, wenn der reelle Teil von $\frac{\alpha c+b}{di}$ negativ, der von $\frac{\beta c+b}{di}$ positiv ist. Im entgegengesetzten Falle gilt das untere Zeichen. Eine kleine Abänderung erleidet die Formel, wenn $\alpha c+b$ oder $\beta c+b$ verschwinden, d. h. wenn ein Endpunkt des Integrationsweges in den Verzweigungspunkt fällt. Von den 3 Gliedern $\varphi(\alpha)$, $\varphi(\beta)$ und $\varepsilon i\sqrt{\frac{\pi}{n}}\frac{d^{2n+1}}{c^{n+1}}$ behält man schliesslich nur das bei, welches den grössten abs. Betrag hat.

Als zweites Beispiel wählen wir

$$5)\quad \int_\alpha^\beta (z+a_1)^{n_1}(z+a_2)^{n_2}dz;$$

es sollen $n_1$ und $n_2$ gleichzeitig unendlich werden, doch so, dass $\frac{n_1}{n_2}$ endlich bleibt. Die Substitution $-a_1+(a_1-a_2)z$ statt $z$ verwandelt das Integral in

$$6)\quad \int_{\frac{\alpha+a_1}{a_1-a_2}}^{\frac{\beta+a_1}{a_1-a_2}} z^{n_1}(1-z)^{n_2}dz.$$

Der Verzweigungspunkt liegt bei $z=\frac{n_1}{n_1+n_2}$; 0 und 1 sind die Nullpunkte. Sind $\frac{\alpha+a_1}{a_1-a_2}$ und $\frac{\beta+a_1}{a_1-a_2}$ reell, so findet man den Wert des Integrals sofort. Im allgemeinen Falle setzen wir $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, $z-1=\varrho(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$, so geht die Gleichung der Steigungscurve $U-CV$ über in

$$\cos(n_1\varphi+n_2\varphi_1) = C\sin(n_1\varphi+n_2\varphi_1).$$

In unserm Falle ist $V_0 = 0$, $C = \infty$, also lautet die Steigungscurve

$$n_1\varphi+n_2\varphi_1 = m\pi,$$

wo $m$ eine ganze Zahl incl. 0. $\varphi = 0$, $\varphi_1 = \pi$, $n_2 = m$ liefert die Curve $A$, welche die Nullpunkte verbindet und mit der reellen Achse zusammenfällt. Nehmen wir an, dass $\varphi$ und $\varphi_1$ zwischen $\pi$ und $-\pi$ liegen, bezeichnen ferner die Halbebene, auf der $\varphi$ und $\varphi_1$ positiv sind, als die positive Halbebene, so findet man, dass der Zweig der der Curve ($b$), der vom Verzweigungspunkt aus sich in die positive Halbebene erstreckt, zur Gleichung hat

$$\frac{n_1}{n_2}\varphi+\varphi_1-\pi = 0.$$

Die Fortsetzung in die negative Halbebene hat zur Gleichung

$$-\frac{n_1}{n_2}\varphi-\varphi_1-\pi = 0.$$

Beide zusammen bilden die Curve ($b$) und teilen die Ebene so, dass in jedem Teile ein Nullpunkt liegt. (Ist $\frac{n_1}{n_2} = 2$, so ist $b$ ein Hyperbelzweig). Der Teil, in dem $z = 0$ liegt, heisse I, der andere heisse II. Um zu bestimmen, in welchem Teile ein Punkt $z$ liegt, setze man $z = re^{\varphi i}$, $z-1 = \varrho e^{\varphi_1 i}$, $\varphi$ und $\varphi_1$ beide zwischen $-\pi$ und $+\pi$ angenommen. Ist $\varphi$ positiv, so sei $A = \frac{n_1}{n_2}\varphi+\varphi_1-\pi$, ist $\varphi$ negativ, so sei $-\frac{n_1}{n_2}\varphi-\varphi_1-\pi = A$. Ist dann $A > 0$, so liegt $z$ in I, ist $A < 0$, so liegt $z$ in II.

Ersetzt man in 5) durch $\alpha-\dfrac{(\alpha+a_1)(\alpha+a_2)z}{\alpha+a_2+\frac{n_2}{n_1}(\alpha+a_1)}$, so findet man den ersten Teil des Integrals erstreckt von $\alpha$ bis zu einem Nullpunkt in erster Annäherung $= -\varphi(\alpha)$, wo

$$\varphi(\alpha) = \frac{(\alpha+a_1)^{n_1+1}(\alpha+a_2)^{n_2+1}}{n_1(\alpha+a_2)+n_2(\alpha+a_1)}.$$

Man erhält schliesslich

$$8)\quad \int_\alpha^\beta (z+a_1)^{n_1}(z+a_2)^{n_2}dz = \varphi(\beta)-\varphi(\alpha)\pm\varepsilon(-1)^{n_2}\times \frac{n_1^{n_1}n_2^{n_2}(a_1-a_2)^{n_1+n_2+1}\sqrt{2\pi\, n_1 n_2}}{(n_1+n_2)^{n_1+n_2+\frac{1}{2}}}.$$

Um $\varepsilon$ und die Vorzeichen zn bestimmen, setzen wir

$$\frac{\alpha + a_1}{a_1 - a_2} = re^{\varphi i}, \quad \frac{\alpha + a_1}{a_1 - a_2} - 1 = \frac{\alpha + a_2}{a_1 - a_2} = \varrho e^{\varphi_1 i},$$

setzen

$$A = \frac{n_1}{n_2}\varphi + \varphi_1 - \pi \quad \text{oder} \quad = -\frac{n_1}{n_2}\varphi - \varphi_1 - \pi,$$

jenachdem $\varphi$ positiv oder negativ ist. Ebenso berechnen wir ans $\frac{\beta + a_1}{a_1 - a_2}$ nnd $\frac{\beta + a_2}{a_1 - a_2}$ dio Grösse $B$. $\varepsilon$ ist dann $= 0$, wenn $A$ und $B$ gleiches Zeichen haben; haben sie verschiedenes Zeichen, so ist $\varepsilon = 1$. Das $+$ Zeichen gilt, wenn $A > 0$, das $-$ Zeichen gilt im umgekehrten Falle.

Die Steignngscnrven lassen sich noch sehr leicht angeben, wenn zu berechnen ist $\int_\alpha^\beta (z^3 - 3p^2 z + q)^n dz$ und $p$ und $q$ reell sind. Die Cnrven ($a$) nnd ($b$) sind Gerade und Hyperbelzweige.

Um wenigstens an einem Beispiele zu zeigen, wie Fälle zn behandeln sind, wo mehrere Verzweigungspnnkte zusammenfallen, betrachten wir $\int (z^{2m} - 2k^m z^m + \lambda)^n dz$, nnd setzen voraus, dass $\varkappa$ und $\lambda$ reell sind. $m - 1$ Verzweigungspunkte liegen bei $z = 0$, wo

$$U_0 = \lambda, \quad V_0 = 0$$

ist; die $m$ übrigen berechnen sich aus $z^m = \varkappa^m$, wo

$$U_0 = \lambda - \varkappa^m, \quad V_0 = 0$$

ist. Also ist $\varphi = \infty$.

Die Cnrven ($a$) und ($b$) haben zur Gleichung

$$V = 0 \quad \text{oder} \quad r^{2m} \sin 2m\varphi - 2r^m \varkappa^m \sin m\varphi = 0$$

wenn $z = re^{\varphi i}$ gesetzt wird. $0 \leqq \varphi < z\pi$. Die Steigungscurven sind also entweder

$$\sin m\varphi = 0 \quad \text{oder} \quad r^m \cos m\varphi = \varkappa^m.$$

In der Figur ist $m = 4$ angenommen und $0 < \lambda < \varkappa^8$. Die Verzweigungspunkte liegen bei 0 und bei I, II, III, IV. Die Nullpunkte bei 1, 2, 3 ... 8. Die reelle und imaginäre Achse bilden die Curven ($a$), die Curven ($b$) bestehen aus 8 Zweigen, nämlich $Oa$, $Ob$, $Oc$, $Od$ und ans den Zweigen der Cnrven 4. Grades, die zur Gleichung hat

$$r^4 \cos 4\varphi = \varkappa^4 \quad \text{oder} \quad x^4 - 6x^2y^2 + y^4 = \varkappa^4.$$

Jeder Nullpunkt liegt in einem besondern von Cnrven ($b$) be-

grenzten Felde. Es liege nun z. B. $\alpha$ bei 6 und $\beta$ bei 4. Dann ist zu integriren von $\alpha$ nach 6, von 6 über III nach 5, von 5 nach 0, 0 nach 3, von 3 über II nach 4, von 4 nach $\beta$. Die Integrale von 6 nach 5 und von 3 nach 4 sind zusammen

$$= \frac{(-1)^n(1+i)(\varkappa^8-\lambda)^{n+\frac14}\sqrt{\pi}}{\varkappa^3\sqrt{2\,2n}},$$

die Integrale von 5 bis 0 und von 0 nach 3 sind zusammen

$$= \frac{(1+i)\lambda^{n+\frac14}\Pi(\frac14)}{4\varkappa\sqrt[4]{2n}}.$$

Fällt $\alpha$ mit 6 und $\beta$ mit 4 zusammen, so ist $\int_6^4 (z^8-2\varkappa^4z^4+\lambda)^n\,dz$ in erster Annäherung gleich der Summe obiger beiden Werte. Die allgemeine Lösung lässt sich leicht angeben.

Obiges Verfahren bleibt anwendbar, wenn $fz$ multiplicirt wird mit einer ganzen eindeutigen Function von $z$, in der die Exponenten $n$ nicht vorkommen. Man kann beweisen, dass die Lage der Curven ($a$) und ($b$) nur von $f(z)$ abhängt, wenn die Exponenten $n$ unendlich werden.

Um den Nutzen unserer Betrachtungen zu zeigen, wollen wir die von Herrn Heine untersuchten zugeordneten Functionen $P_\nu{}^n(x)$ und $Q_\nu{}^n(x)$ *) berechnen für den Fall, dass $n$ und $\nu$ oder eine von diesen Zahlen unendlich gross wird. Für $P_\nu{}^n(x)$ findet Herr Heine das Integral

$$C.\sqrt{x^2-1}\int_0^\pi \frac{\sin^{2\nu}\varphi\,d\varphi}{(x+\cos\varphi\sqrt{x^2-1})^{n+\nu+1}},$$

wo

$$C = \frac{2^{n+\nu}\Pi(n)\Pi(\nu)\Pi(n+\nu)}{\Pi(2n)\Pi(2\nu)}.$$

Das Integral ist auf reellem Wege zu erstrecken und stellt $P_\nu{}^n(x)$ dar, wenn $x$ einen positiven reellen Teil hat und $\sqrt{x^2-1}$ einen positiven reellen oder positiven imaginären Teil hat, wenn der reelle Teil verschwindet. Wir wollen den Wert dieses Integrals bestimmen für endliche $x$ und $n$, dagegen für unendliche $\nu$. Setzen wir

$$\cos^2\frac{\varphi}{2} = z,$$

---

*) Heine, Theorie der Kugelfunctionen, Bd. I. pag. 200 ff.

$$c = \frac{-x + \sqrt{x^2-1}}{2\sqrt{x^2-1}},$$

so ist

$$9) \quad P_\nu{}^n(x) = \frac{C.2^{\nu-n-1}}{(\sqrt{x^2-1})^{n+1}} \int_0^1 \left(\frac{z(z-1)}{z-c}\right)^\nu \frac{dz}{(z(1-z))^{\frac{1}{2}}(z-c)^{n+1}}.$$

Die Integration ist über reelle $z$ zu erstrecken. Da hier nur $\nu$ unendlich gross ist, so brauchen wir nur zu betrachten

$$fz = \frac{z(z-1)}{z-c}.$$

Die Betrachtung wird durch den Umstand ein wenig geändert, dass hier ein Unstetigkeitspunkt bei $z = c$ vorhanden ist, über welchen der Integrationsweg nicht verschoben werden darf. $f'z$ verschwindet bei

$$z = c \pm \sqrt{c^2 - c} = \frac{\pm 1 - x \pm \sqrt{x^2-1}}{2\sqrt{x^2-1}}$$

Setzt man

$$10) \quad x = r\cos\varphi + i\sin\varphi\sqrt{r^2-1},$$

$r$ reell und $\geqq 1$, $\sqrt{r^2-1} \geqq 0$, $-\pi < \varphi \leqq \pi$, so findet man, dass der Unstetigkeitspunkt und der dem unteren Zeichen entsprechende Verzweigungspunkt auf derselben Seite der reellen Achse liegen, während der dem oberen Zeichen entsprechende Verzweigungspunkt auf der entgegengesetzten Seite liegt. Der Unstetigkeitspunkt liegt in der Mitte der Verbindungsgeraden der beiden Verzweigungspunkte. Die Curve ($b$) geht vom Unendlichen zu einem Verzweigungspunkt, dann über den Unstetigkeitspunkt zwischen die Nullpunkte 0 und 1 hindurch zum zweiten Verzweigungspunkt und von da nach dem Unendlichen, wie man leicht durch Auflösung der Gleichung 2) nämlich

$$\frac{U + Vi}{U_0 + V_0 i} = w, \quad w \geqq 1$$

erkennt. Es folgt hieraus, dass wir über den Punkt

$$z_0 = c + \sqrt{c^2 - c} = \frac{1 - x + \sqrt{x^2-1}}{2\sqrt{x^2-1}}$$

integriren müssen. Setzt man in $\frac{z(z-1)}{z-c}$ für $z$ ein $z_0 + z$, so geht es über in $\frac{z_0(z_0-1)}{z_0-c}(1 - 2(1+x)z^2 + r_0)$, wo $r_0$ höhere als die zweite Potenz von $z$ enthält. Setzt man diese Werte für $z$ und $\frac{z(z-1)}{z-c}$ in

9) ein, so findet man als erste Annäherung

$$P_\nu^n(x) = \frac{C\sqrt{\frac{\pi}{\nu}}\left(\frac{z_0(z_0-1)}{z_0-c)}\right)^\nu (2\sqrt{x^2-1})^{n+1}}{2^{n+1-\nu}(\sqrt{x^2-1})^{n+1}}$$

Aus der Näherungsformel

$$\log\Pi(\nu) = (\nu+\tfrac{1}{2})\log\nu - \nu + \tfrac{1}{2}\log 2\pi$$

findet man dann in erster Annäherung

$$11)\quad P_\nu^n(x) = \left(\frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}\right)^\nu \cdot \frac{\nu^n}{1.3.5\,\ldots\,2n-1}.$$

Haben $x$ und $\sqrt{x^2-1}$ einen negativen reellen Teil, so ist obiges Integral $= \left(\frac{x+1}{-\sqrt{x^2-1}}\right)^\nu \frac{\nu^n}{1.3.5\,\ldots\,2n-1}$. Es muss in diesem Falle über den Verzweigungspunkt $\frac{-1-x+\sqrt{x^2-1}}{2\sqrt{x^2-1}}$ integrirt werden. Für Werte von $x$ mit positivem reellen Teile, die in einem um $x=1$ mit dem Radius 2 beschriebenen Kreise liegen, findet man 11) sofort aus der hypergeometrischen Reihe für $P_\nu^n(x)$, die nach $\frac{1-x}{2}$ fortschreitet *).

Ist $n$ unendlich, dagegen $\nu$ endlich, so findet Herr Heine

$$P_\nu^n(x) = \frac{(1-\xi^2)^{-\frac{1}{2}}}{(2\xi)^n},$$

wenn $\xi = x - \sqrt{x^2-1}$ und Mod. $\xi < 1$ ist. Diese Formel erhält man leicht aus dem Integral für $P_\nu^n(x)$, wenn man mit Hülfe der Substitution

$$\sin\varphi = \frac{\sin\eta}{x-\cos\eta\sqrt{x^2-1}},\quad \sin\eta = \frac{\sin\varphi}{x+\cos\varphi\sqrt{x^2-1}}$$

das Integral verwandelt in

$$12)\quad P_\nu^n(x) = C(\sqrt{x^2-1})^\nu \int_0^\pi \sin^{2\nu}\eta\,(x-\cos\eta\sqrt{x^2-1})^{n-\nu}\,d\eta,$$

wo auf reellem Wege integrirt wird. Mit Hülfe der Substitution

$$\cos\eta = 2z^2 - 1$$

---

*) s. o. pag. 221.

findet man dann das Resultat. Sind $\nu$ nnd $n$ nnendlich gross, dagegen $n-\nu$ endlich, so findet man aus 12), indem man den Integrationsweg beibehält:

$$P_\nu^n(x) = \frac{\pi C\Pi(2\nu).(\sqrt{x^2-1})^\nu x^{n-\nu}}{2^{2\nu}\Pi(\nu)\Pi(\nu)};$$

der Zahlfactor ist nahezu $= 1$, also

$$13) \quad P_\nu^n(x) = (\sqrt{x^2-1})^\nu x^{\nu-n},$$

wenn $n-\nu$ endlich positiv oder negativ, $x$ einen positiven reellen Teil hat, nnd $n$ und $\nu$ unendlich gross sind.

Für die zugeordnete Fnnction zweiter Art $Q_\nu^n(x)$ gibt Herr Heine für den Fall, dass $\nu$ endlich, $n$ nnendlich ist, den Näherungsausdruck

$$Q_\nu^n(x) = (1-\xi^2)^{-\frac{1}{2}}(2\xi)^{n+1}.\,\mathrm{Mod}\,\xi < 1.$$

Denselben Wert können wir leicht ans dem F. Nenmann'schen Integral

$$14) \quad 2Q_\nu^n(x) = \frac{(\sqrt{x^2-1})^\nu\Pi(2n+2)}{2^{2n+1}\Pi(n)\Pi(n+1)}\int_{-1}^{+1}\frac{(1-y^2)^n\,dy}{(x-y)^{n+\nu+1}}$$

herleiten. Ist $x^2$ nicht positiv und $< 1$, so ist über die reelle Achse zu integriren. Setzen wir $y = 2z-1$, so geht das Integral über in

$$14a) \quad \frac{(\sqrt{x^2-1})^\nu\Pi(2n+2)2^{n-\nu}}{\Pi(n)\Pi(n+1)}\int_0^1\left(\frac{z(1-z)}{\frac{1+x}{2}-z}\right)^n\frac{dz}{\left(\frac{1+x}{2}-z\right)^{\nu+1}},$$

welches dem nnter 9) analog ist. Ist wieder

$$fz = \frac{z(1-z)}{\frac{1+x}{2}-z},$$

so verschwindet $f'z$ bei

$$z_0 = \frac{1+x\pm\sqrt{x^2-1}}{2}.$$

Durch die Snbstitution 10) für $x$ findet man, dass man über den Punkt

$$z_0 = \frac{1+x-\sqrt{x^2-1}}{2}$$

integriren mnss; da der Unstetigkeitspnnkt nnd der Punkt $\frac{1+x+\sqrt{x^2-1}}{2}$ auf derselben Seite der reellen Achse liegen. Setzen wir

$$z = z_0 + \zeta,$$

so wird

$$\frac{z(1-z)}{\frac{1+x}{2}-z} = \xi\left(1 - \frac{2(x+\sqrt{x^2-1})}{\sqrt{x^2-1}}\zeta^2 + r\right),$$

wo $r$ höhere als die zweite Potenz von $\zeta$ enthält. Der Factor von $\zeta^2$ ist $= \frac{1-\xi^2}{\xi^2(x^2-1)}$. Die Gleichnng 14a) ergibt dann in der Tat

$$15)\quad Q_\nu{}^n(x) = (1-\xi^2)^{-\frac{1}{2}}(2\xi)^{n+1}.$$

Ist $n$ endlich, dagegen $\nu$ unendlich gross, so kann man ans 14) sofort einen Näherungswert ableiten. Liegt z. B. $x$ auf der negativen Seite der reellen Achse, so ziehe man von $x$ Gerade nach den Punkten $\pm 1$ und verlängere sie in die positive Halbebene. Der absolute Betrag der zu integrirenden Function wird dann von $+1$ und $-1$ ans sehr rasch auf der Verlängerung dieser Goraden abnehmen. Anstatt nun über die reelle Achse zu integriren, integriren wir von $-1$ über die dnrch $-1$ gelegte verlängerte Gerade bis ins Unendliche, im Unendlichen zum Unendlichkeitspunkte der verlängerten Geraden, die durch $+1$ geht, nnd auf dieser Geraden bis $+1$. Da das Integral im Unendlichen verschwindet, so bleibt

$$Q_\nu{}^n(x) = \frac{(\sqrt{x^2-1})^\nu . 1.3 \ldots 2n+1}{2.2.4.6 \ldots 2n}\left(\int_{-1}^{\infty}\frac{(1-z^2)^n dz}{(x-z)^{n+\nu+1}} - \int_{+1}^{\infty}\frac{(1-z^2)^n dz}{(x-z)^{n+\nu+1}}\right).$$

Setzt man im ersten Integral statt $z$ ein: $-1-(1+x)z$, im zweiten $1-(x-1)$, so wird in erster Annäherung

$$16)\quad 2Q_\nu{}^n(x) = (\sqrt{x^2}-1)^\nu . \frac{1.3.5 \ldots 2n+1}{\nu^{n+1}}\left(\frac{1}{(x-1)^\nu} + \frac{(-1)^{n+1}}{(x+1)^\nu}\right).$$

Die Formel wird nngültig für die Punkte $x = \pm 1$, so wie für nnendliche $x$, gilt aber noch für reelle $x$ zwischen $+1$ nnd $-1$.

Leipzig, den 24. Juli 1880.

XV.

# Sur des polynômes de deux variables analogues aux polynômes de Jacobi.

Par

**P. Appell.**

En se proposant de généraliser les polynômes de Legendre, M. Hermite a été conduit à s'occuper des polynômes

$$\frac{\partial^{m+n}(1-x^2-y^2)^{m+n}}{\partial x^m\,\partial y^n} \tag{1}$$

(voir Comptes Rendus t. LX. et Journal de Crelle t. 64.); depuis, ces polynômes ont été étudiés par Didon (Annales de l'Ecole Normale t. V, année 1868).

De même que les polynômes de Legendre se rattachent à la série hypergéométrique de Gauss, les polynômes (1) de M. Hermite se rattachent aux séries hypergéométriques de deux variables que j'ai considérées (voir Comptes Rendus t. XC et XCI). Mais, l'on sait que, de la série hypergéométrique de Gauss, Jacobi a déduit des polynômes plus généraux que ceux de Legendre et comprenant ceux-ci comme cas particulier (voir Journal de Crelle t. 56). Je me propose ici d'étudier et de rattacher aux séries hypergéométriques de deux variables les polynômes

$$A_{m,n} = x^{-a}y^{-b}(1-x-y)^{-c}\,\frac{\partial^{m+n}\left[x^{m+a}y^{n+b}(1-x-y)^{m+n+c}\right]}{\partial x^m\,\partial y^n} \tag{2}$$

qui sont, comme on le voit, analogues aux polynômes de Jacobi. Dans cette équation (2) les lettres $a$, $b$, $c$ désignent des nombres quelconques, $m$ et $n$ des entiers positifs; $A_{m,n}$ est alors un polynôme en $x$ et $y$ de degré $m+n$.

I. Tout d'abord, voici comment on peut former deux équations différentielles linéaires du second ordre aux dérivées partielles auxquelles satisfait le polynôme $A_{m,n}$.

Posons, pour abréger,

$$(3)\quad \begin{cases} R = x^{m+a}y^{n+b}(1-x-y)^{m+n+c} \\ S = x^{m+a}y^{n+b}(1-x-y)^{m+n+c-1} \\ U = x^{-a}y^{-b}\dfrac{\partial^{m+n}\left[x^{m+a}y^{n+b}(1-x-y)^{m+n+c}\right]}{\partial x^m\,\partial y^n} \\ T = x\dfrac{\partial U}{\partial x}+y\dfrac{\partial U}{\partial y}-(m+n+c)U \end{cases}$$

et soit

$$V = x^{-a}y^{-b}\frac{\partial^{m+n}\left[x^{m+a}y^{n+b}(z-x-y)^{m+n+c}\right]}{\partial x^m\,\partial y^n}$$

Cette fonction $V$ est une fonction homogéne de degré $m+n+c$ des trois variables $x$, $y$, $z$; elle se réduit à $V$ lorsqu'on $y$ fait $z=1$. En appliquant à $V$ le théorème des fonction homogénes, on a

$$(4)\quad x\frac{\partial V}{\partial x}+y\frac{\partial V}{\partial y}+z\frac{\partial V}{\partial z}=(m+n+c)V$$

or

$$\frac{\partial V}{\partial z}=x^{-a}y^{-b}(m+n+c)\frac{\partial^{m+n}\left[x^{m+a}y^{n+b}(z-x-y)^{m+n+c-1}\right]}{\partial x^m\,\partial y^n}$$

alors, si dans l'identité (4) on fait $z=1$, et si l'on remarque que $V$ se réduit à $U$ et $\dfrac{\partial V}{\partial z}$ à $(m+n+c)x^{-a}y^{-b}\dfrac{\partial^{m+n}S}{\partial x^m\,\partial y^n}$, on voit que cette identité devient

$$x\frac{\partial U}{\partial x}+y\frac{\partial U}{\partial y}+(m+n+c)x^{-a}y^{-b}\frac{\partial^{m+n}S}{\partial x^m\,\partial y^n}=(m+n+c)U$$

ou enfin

$$(5)\quad (m+n+c)x^{-a}y^{-b}\frac{\partial^{m+n}S}{\partial x^m\,\partial y^n}=-T$$

Cela posé, de l'expression (3) de $R$ on tire par la différentiation

$$x\frac{\partial R}{\partial x}-(m+a)R+x(m+n+c)S=0$$

Différentions le premier membre de cette dernière relation $m+1$ fois par rapport à $x$, $n$ fois par rapport à $y$; nous obtenons

Digitized by Google

$$(6)\qquad x\frac{\partial^{m+n+2}R}{\partial x^{m+2}\partial y^n}-(a-1)\frac{\partial^{m+n+1}R}{\partial x^{m+1}\partial y^n}+x(m+n+c)\frac{\partial^{m+n+1}S}{\partial x^{m+1}\partial y^n}$$

$$+(m+1)(m+n+c)\frac{\partial^{m+n}S}{\partial x^m\partial y^n}=0$$

Or, on a

$$\frac{\partial^{m+n}R}{\partial x^m\partial y^n}=x^a y^b U$$

et, d'aprés (5)

$$(m+n+c)\frac{\partial^{m+n}S}{\partial x^m\partial y^n}=-x^a y^b T$$

l'équation (6) devient donc

$$x\frac{\partial^2[x^a y^b U]}{\partial x^2}-(a-1)\frac{\partial[x^a y^b U]}{\partial x}-x\frac{\partial[x^a y^b T]}{\partial x}$$

$$-(m+1)x^a y^b T=0$$

ou bien, en effectuant les différentiations et réduisant

$$x\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+(a+1)\frac{\partial U}{\partial x}-x\frac{\partial T}{\partial x}-(a+m+1)T=0$$

Enfin, en remplaçant $T$ par sa valeur (3), on obtient, pour $U$, l'équation différentielle

$$(7)\qquad (x-x^2)\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}-xy\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}+[a+1-(a-n-c+2)x]\frac{\partial U}{\partial x}$$

$$-(a+m+1)y\frac{\partial U}{\partial y}+(a+m+1)(m+n+c)U=0$$

Par raison de symétrie, on peut écrire immédiatement une seconde équation différentielle

$$(7')\qquad (y-y^2)\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}-xy\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}+[b+1-(b-m-c+2)y]\frac{\partial U}{\partial y}$$

$$-(b+n+1)x\frac{\partial U}{\partial x}+(b+n+1)(m+n+c)U=0$$

Comme on a

$$U=(1-x-y)^c A_{m,n}$$

on déduit facilement des équations (7) et (7′) deux équations différentielles auxquelles satisfait le polynôme $A_{m,n}$. Mais il est inutile d'écrire ici ces deux équations.

II. Les équations (7) et (7′) permettent de ramener le polynôme $A_{m,n}$ aux séries hypergéométriques de deux variables. A cet

effet, convenons de désigner le produit $\lambda(\lambda+1)\dots(\lambda+k-1)$ par $(\lambda, k)$ et de faire $(\lambda, 0) = 1$; la série qu'il importe de considérer est la suivante

$$F_2(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma', x, y) = \Sigma \frac{(\alpha, m+n)(\beta, m)(\beta', n)}{(\gamma, m)(\gamma', n)(1, m)(1, n)} x^m y^n$$

la sommation s'étendant aux valeurs entières de $m$ et $n$ depuis zéro jusqu'à l'infini. Cette fonction $F_2$ satisfait aux deux équations différentielles

(8)

$$(x-x^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + [\gamma-(\alpha+\beta+1)x]\frac{\partial z}{\partial x} - \beta y\frac{\partial z}{\partial y} - \alpha\beta z = 0$$

$$(y-y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + [\gamma'-(\alpha+\beta'+1)y]\frac{\partial z}{\partial y} - \beta' x\frac{\partial z}{\partial x} - \alpha\beta' z = 0$$

ainsi qu'il est facile de le vérifier. (Voir Comptes Rendus, t. XC. p. 296). Or ces équations (8) se réduisent aux équations (7) et (7′) si l'on fait

$$\alpha = -(m+n+c), \quad \beta = a+m+1, \quad \beta' = b+n+1$$
$$\gamma = a+1, \quad \gamma' = b+1$$

Donc la fonction $U$ et la fonction

$$z = (a+1, m)(b+1, n)F_2(-(m+n+c), a+m+1, b+n+1, a+1, b+1, x, y)$$

satisfont aux mêmes équations différentielles (7) et (7′); et, si l'on remarque de plus que, pour $x = y = 0$, les fonctions

$$U, \quad \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$$

prennent respectivement les mêmes valeurs que

$$z, \quad \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

on voit que $U = z$, et par suite le polynôme $A_{m,n}$ qui est égal à $(1-x-y)^{-c}U$ est donné par la formule suivante où $H = (a+1, m)(b+1, n)$

$$(9) \quad A_{m,n} = H.(1-x-y)^{-c}F_2[-(m+n+c), a+m+1, b+n+1, a+1, b+1, x, y]$$

Mais cette formule ne met pas en évidence ce fait que $A_{m,n}$ est un polynôme. Pour le mettre en évidence, appliquons la formule suivante facile à démontrer

$$F_2(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma', x, y) =$$
$$(1-x-y)^{-\alpha}F_2\left(\alpha, \gamma-\beta, \gamma'-\beta', \gamma, \gamma', \frac{x}{x+y-1}, \frac{y}{x+y-1}\right)$$

On a alors

$$F_2[-(m+n+c),\ a+m+1,\ b+n+1,\ a+1,\ b+1,\ x,\ y) =$$
$$(1-x-y)^{m+n+c}F_2\left[-(m+n+c),\ -m,\ -n,\ a+1,\ b+1,\ \frac{x}{x+y-1},\ \frac{y}{x+y-1}\right]$$

d'où

$$(10)\quad A_{m,n} = H.(1-x-y)^{m+n}F_2\Big[-(m+n+c),\ -m,\ -n,\ a+1,$$
$$b+1,\ \frac{x}{x+y-1},\ \frac{y}{x+y-1}\Big]$$

formule dans laquelle le second membre est un polynôme de degré $m+n$, car les éléments $\beta$, $\beta'$ ont des valeurs entières négatives.

III. Supposons maintenant

$$a+1>0,\quad b+1>0,\quad c+1>0$$

et désignons par $B$ un polynôme quelconque en $x$ et $y$. Soit

$$(11)\qquad I=\iint x^a y^b (1-x-y)^c A_{m,n}\,.\,B\,.\,dxdy$$

l'intégrale double étant étendue aux valeurs réelles de $x$ et $y$ telles que

$$(12)\qquad x\geqq 0,\qquad y\geqq 0,\qquad 1-x-y\geqq 0$$

En remplaçant le polynôme $A_{m,n}$ par son expression (2), on a

$$I=\iint\frac{\partial^{m+n}[x^{m+a}y^{n+b}(1-x-y)^{m+n+c}]}{\partial x^m\,\partial y^n}\,.\,B\,.\,dxdy$$

Or, la formule générale d'intégration par parties

$$\int X\frac{d^pY}{dz^p}\,dz = X\frac{d^{p-1}Y}{dz^{p-1}} - \frac{dX}{dz}\cdot\frac{d^{p-2}Y}{dz^{p-2}} + \ldots + (-1)^p\int Y\frac{d^pX}{dz^p}\,dz$$

appliquée successivement aux variables $x$ et $y$ dans l'intégrale $I$, montre que cette intégrale peut se mettre sous la forme

$$(13)\quad I=(-1)^{m+n}\iint x^{m+a}y^{n+b}(1-x-y)^{m+n+c}\frac{\partial^{m+n}B}{\partial x^m\partial y^n}\,dxdy$$

car tous les termes intégrés s'annulent aux limites (12). Il résulte de cette forme (13) de l'intégrale $I$ que, si $B$ est un polynôme de degré moindre que $m+n$ ou bien un polynôme de degré $m+n$ ne contenant pas de terme en $x^my^n$, l'intégrale $I$ est égale à zéro; en effet dans ces deux cas $\frac{\partial^{m+n}B}{\partial x^m\partial y^n}=0$.

Faisons, en particulier $B = A_{\mu,\nu}$; c'est à dire remplaçons $B$ par un des polynômes (2). Si l'on pose

$$I_{m,n}^{\mu,\nu} = \iint x^a y^b (1-x-y)^c A_{m,n} A_{\mu,\nu} dxdy$$

l'intégration étant étendue aux valeurs (12), on voit, d'après ce qui précède, que l'on a

$$I_{m,n}^{\mu,\nu} = 0$$

si $m+n \gtrless \mu+\nu$. Si, au contraire,

$$m+n = \mu+\nu$$

on a, d'après (13)

$$I_{m,n}^{\mu,\nu} = (-1)^{m+n} \iint x^{m+a} y^{n+b} (1-x-y)^{m+n+c} \frac{\partial^{m+n} A_{\mu,\nu}}{\partial x^m \partial y^n} dxdy$$

Comme $\frac{\partial^{m+n} A_{\mu,\nu}}{\partial x^m \partial y^n}$ est une constante, car $A_{\mu,\nu}$ est supposé de degré $m+n$, et que

$$\iint x^{m+a} y^{n+b} (1-x-y)^{m+n+c} dxdy = \frac{\Gamma(m+a+1)\Gamma(n+b+1)\Gamma(m+n+c+1)}{\Gamma(2m+2n+a+b+c+3)}$$

on a

$$(15) \quad I_{m,n}^{\mu,\nu} = (-1)^{m+n} \frac{\partial^{m+n} A_{\mu,\nu}}{\partial x^m \partial y^n} \times \frac{\Gamma(m+a+1)\Gamma(n+b+1)\Gamma(m+n+c+1)}{\Gamma(2m+2n+a+b+c+3)}$$

$(m+n=\mu+\nu)$. La constante $\frac{\partial^{m+n} A_{\mu,\nu}}{\partial x^m \partial y^n}$ se calcule facilement au moyen de l'expression (10) du polynôme $A_{\mu,\nu}$.

Ces formules (14) et (15) permettent de calculer les coefficients du développement d'une fonction de deux variables $x$ et $y$ en série de polynômes $A_{m,n}$. En effet, soit à développer $F(x, y)$ en série de la forme

$$(16) \qquad F(x, y) = \Sigma \lambda_{m,n} A_{m,n}$$

Voici comment on peut calculer les coefficients $\lambda_{m,n}$ des polynômes $A_{m,n}$ de degré $k$. $(m+n=k)$. Multiplions les deux membres de l'équation (16) par

$$x^a y^b (1-x-y)^c A_{\mu,\nu}$$

en supposant $\mu+\nu=k$, et intégrons entre les limites (12). Dans le deuxième membre toutes les intégrales sont nulles, sauf celles qui répondent aux polynômes $A_{m,n}$ de degré $k$, et l'on a

$$(17)\qquad \iint F(x,y)\,.\,x^a y^b(1-x-y)^c\,dx\,dy =$$
$$\lambda_{k,0}\,I_{k,0}{}^{\mu,\nu} + \lambda_{k-1,1}\,I_{k-1,1}{}^{\mu,\nu} + \ldots + \lambda_{k-\varrho,\varrho}\,I_{k-\varrho,\varrho}{}^{\mu,\nu} + \ldots + \lambda_{0,k}\,I_{0,k}{}^{\mu,\nu}$$

Les entiers $\mu$ et $\nu$ étant assujettis à la seule condition $\mu+\nu=k$, on pourra leur donner $(k+1)$ systèmes de valeurs qui fourniront $(k+1)$ équations telles que (17). De ces $(k+1)$ équations on tirera les $(k+1)$ coefficients

$$\lambda_{k,0},\quad \lambda_{k-1,1},\ \ldots\ \lambda_{k-\varrho,\varrho},\ \ldots\ \lambda_{0,k}$$

Voici une autre méthode pour déterminer ces mêmes coefficients $\lambda_{m,n}$ du développement (16). Considérons des polynômes $B_{m,n}$ de degré $m+n$ définis de la façon suivante: soit

$$(18)\qquad B_{m,n} = \sum_{i=0}^{i=m+n} \alpha_i A_{m+n-i,i}$$

les $(m+n+1)$ coefficients $\alpha_i$ étant déterminés par ces conditions que, dans le second membre de l'équation (18), le coefficient de $x^m y^n$ soit égal à l'unité et les coefficients de tous les autres termes de degré $m+n$ égaux à zéro; ce qui donne $(m+n+1)$ équations du premier degré pour déterminer les $(m+n+1)$ coefficients $\alpha_i$.

Alors si l'on fait

$$K_{m,n}{}^{\mu,\nu} = \iint x^a y^b (1-x-y)^c A_{m,n} B_{\mu,\nu}\,dx\,dy$$

l'intégration étant étendue aux limites (13), on voit immédiatement, d'aprés les propriétés des intégrales précédentes $I_{m,n}{}^{\mu,\nu}$, que l'on a

$$K_{m,n}{}^{\mu,\nu} = 0$$

si $m+n \gtrless \mu+\nu$. Mais, si l'on suppose $m+n=\mu+\nu$, on a d'aprés la forme (13) de l'intégrale (11)

$$K_{m,n}{}^{\mu,\nu} = (-1)^{m+n} \iint x^{m+a} y^{n+b} (1-x-y)^{m+n+c} \frac{\partial^{m+n} B_{\mu,\nu}}{\partial x^m \partial y^n}\,dx\,dy$$

Or, dans le polynôme $B_{\mu,\nu}$ il n'y a qu'un terme de degré $m+n$ à savoir le terme $x^\mu y^\nu$; si donc on n'a pas $m=\mu$, $n=\nu$, on a

$$K_{m,n}{}^{\mu,\nu} = 0$$

même lorsque $m+n=\mu+\nu$. Lorsque

$$m=\mu,\quad n=\nu$$

le terme $\frac{\partial^{m+n} B_{\mu,\nu}}{\partial x^m \partial y^n}$ devient $\frac{\partial^{m+n} B_{m,n}}{\partial x^m \partial y^n}$ c'est à dire $1.2\ldots m.1.2\ldots n$, car dans $B_{m,n}$ le coefficient de $x^m y^n$ est l'unité. On a donc

$$K_{m,n}^{m,n} = \Gamma(m+1)\Gamma(n+1)\frac{\Gamma(m+a+1)\Gamma(n+b+1)\Gamma(m+n+c+1)}{\Gamma(2m+2n+a+b+c+3)}$$

Alors, pour déterminer les coefficients $\lambda_{m,n}$ du développement (16), multiplions les deux membres de (16) par

$$x^a y^b (1-x-y)^c B_{m,n}\, dx dy$$

et intégrons entre les limites (12). Dans le second membre tous les termes sont nuls excepté le terme qui a pour coefficient $\lambda_{m,n}$, et l'on a

$$\iint F(x,\ y).x^a y^b (1-x-y)^c B_{m,n}\, dx dy = \lambda_{m,n} K_{m,n}^{m,n}$$

d'où l'on tire $\lambda_{m,n}$.

En supposant, dans tout ce qui précède, $c=0$, on obtient des formules un peu plus simples que j'ai indiquées sans démonstration dans le tome XC des Comptes Rendus p. 731.

Dijon, le 26 octobre 1880.

XVI.

# Ueber einen speciellen Fall des Apollonischen Tactionsproblems.

Von

**K. E. Hoffmann.**

§ 1.

In allen einem und demselben Kreise einbeschriebenen Dreiecken von gleicher Basis ist das Verhältnis der Linie, welche die Spitze $A$ des Dreiecks mit dem Halbirungspunkte $D$ des zur Basis $BC$ gehörigen Bogens verbindet, zur Summe oder Differenz der Seiten $AB$ und $AC$ constant, je nachdem die Punkte $A$ und $D$ auf verschiedenen Seiten oder auf derselben Seite von $BC$ liegen.

Thes. I. $A$ und $D$ liegen auf verschiedenen Seiten von $BC$:

$$(AB + AC) : AD = \text{const.}$$

II. $A$ und $D_1$ liegen auf derselben Seite von $BC$:

$$(AB - AC) : AD_1 = \text{const.}$$

Bew. I. (Fig. 1). Da arc. $BD = CD$, ist Wkl. $BAD = CAD = DBE$; ausserdem ist Wkl. $ABE = ADC$; daher Dreieck $ABE$ ähnlich $ACD$ und

$$AB : AD = BE : CD = BE : BD.$$

Da ferner Wkl. $ADB = ACE$ und Wkl. $BAD = CAE$, ist Dreieck $ABD$ ähnlich $ACE$; daher:

$$AC : AD = CE : BD.$$

Durch Addition beider Proportionen folgt:

$$(AB + AC) : AD = (BE + CE) : BD = BC : BD = \text{const.}$$

II. Da arc. $BD_1 = CD_1$, so ist die Differenz der Bögen $BD_1$ und $AC$ gleich $AD_1$; daher ist Wkl. $BE_1D_1 = ABD_1$; die Dreiecke $BE_1D_1$ haben ausserdem den Wkl. $AD_1B$ gemeinschaftlich, sind also ähnlich; daher:

$$AB : AD_1 = BE_1 : BD_1.$$

Da ferner noch Wkl. $BCA$ sowohl den Wkl. $BD_1A$ als auch Wkl. $ACE_1$ zu 2R ergänzt, ist auch Dreieck $BD_1A$ ähnlich $ACE_1$ und

$$AC : AD_1 = CE_1 : BD_1.$$

Durch Subtraction findet man hieraus:

$$(AB - AC) : AD_1 = (BE_1 - CE_1) : BD_1 = BC : BD_1 = \text{const.}$$

## § 2.

Werden zwei Kreise von einem dritten gleichartig (beide von aussen oder beide von innen) berührt, so schneiden sich die Linien, welche die Berührungspunkte beider Kreise und des Berührungskreises mit den Berührungspunkten einer äusseren gemeinschaftlichen Tangente beider Kreise verbinden, auf dem Berührungskreis, so dass dieser Schnittpunkt $K$ ein Punkt gleicher Potenzen für beide Kreise ist und die Linie, welche diesen Punkt $K$ mit einem Schnittpunkt der äusseren gemeinschaftlichen Tangente beider Kreise und des Berührungskreises verbindet, gleich der Potenz dieses Punktes $K$ in Bezug auf einen der beiden Kreise ist.

Sind nämlich $M_1$ und $M_2$ die Centra der beiden Kreise (Fig. 2 und 3), $Q$ und $S$ die Berührungspunkte der äusseren gemeinschaftlichen Tangente, $R$ und $R_1$ die Berührungspunkte der beiden Kreise mit dem dritten, und schneidet die äussere gemeinschaftliche Tangente den dritten Kreis in $A$ und $B$, dann gilt:

Thes. I. $RQ$ und $R_1S$ schneiden sich in $K$ auf dem dritten Kreis.

II. $KA^2 = KQ.KR = KS.KR_1 = KB^2$.

Bew. $RR_1$ schneide den ersten Kreis in $E$ und den zweiten in $F$; dann ist, da $R$ und $R_1$ mit dem äusseren Aehnlichkeitspunkte $P$ beider Kreise in gerader Linie liegen, $M_2R_1$ parallel $M_1E$ und $M_2F$ parallel $M_1R$; ferner $R_1S$ parallel $EQ$ und $FS$ parallel $RQ$; daher Wkl. $RKR_1 = RQE = \frac{1}{2}RM_1E = \frac{1}{2}RMR_1$, da sich $RM_1$ und $R_1M_2$ im Centrum $M$ des Berührungskreises schneiden; da also $RKR_1$

gleich der Hälfte des Centriwinkels $RMR_1$ ist, liegt $K$ auf dem Berührungskreis. Dann sind aber die beiden gleichschenkligen Dreiecke $RQM_1$ und $RKM$ ähnlich, daher ist $MK$ parallel $M_1Q$; zieht man nun durch $K$ eine Parallele zu $QS$, welche die verlängerte $RR_1$ in $O$ schneidet, so ist $MK$ senkrecht auf $KO$, mithin $KO$ eine Tangente. Legt man ferner aus $O$ die zweite Tangente an den Kreis, deren Berührungspunkt $K_1$ sein möge, und schneidet $KK_1$ die $RR_1$ in $G$ und die Tangente $QS$ in $H$, so ist $KK_1$ die Polare von $O$ und die vier Punkte $RR_1GO$ liegen harmonisch; es ist also $K(RR_1GO)$ ein harmonisches Büschel und da $QS$ parallel $KO$ ist, muss $QH = HS$ sein. Ferner ist in ähnlichen Dreiecken:

$$RP : RO = RQ : RK = RM_1 : RM$$

also $PM_1$ parallel $OM$ und folglich, da die Polare $KK_1$ senkrecht auf $MO$, auch $KK_1$ senkrecht auf $PM_1$; da also $KK_1$ senkrecht auf der Centrale $M_1M_2$ steht und die gemeinschaftliche Tangente $QS$ halbirt, erkennt man, dass $KK_1$ mit der Radicalaxe beider Kreise zusammenfällt. Analog folgt dann weiter, dass auch $RK_1$ und $R_1K_1$ durch die Berührungspunkte der zweiten gemeinschaftlichen Tangente $PB_1A_1$ gehen müssen und $OK_1$ parallel $A_1B_1$ ist. Da nun $KO$ parallel $AB$ und $K_1O$ parallel $A_1B_1$, so sind $K$ und $K_1$ die Halbirungspunkte der Bögen $AB$ und $A_1B_1$, daher sind auch die Sehnen $KA = KB$ und $K_1A_1 = K_1B_1$.

Ferner ist Wkl. $JKA = KRA = KBA = KAB$; also Wkl. $KAQ = KRA$; ausserdem Wkl. $AKQ = AKR$; daher Dreieck $AKQ$ ähnlich $AKR$, folglich: $KQ : AK = AK : KR$ oder $KA^2 = KQ . KR$; daher ist $KA$ gleich der aus $K$ an den um $M_1$ beschriebenen Kreis gelegten Tangente; da aber $K$ ein Punkt gleicher Potenzen für beide Kreise ist, erkennt man, dass ein mit dem Radius $KA$ um $K$ beschriebener Kreis beide Kreise rechtwinklig schneiden muss; ebenso schneidet ein mit $K_1A_1$ um $K_1$ beschriebener Kreis beide Kreise rechtwinklig; die beiden um $K$ und $K_1$ beschriebenen Kreise schneiden sich folglich auf $M_1M_2$ in den beiden Grenzpunkten eines Systems von Kreisen, deren Centra auf $M_1M_2$ liegen und welche $KK_1$ als gemeinschaftliche Radicalaxe besitzen.

## § 3.

Werden zwei Kreise von einem dritten ungleichartig (der eine von aussen, der andere von innen) berührt, so gilt ein Satz, welcher aus dem in § 2. gegebenen dadurch hervorgeht, dass man den äusseren Aehnlichkeitspunkt beider Kreise mit dem inneren und die äusseren gemeinschaftlichen Tangenten mit den inneren vertauscht.

Beweis bei gleicher Bezeichnung fast wörtlich wie § 2. (Fig. 4).

§ 4.

Werden zwei Kreise von einem dritten gleichartig (beide von aussen oder beide von innen) berührt, dann sind die Verbindungslinien der einander entsprechenden Punkte, in welchen die inneren gemeinschaftlichen Tangenten beider Kreise von dem dritten Kreise geschnitten werden, den äusseren gemeinschaftlichen Tangenten parallel.

Construction: (Fig. 5.) $M_1$ und $M_2$ seien die Centra, $\alpha$, $\beta$, $\alpha_1$ und $\beta_1$ die Berührungspunkte der inneren gemeinschaftlichen Tangenten, $R$ und $R_1$ die Berührungspunkte des dritten Kreises, $\alpha_1\beta$ schneide den dritten Kreis in $A$ und $A_1$ und $\alpha\beta_1$ denselben in $B$ und $B_1$, endlich sei $K$ der Halbirungspunkt des Bogens $AB$, und die Verbindungslinien der Punkte $A$, $K$ und $B$ mit $R$ und $R_1$ mögen die beiden Kreise in den Punkten $D$, $Q$, $C$ und $F$, $S$, $E$ treffen, und $QS$ schneide $RR_1$ in $P$; dann gilt:

Thes. I. $QS$ ist eine äussere gemeinschaftliche Tangente;

II. $AB$ parallel $QS$ und $A_1B_1$ parallel $Q_1S_1$.

Bew. Nach dem Satze: „Die Verbindungslinien der Endpunkte zweier durch den Berührungspunkt zweier Kreise gelegten Sehnen sind einander parallel" ist zunächst sowohl $CQ$ als auch $ES$ parallel $AK$ und ebenso $QD$ parallel $SF$ parallel $BK$ und $CD$ parallel $EF$ parallel $AB$; die Dreiecke $CQD$ und $ESF$ sind daher ähnlich und in ähnlicher Lage, folglich sind die Radien nach entsprechenden Punkten parallel, z. B. $M_1Q$ parallel $M_2S$. Bestimmt man nun die Potenzen der Punkte $A$ und $B$ in Bezug auf beide Kreise, so findet man:

1) $$A\alpha_1 = \sqrt{AR_1 . AF}$$

2) $$A\beta = \sqrt{AR . AD}$$

3) $$B\alpha = \sqrt{BR . BC}$$

4) $$B\beta_1 = \sqrt{BR_1 . BE}$$

und, wenn man 2) von 1) und 4) von 3) abzieht und beachtet, dass $\alpha\beta_1 = \alpha_1\beta$ ist,

$$\sqrt{AR_1 . AF} - \sqrt{AR . AD} = \sqrt{BR . BC} - \sqrt{BR_1 . BE}$$

oder geordnet:

5) $$\sqrt{AR . AD} + \sqrt{BR . BC} = \sqrt{AR_1 . AF} + \sqrt{BR_1 . BE}.$$

Man hat aber weiter aus ähnlichen Dreiecken:

$$AD:KQ = AR:KR$$
$$BC:KQ = BR:KR$$
$$AF:KS = AR_1:KR_1$$
$$BE:KS = BR_1:KR_1$$

Berechnet man in diesen Proportionen die ersten Glieder und setzt die gefundenen Werte in 5) ein, so folgt:

$$6) \qquad AR\sqrt{\frac{KQ}{KR}} + BR\sqrt{\frac{KQ}{KR}} = AR_1\sqrt{\frac{KS}{KR_1}} + BR_1\sqrt{\frac{KS}{KR_1}}$$

Aus 6) folgt weiter:

$$\frac{AR+BR}{KR}\sqrt{KQ.KR} = \frac{AR_1+BR_1}{KR_1}\sqrt{KS.KR_1};$$

da aber nach § 1

$$\frac{AR+BR}{KR} = \frac{AR_1+BR_1}{KR_1} = \frac{AB}{AK}$$

ist, erkennt man, dass auch

$$7) \qquad KQ.KR = KS.KR_1$$

sein muss, mithin die Punkte $Q$, $S$, $R$ und $R_1$ auf einem Kreise liegen. Nun sind, wie oben gezeigt wurde, die Radien $M_1Q$ und $M_2S$ parallel, daher geht $QS$ durch den äusseren Aehnlichkeitspunkt beider Kreise; durch denselben Punkt geht aber auch $RR_1$; folglich ist $P$ der äussere Aehnlichkeitspunkt, und da $Q$, $S$, $R$ und $R_1$ auf einem Kreise liegen, ist

$$8) \qquad PQ.PS = PR.PR_1,$$

$Q$ und $S$ sind also potenzhaltige Punkte beider Kreise und da sie zu parallelen Radien gehören, ist $QS$ eine äussere gemeinschaftliche Tangente. Da endlich $Q$ den Bogen $CD$ halbirt, so ist

$QS$ parallel $CD$ parallel $AB$.

Genau auf dieselbe Weise zeigt man, dass die zweite Verbindungslinie $A_1B_1$ der zweiten äusseren Tangente parallel sein muss.

Bem. I. Im vorausgehenden ist der Beweis geführt für den Fall, in welchem $R$ und $R_1$ beide ausserhalb der Bögen $\alpha\beta$ und $\alpha_1\beta_1$ liegen. Rückt $R_1$ gegen $\beta_1$ hin, so nähern sich die Punkte $B$ und $B_1$ einander und wenn $R_1$ mit $\beta_1$ zusammenfällt, fallen auch $B$ und $B_1$ in diesem Punkte zusammen; kommt $R_1$ zwischen $\beta_1$ und $\alpha_1$ zu liegen, so vertauschen $B$ und $B_1$ ihre Lage und die Linien $AB$ und $A_1B_1$ kreuzen sich; bewegt sich nun auch $R$ über $\beta$ hinaus, so ver-

tauschen auch $A$ und $A_1$ ihre Lage, so dass dann $AB$ über $A_1B_1$ zu liegen kommt; immer aber bleibt $AB$ parallel $QS$ und $A_1B_1$ parallel $Q_1S_1$.

II. Die Halbirungspunkte $K$ und $K_1$ der Bögen $AB$ und $A_1B_1$ sind Punkte gleicher Potenzen in Bezug auf beide Kreise, daher ist $KK_1$ deren Radicalaxe; denn $KR.KQ = KR_1.KS$ und $K_1R.KQ_1 = K_1R_1.K_1S_1$. In dem vorstehenden Beweise ist zugleich ein zweiter Beweis für den in § 2. ausgesprochenen Satz enthalten.

III. Der Satz, dass die Linien $QR$ und $SR_1$ sich auf dem Berührungskreise schneiden müssen, führt zu einem specielleren Satze, wenn man statt des zweiten Kreises (um $M_2$) eine Gerade $L$ annimmt. Dann werden nämlich sowohl die beiden äusseren als auch die inneren gemeinschaftlichen Tangenten zu je einer Geraden, welche durch die Endpunkte eines zu $L$ senkrechten Durchmessers $QQ_1$ parallel mit $L$ gezogen werden; der Punkt $S$ fällt ins Unendliche und $R_1S$ fällt mit $L$ zusammen; der Punkt $K$ ist in diesem Falle also der Schnittpunkt von $QR$ mit $L$, und da $K$ auf dem Berührungskreise liegen muss, und der einzige Punkt von $L$, welcher diesem Kreise angehört, $R_1$ ist, erkennt man, dass $K$ mit $R_1$ zusammenfällt, mithin die Punkte $Q$, $R$ und $R_1$ in einer Geraden liegen. Man erhält also den bekannten Satz:

Werden ein Kreis K und eine Gerade L von einem zweiten Kreise berührt, so liegen die beiden Berührungspunkte und ein Endpunkt eines zu L senkrechten Durchmessers von K in einer Geraden. (cf. Heiss, Lehrb. der Geom. 1. Teil, XIV. 2).

## § 5.

Werden zwei Kreise von einem dritten ungleichartig (der eine von aussen, der andere von innen) berührt, dann sind die Verbindungslinien der entsprechenden Punkte, in welchen die äusseren gemeinschaftlichen Tangenten den Berührungskreis schneiden, den inneren gemeinschaftlichen Tangenten parallel und die Halbirungspunkte der zu diesen Verbindungslinien als Sehnen gehörigen Bogen des Berührungskreises sind Punkte gleicher Potenzen in Bezug auf beide Kreise. Bei analoger Bezeichnung wie in § 4. ist:

Thes. I. (Fig. 6.) $AB$ parallel $QS$ und II. $KR.KQ = KR_1.KS$.

Bew. Es gelten hier ganz ähnliche Schlüsse wie in § 4; nur lautet die 5) hier:

$$-\sqrt{AR.AD} + \sqrt{BR.BE} = \sqrt{AR_1.AF} + \sqrt{BR_1.BE}$$

folglich die 6):

$$-AR\sqrt{\frac{KQ}{KR}}+BR\sqrt{\frac{KQ}{KR}} = AR_1\sqrt{\frac{KS}{KR_1}}+BR_1\sqrt{\frac{KS}{KR_1}}$$

woraus sich dann

$$\frac{BR-AR}{KR}\sqrt{KQ.KR}=\frac{AR_1+BR_1}{KR_1}\sqrt{KS.KR_1}$$

ergibt; da aber nach § 1

$$\frac{BR-AR}{KR}=\frac{AB}{AK}=\frac{AR_1+BR_1}{KR_1}$$

ist, so folgt, dass auch hier die 7) und die 8) gelten, woraus sich dann wie in § 4. die Richtigkeit der Behauptung folgern lässt.

Bem. Da $K$ und $K_1$ die Halbirungspunkte der Bögen $AB$ und $A_1B_1$ sind, folgt, dass die in $K$ und $K_1$ an den Berührungskreis gelegten Tangenten den Linien $AB$ und $A_1B_1$, also auch den inneren gemeinschaftlichen Tangenten beider Kreise parallel sein müssen; der Schnittpunkt beider in $K$ und $K_1$ errichteter Tangenten liegt als Pol der Radicalaxe $KK_1$ in Bezug auf den Berührungskreis auf der Verlängerung von $RR_1$.

## § 6.

Der Kreis, welcher die drei einem Dreiecke $ABC$ anbeschriebenen Kreise ausschliessend berührt, geht durch die Halbirungspunkte der Seiten, die Fusspunkte der Höhen, die Halbirungspunkte der oberen Höhenabschnitte und berührt auch den dem Dreieck einbeschriebenen Kreis (Feuerbach'scher Kreis).

Construction. (Fig. 7). Es seien die Seiten des Dreiecks $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$; die Centra der die Seiten $a$, $b$, $c$ berührenden Kreise $M_1$, $M_2$, $M_3$; das Centrum des diese drei Kreise berührenden Kreises $M$; der Kreis um $M$ schneide die Seiten $BC$, $AC$, $AB$ in $D$, $E$; $D_1$, $E_1$; $D_2$, $E_2$ und die Linien $AE$, $BE_1$ und $CE_2$ in $T$, $T_1$, $T_2$; der Schnittpunkt von $AE$ und $BE_1$ sei $H$; endlich mögen die anbeschriebenen Kreise die Seiten $BC$, $AC$ und $AB$ der Reihe nach in den Punkten $\alpha$, $\alpha_1$, $\alpha_2$; $\beta$, $\beta_1$, $\beta_2$; $\gamma$, $\gamma_1$, $\gamma_2$ berühren; dann ist:

Thes. I. $BD=CD$; $AD_1=CD_1$; $AD_2=BD_2$;

II. $AE$ senkrecht auf $BC$; $BE_1$ senkrecht auf $AC$; $CE_2$ senkrecht auf $AB$;

III. $AT=TH$; $BT_1=T_1H$; $CT_2=T_2H$;

IV. Der Kreis um $M$ berührt den dem Dreieck $ABC$ einbeschriebenen Kreis.

Bew. I. Aus § 4. folgt unter Beachtung der dabei gemachten Bem. I. sofort, dass $D_1D_2$ parallel $BC$; $DD_2$ parallel $AC$ und $DD_1$ parallel $AB$ ist; dann müssen aber $D$, $D_1$ und $D_2$ die Halbirungspunkte der Seiten des Dreiecks sein, denn z. B. $BD = D_1D_2 = DC$ etc. Nun sind $A\alpha_1 = A\alpha_2 = B\beta = B\beta_2 = C\gamma = C\gamma_1 = \frac{1}{2}(a+b+c)$; daher ist $B\gamma = \frac{1}{2}(a+b+c) - a = \frac{1}{2}(b+c-a)$ und $C\beta = \frac{1}{2}(b+c-a) = B\gamma$; folglich ist $D\gamma = D\beta$ d. h. $D$ ist ein Punkt gleicher Potenzen in Bezug auf die um $M_2$ und $M_3$ beschriebenen Kreise. Man erkennt also, dass die Punkte $D, D_1, D_2$ mit den in § 2. und § 4. besprochenen Punkten $K$ zusammenfallen.

II. Ist $O$ der äussere Aehnlichkeitspunkt der um $M_2$ und $M_3$ beschriebenen Kreise, so ist, da $R_2$ und $R_3$ mit $O$ in gerader Linie liegen,

$$OD.OE = OR_2.OR_3 = O\beta.O\gamma.$$

Nun teilt $O$ die Strecke $BC$ äusserlich nach dem Verhältnis $c:b$; daraus folgt, wenn man $CO$ als Unbekannte betrachtet:

$$(CO+a) : CO = c : b$$

und

$$CO = \frac{ab}{c-b}$$

dann ist aber

$$DO = CO + \tfrac{1}{2}a = \frac{a(b+c)}{2(c-b)}$$

ferner

$$O\beta = OC - C\beta = \frac{ab}{c-b} - \tfrac{1}{2}(b+c-a) = \frac{(b+c)(a+b-c)}{2(c-b)}$$

und

$$O\gamma = OC + C\gamma = \frac{ab}{c-b} + \tfrac{1}{2}(a+b+c) = \frac{(b+c)(a-b+c)}{2(c-b)}$$

daher ist:

$$OE = \frac{O\beta.O\gamma}{OD} = \frac{1}{2a}\cdot\frac{b+c}{c-b}\cdot[a^2-(b-c)^2]$$

und endlich

$$CE = OE - OC = \frac{a^2+b^2-c^2}{2a}$$

folglich

$$BE = BC - CE = \frac{a^2-b^2+c^2}{2a}$$

daraus erhält man aber

$$BE^2 - CE^2 = (BE+CE)(BE-CE) = a.\frac{2(c^2-b^2)}{2a} = c^2-b^2$$

oder

$$BE^2 - CE^2 = AB^2 - AC^2$$

daher ist $AE$ senkrecht auf $BC$. Ganz analog zeigt man, dass auch $BE_1$ senkrecht auf $AC$ und $CE_2$ senkrecht auf $AB$ ist.

III. Da die Winkel $DET$ und $D_1E_1T_1$ Rechte sind, sind $DT$ und $D_1T_1$ Durchmesser des Berührungskreises; daher ist $DD_1TT_1$ ein Rechteck und $TT_1$ gleich und parallel $DD_1$; da aber $DD_1$ parallel $AB$ und $= \frac{1}{2}AB$, so ist auch $TT_1 = \frac{1}{2}AB$ und parallel $AB$; daher ist $AT = TH$ und $BT_1 = T_1H$ und ebenso findet man, dass $CT_2 = T_2H$. Da ferner die Höhen eines Dreiecks die Winkel des durch ihre Fusspunkte bestimmten Dreiecks halbiren, erkennt man, dass die Punkte $T$, $T_1$ und $T_2$ die Bögen $E_1E_2$, $E_2E$ und $EE_1$ halbiren. Die Dreiecke $TT_1T_2$ und $DD_1D_2$ sind congruent und $ABC$ ähnlich.

IV. Denkt man sich einen Kreis construirt, welcher zwei anbeschriebene Kreise des Dreiecks ausschliessend, den einbeschriebenen Kreis aber einschliessend berührt, so findet man wie in I. unter Anwendung von § 5, dass die Verbindungslinien der Schnittpunkte des Berührungskreises und der Dreiecksseiten letzteren parallel sein müssen, also mit $DD_1$, $D_1D_2$ und $D_2D$ zusammenfallen, dass also der Berührungskreis und der Feuerbach'sche identisch sind.

Bem. Wird der Feuerbach'sche Kreis von der Radicalaxe der um $M_2$ und $M_3$ beschriebenen Kreise ausser in $D$ noch in $K$ geschnitten, so liegt $K$ nach § 2. mit $R_2$ und $\beta$ und ebenso mit $R_3$ und $\gamma$ auf je einer Geraden und es ist

$$KD^2 = KR_3 . K\gamma = KR_2 . K\beta = KE^2.$$

Ein mit $KD$ um $K$ beschriebener Kreis geht also durch $E$ und schneidet beide um $M_2$ und $M_3$ beschriebene Kreise rechtwinklig. Ebenso schneidet ein mit $D\beta$ um $D$ beschriebener Kreis beide Kreise rechtwinklig und den um $K$ beschriebenen in zwei auf $M_2M_3$ liegenden Punkten. — Ist $N$ das Centrum des dem Dreieck $ABC$ umbeschriebenen Kreises und $S$ dessen Schwerpunkt, so erkennt man, da die Dreiecke $DD_1D_2$ und $ABC$ ähnlich und ähnlich liegend sind, dass $S$ der innere Aehnlichkeitspunkt derselben ist, folglich auf $MN$ liegt; da aber $N$ Höhenschnittpunkt des Dreiecks $DD_1D_2$ ist, liegt $S$ auch auf $NH$; daher liegen die Punkte $M$, $N$, $S$ und $H$ auf einer Geraden und da die Dimensionen des Dreiecks $DD_1D_2$ halb so gross sind als diejenigen des Dreiecks $ABC$, muss, wie sich aus der Aehnlichkeit der Dreiecke $ANS$ und $DMS$, ebenso der Dreiecke $NDS$ und $ASH$ ergibt, $NS = 2SM$; $SH = 2NS$ und $NM = MH$ sein. Endlich erkennt man noch, da $DT$ ein Durchmesser, also Dreieck $NDM$ gleich und ähnlich $MHT$, dass $ND = HT = AT$; man erhält also den Satz: Die Abstände des Centrums des dem Dreieck $ABC$ umbeschriebenen Kreises von den Seiten des Dreiecks sind gleich den Hälften der oberen Höhenabschnitte, welche zu diesen Seiten gehören. —

$$AT.AE = AD_2.AE_2 = \tfrac{1}{2}AB.AE_2$$
$$BT_1.BE_1 = BE_2.BD_2 = \tfrac{1}{2}AB.BE_2$$

durch Addition folgt:

$$AT.AE + BT_1.BE_1 = \tfrac{1}{2}AB^2$$

ebenso findet man:

$$BT_1.BE_1 + CT_2.CE_2 = \tfrac{1}{2}BC^2$$

und

$$CT_2.CE_2 + AT.AE = \tfrac{1}{2}AC^2$$

folglich ist auch:

$$AT.AE + BT_1.BE_1 + CT_2.CE_2 = \tfrac{1}{4}(AB^2 + BC^2 + CA^2).$$

§ 7.

Die Linien, welche die Ecken des Dreiecks $ABC$ mit den Berührungspunkten der anbeschriebenen Kreise und des Feuerbach'schen Kreises verbinden, schneiden sich in einem Punkt, welcher die Centrale des einbeschriebenen und des Feuerbach'schen Kreises nach dem Verhältnis der Radien letzterer Kreise teilt. — Verbindet man den Punkt $R$, in welchem der dem Dreieck einbeschriebene Kreis vom Feuerbach'schen Kreise berührt wird, mit den Berührungspunkten $R_1$, $R_2$ und $R_3$ des Feuerbach'schen und der anbeschriebenen Kreise, so gehen diese Linien durch je einen Fusspunkt der Winkelhalbirungslinien des Dreiecks.

Bew. I. Es sei $V$ das Centrum des einbeschriebenen Kreises und $U$ der innere Aehnlichkeitspunkt dieses und des Feuerbach'schen Kreises d. h. ein Punkt, welcher $VM$ innerlich nach dem Verhältnis der Radien dieser Kreise teilt; dann müssen $AR_1$, $BR_2$ und $CR_3$ durch $U$ gehen; denn z. B. $A$ ist äusserer Aehnlichkeitspunkt des inneren und des die Seite $BC$ von aussen berührenden Kreises; $R_1$ ist innerer Aehnlichkeitspunkt des letzteren und des Feuerbach'schen Kreises; daher liegen $A$, $R_1$ und $U$ auf einer Geraden; etc.

II. Die Fusspunkte der Winkelhalbirungslinien sind innere Aehnlichkeitspunkte des einbeschriebenen und der anbeschriebenen Kreise; $R_1$, $R_2$ und $R_3$ sind innere Aehnlichkeitspunkte der letzteren und des Feuerbach'schen Kreises; $R$ aber ist äusserer Aehnlichkeitspunkt des einbeschriebenen und des Feuerbach'schen Kreises; daher gehen $RR_1$, $RR_2$ und $RR_3$ durch je einen Fusspunkt der Winkelhalbirungslinien des Dreiecks.

Digitized by Google

§ 8.

Construirt man den Kreis, welcher die drei einem Dreieck $ABC$ anbeschriebenen Kreise einschliessend berührt, dann schneiden die Verbindungslinien zweier auf demselben Kreise liegenden Berührungspunkte der äusseren gemeinschaftlichen Tangenten je zweier Kreise die verlängerten Dreiecksseiten auf dem Berührungskreise, und diese sechs Punkte bestimmen zwei unter sich congruente und dem Dreieck $ABC$ ähnliche Dreiecke.

Construction (Fig. 8): $M_1$, $M_2$, $M_3$ seien wieder die Centra der dem Dreieck anbeschriebenen Kreise; ihre Berührungspunkte mit den Seiten $BC$, $AC$, $AB$ des Dreiecks der Reihe nach $\alpha$, $\alpha_1$, $\alpha_2$; $\beta$, $\beta_1$, $\beta_2$; $\gamma$, $\gamma_1$, $\gamma_2$; die zweiten äusseren gemeinschaftlichen Tangenten mögen den ersten Kreis in den Punkten $P$, $Q$, den zweiten in $P_1$, $Q_1$ und den dritten in $P_2$, $Q_2$ berühren; die Berührungspunkte des die drei Kreise einschliessend berührenden Kreises seien $R_1$, $R_2$ und $R_3$, und dessen Schnittpunkte mit den verlängerten Dreiecksseiten $BC$, $AC$, $AB$ seien $D$ und $E$; $D_1$ und $E_1$; $D_2$ und $E_2$; dann gilt:

Thes. I. $P_2Q_2$ geht durch $D$ und $E_1$; $P_1Q_1$ durch $D_2$ und $E$; $PQ$ durch $D_1$ und $E_2$.

II. Dreieck $DD_1D_2$ gleich und ähnlich $E_2EE_1$ ähnlich $ABC$.

Bew. I. Die Linien $Q_1P_2$, $Q_2P$ und $QP_1$ mögen die Seiten $BC$, $AC$, $AB$ des Dreiecks in den Punkten $Q_1$ (äusserer Aehnlichkeitspunkt des 2. und 3. Kreises), $B_1C_1$; $A_2O_2C_2$ und $A_3B_3O_3$ schneiden, und die Seiten des Dreiecks $BC$, $AC$ und $AB$ seien resp. mit $a$, $b$, $c$ bezeichnet; dann hat man zunächst: $AC_1 = AC = A_3C = b$; $AB_1 = AB = A_2B = c$ und $BC_2 = BC = B_3C = a$; daher sind die Dreiecke $AB_1C_1$, $A_2BC_2$ und $A_3B_3C$ dem Dreieck $ABC$ congruent, folglich $B_1C_1 = BC = a$; $A_2C_2 = AC = b$ und $A_3B_3 = AB = c$; weiter hat man $C_1P_2 = C\gamma = Q_2C_2 = A_2P = QA_3 = B_3P_1 = Q_1B_1 = \frac{1}{2}(a+b+c)$; folglich sind die Vierecke $C_1P_2Q_2C_2$, $A_2PQA_3$ und $B_3P_1Q_1B_1$ gleichschenklige Trapeze, also $PQ$ parallel $BC$; $P_1Q_1$ parallel $AC$; $P_2Q_2$ parallel $AB$. Aber nach § 4. ist auch $DE_1$ parallel $AB$; $DE_2$ parallel $A_2C_2$; ... $E_1D_2$ parallel $B_1C_1$. Angenommen nun $DE$ schneide $P_2Q_1$ in $X$, und $ED_2$ schneide $P_2Q_1$ in $Y$, und es sei $C_1X = C_1P \pm \lambda$; dann muss wegen $C_1X = E_1D_2 = B_1Y$ auch $B_1Y = C_1P_2 \pm \lambda$ sein; nun sind aber die Dreiecke $O_1XD$ und $O_1EY$ ähnlich; daher ist:

$$O_1X.O_1Y = O_1D.O_1E = O_1R_3.O_1R_2 = O_1P_2.O_1Q_1$$

oder

$$(O_1P_2 \pm \lambda)(O_1Q_1 \mp \lambda) = O_1P_2.O_1Q_1$$

woraus

$$\lambda^2 = \pm\lambda(O_1Q_1 - O_1P_2) = \mp\lambda.P_2Q_1$$

folgt; dieser Bedingung wird genügt durch $\lambda = 0$ oder $\lambda = \mp P_2Q_1$; letztere Auflösung ist aber unzulässig, weil sie $X$ an die Stelle von $Q_1$ und $Y$ an diejenige von $P_2$ bringt, was wegen $DE_1$ parallel $AB$ und $ED_2$ parallel $AC$ nicht möglich ist; daher fällt $X$ mit $P_2$ und $Y$ mit $Q_1$ zusammen; da aber weiter $P_2Q_2$ parallel $AB$ parallel $DE_1$ ist, muss $DE_1$ auch durch $Q_2$ gehen etc.

II. Nach § 4. ist $DE_2$ parallel $PQ_2$; $E_2D_1$ parallel $BC$; $D_1E$ parallel $P_1Q$; $ED_2$ parallel $AC$; $D_2E_1$ parallel $P_2Q_1$ und $E_1D$ parallel $AB$; daher ist Wkl. $DE_1D_2 =$ Wkl. $A = DD_2D_1$ etc. Wkl. $D_2E_2D_1 =$ Wkl. $B = D_2DD_1$; daher ist Dreieck $DD_1D_2$ ähnlich $ABC$; aber in den gleichschenkligen Trapezen $DE_2D_1E$ etc. ist $E_2E = DD_1$; $EE_1 = D_1D_2$ und $E_1E_2 = D_2D$, also Dreieck $E_2EE_1$ gleich und ähnlich $DD_1D_2$. —

Bem. Nach dem voransgehenden ist es nun leicht, die Dimensionen der an der Fig. 8. vorkommenden Linien anzugeben. Man hat nämlich:

$$DE_2 = D_1E = D_2E_1 = C_1P_2 = \tfrac{1}{2}(a+b+c);$$

ferner, da $Q_2A_2 = Q_2C_2 - A_2C_2 = \frac{1}{2}(a+b+c) - b = \frac{1}{2}(a-b+c)$ und Dreieck $Q_2A_2D$ ähnlich $BA_2C_2$ ist,

$$DA_2 : Q_2A_2 = BA_2 : A_2C_2 \quad \text{oder} \quad DA_2 = \frac{c(a-b+c)}{2b}$$

und

$$DQ_2 : Q_2A_2 = BC_2 : A_2C_2 \quad \text{oder} \quad DQ_2 = \frac{a(a-b+c)}{2b}$$

und

$$BD = DA_2 + BA_2 = \frac{c(a-b+c)}{2b} + c = \frac{c(a+b+c)}{2b}$$

und endlich

$$D_1E_2 : BC = (AB + BE_2) : AB;$$

oder da $BE_2 : DE_2 = BC_2 : A_2C$, daher $BE_2 = \dfrac{a(a+b+c)}{2b}$ ist,

$$D_1E_2 = a + \frac{a^2(a+b+c)}{2bc}.$$

Ganz analog findet man:

$$CD_1 = \frac{a(a+b+c)}{2c}; \quad CE = \frac{b(a+b+c)}{2c}; \quad ED_2 = b + \frac{b^2(a+b+c)}{2ac}$$

und

$$AD_2 = \frac{b(a+b+c)}{2a}; \quad AE_1 = \frac{c(a+b+c)}{2a}; \quad DE_1 = c + \frac{c^2(a+b+c)}{2ab}.$$

Aus diesen Werten ergehen sich noch die interessanten Beziehungen:

$$BD.EC = BE_2.AD_2 = CD_1.AE_1 = \left(\frac{a+b+c}{2}\right)^2$$

und

$$E_2D_1 + ED_2 + E_1D = \frac{(a+b+c)(a^3+b^3+c^3+2abc)}{2abc}.$$

Dagegen lassen sich die Dreiecksseiten $DD_1$, $D_1D_2$ und $D_2D$ nicht rational durch $a$, $b$, $c$ ausdrücken.

§ 9.

Die Linien, welche die Ecken des Dreiecks $ABC$ mit den gegenüberliegenden Kreisherührungspunkten $R_1$, $R_2$, $R_3$ (§ 8.) verbinden, schneiden sich in einem Punkte, nämlich in dem äusseren Aehnlichkeitspunkt des Berührungskreises $R_1R_2R_3$ und des dem Dreieck $ABC$ einbeschriebenen Kreises. — Die Linien, welche die Punkte $R_1$, $R_2$, $R_3$ mit den Fusspunkten der Winkelhalbirungslinien des Dreiecks verbinden, schneiden sich ebenfalls in einem Punkte, nämlich in dem inneren Aehnlichkeitspunkt des Berührungskreises $R_1R_2R_3$ und des dem Dreieck einbeschriebenen Kreises.

Beweis wie in § 7.

§ 10.

Construirt man die drei Kreise, welche die drei dem Dreieck $ABC$ anbeschriebenen Kreise ungleichartig berühren und zwar je zwei derselben ausschliessend, den dritten einschliessend, so schneiden sich diese drei Berührungskreise im Radicalpunkt der drei anbeschriebenen Kreise.

Bew. Nach § 3. schneiden sich je zwei Linien, welche die Kreisherührungspunkte mit den Berührungspunkten der inneren gemeinschaftlichen Tangenten verbinden, auf dem Berührungskreise. Nun sind aber die inneren gemeinschaftlichen Tangenten (nämlich die Dreiecksseiten) zugleich die inneren Aehnlichkeitsaxen der drei anbeschriebenen Kreise und ihre Berührungspunkte mit diesen Kreisen ihre Pole in Bezug auf diese Kreise; die Verbindungslinien dieser Pole und der Kreisherührungspunkte gehen aber alle durch den Radicalpunkt der drei Kreise; folglich gehen auch die drei Berührungskreise durch diesen Punkt.

Bem. Der Kreis, welcher den an $BC$ liegenden einschliessend, die beiden anderen ausschliessend berührt, schneide $BC$ in den Punk-

ten $D$ und $E$; dann ist, da der in § 2. besprochene Punkt $K_1$ in diesem Falle mit dem Radicalpunkt $\Omega$ der drei Kreise zusammenfällt, $\Omega D = \Omega E$ und ein um $\Omega$ mit $\Omega D$ als Radius beschriebener Kreis schneidet die an $AC$ und $AB$ liegenden Kreise, folglich auch, da $\Omega$ der Radicalpunkt ist, den an $BC$ liegenden rechtwinklig; auf gleiche Weise erkennt man, dass der Orthogonalkreis, dessen Centrum $\Omega$ ist, die beiden anderen Berührungskreise auf den Linien $AC$ und $AB$ schneidet.

§ 11.

Aus dem Vorausgehenden ergeben sich einfache Constructionen der betrachteten Berührungskreise:

I. Der die drei dem Dreieck anbeschriebenen Kreise ausschliessend berührende ist der Feuerbach'sche d. h. durch die Seitenhalbirungspunkte gelegte Kreis.

II. Der die drei Kreise einschliessend berührende Kreis wird gefunden, indem man die Linien $PQ$, $P_1Q_1$ und $P_2Q_2$ (Fig. 8.) bis zum Schnitt mit den Dreiecksseiten verlängert und durch drei der gefundenen Punkte einen Kreis legt.

III. Die drei Kreise, welche je zwei anbeschriebene Kreise ausschliessend, den dritten einschliessend berühren, werden gefunden, indem man den Radicalpunkt der drei anbeschriebenen Kreise mit entsprechenden Berührungspunkten der Kreise und der Dreiecksseiten verbindet; die Schnittpunkte dieser Linien und der Kreise liefern die drei Berührungspunkte des gesuchten Kreises.

IV. Die übrigen drei im allgemeinen Apollonischen Tactionsproblem vorkommenden Kreise sind hier Kreise von unendlich grossem Radius und fallen mit den Dreiecksseiten zusammen.

Zweibrücken, im August 1880.

# XVII.

# Ueber das Rollen eines seiner Schwere überlassenen Körpers auf horizontaler Ebene.

Von

**R. Hoppe.**

---

Es soll die Bewegung eines Körpers bestimmt werden, auf den allein seine Schwere wirkt, und der beständig eine horizontale Ebene in einem Punkte berührt ohne daran zu gleiten.

Die analytische Behandlung der Aufgabe macht keinen Unterschied, ob die Oberfläche des Körpers positiv oder negativ gekrümmt ist. Nur möchte der Fall einer negativ gekrümmten schwerlich zu realisiren sein, weil die von einer solchen beständig geschnittene Grundebene durch keine Oberfläche eines festen Körpers dargestellt werden kann.

Was die ausgeschlossenen Fälle betrifft, so kann eine Fläche, welche die Grundebene in einer Linie berührt, nur dann ohne Gleitung auf ihr rollen, wenn sie abwickelbar ist; denn indem sie rollt, wickelt sie sich auf ihr ab. Die Rechnung wird aber ergeben, dass eine abwickelbare Oberfläche einen Ausnahmefall bildet; daher mag die Bewegung einer solchen einer besondern Behandlung vorbehalten bleiben.

Die hier betrachtete Bewegung besteht, wie in T. LX. p. 159 erörtert, aus zwei Elementarbewegungen. Die Fläche berühre die Grundebene zur Zeit $t$ in $P$. Nach Verlauf der Zeit $\partial t$ gelangt der benachbarte Oberflächenpunkt $P'$ zur Berührung im Grundebenen-

punkte $P''$. Der Weg $P'P''$ kann eine beliebige Neigung gegen die Grundebene haben. Ist, zur Zeit $t$, $P''$ die Projection des Oberflächenpunktes $P_0$, so kann man der Bewegung folgende snbstitniren. Durch Rotation des Körpers nm seine Normale auf den Winkel $\partial\varphi$ beschreibt $P'$ erst den Weg

$$P'P_0 = PP'\partial\varphi$$

durch nachfolgendes Rollen senkt er sich vertical von $P_0$ auf $P''$. Beide Wege sind unendlich klein 2. Ordnnng. Beim Rollen steigt $P$ vertical auf in der Tangente an seine actuelle Bahn. Daher resnltirt aus der Snbstitntion eine Verrücknng seiner schliesslichen Lage, die aber als Unendlichkleine höherer Ordnnng verschwindet. Durch beide Punkte ist die Lage des Körpers bestimmt; folglich ist die Snbstitution von keiner Abänderung der Bewegung begleitet: letztere lässt sich demnach zerlegen in eine Rotation nm die Normale nud in eine eigentliche Rollbewegnng.

## §. 1. Allgemeine Differentialgleichnngen der Bewegnng.

Die rechtwinkligen Coordinatensysteme $xyz$ und $x_1y_1z_1$ mögen sich anf Axen beziehen, die am bewegten Körper fest sind, nnd sei $(xyz)$ der Berührnugspunkt, $(x_1y_1z_1)$ bestimme die Lage des Massenelements $\partial m$.

Die Systeme $x_2y_2z_2$ nnd $x_3y_3z_3$ sollen dieselben Pnnkte bestimmen bezüglich auf denselben Anfangspnnkt nud auf Axen in den Richtungen zweier Tangenten nnd der Normale im Berührungspnnkt. Sind deren Richtungscosinns in Bezug anf die Körperaxen $p_1q_1r_1$, $p_2q_2r_2$ nnd $pqr$, so ist

$$\left.\begin{array}{ll} x_2 = p_1x + q_1y + r_1z & x_3 = p_1x_1 + q_1y_1 + r_1z_1 \\ y_2 = p_2x + q_2y + r_2z & y_3 = p_2x_1 + q_2y_1 + r_2z_1 \\ z_2 = px + qy + rz & z_3 = px_1 + qy_1 + rz_1 \end{array}\right\} \quad (1)$$

und

$$x_6 = x_3 - x_2, \quad y_6 = y_3 - y_2, \quad z_6 = z_3 - z_2 \quad (2)$$

sind dann die Coordinaten von $\partial m$ in Bezng anf die 2 Tangenten nud die Normale selbst.

Ferner seien $x_4$, $y_4$, $z_4 = 0$ nnd $x_5$, $y_5$, $z_5$ die Coordinaten des Berührungspnnkts und des Massenelements in Bezug anf 2 feste Axen in der Grnndebene nnd auf die Verticale, positiv nach oben; nnd $\varphi$ bezeichne den Winkel zwischen der $x_4$ nnd $x_6$ Axe so, so dass eine

Digitized by Google

Variation von $\varphi$ allein eine Rotation des Körpers um die Verticale im Berührungspunkt darstellt. Dann hat man die Relationen:

$$\left.\begin{aligned} x_5 - x_4 &= x_6 \cos\varphi - y_6 \sin\varphi \\ y_5 - y_4 &= x_6 \sin\varphi + y_6 \cos\varphi \\ z_5 &= z_6 \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Zur Bestimmung von $x_4$, $y_4$ wenden wir die Gl. (3) auf den benachbarten Flächenpunkt $P'$ mit den Coordinaten

$$x_1 = x + \partial x, \qquad x_1 = y + \partial y, \qquad z_1 + \partial z$$

an. Da dieser vom consecutiven Berührungspunkt $P''$, wie oben gezeigt, nur in 2. Ordnung absteht, so wird

$$x_5 = x_4 + \partial x_4, \qquad y_5 = y_4 + \partial y_4$$

und man hat nach (3) mit Reduction von $x_6$, $y_6$:

$$\left.\begin{aligned} \partial x_4 &= (p_1 \partial x + q_1 \partial y + r_1 \partial z)\cos\varphi - (p_2 \partial x + q_2 \partial y + r_2 \partial z)\sin\varphi \\ \partial y_4 &= (p_1 \partial x + q_1 \partial y + r_1 \partial z)\sin\varphi + (p_2 \partial x + q_2 \partial y + r_2 \partial z)\cos\varphi \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Differentiirt man jetzt die Gl. (3) und addirt die Werte von $\partial x_4$, $\partial y_4$, so kommt:

$$\left.\begin{aligned} \partial x_5 &= \partial M \cos\varphi - \partial N \sin\varphi \\ \partial y_5 &= \partial M \sin\varphi + \partial N \cos\varphi \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

wo

$$\left.\begin{aligned} \partial M &= (x_1 - x)\partial p_1 + (y_1 - y)\partial q_1 + (z_1 - z)\partial r_1 - y_6 \partial\varphi \\ \partial N &= (x_1 - x)\partial p_2 + (y_1 - y)\partial q_2 + (z_1 - z)\partial r_2 + x_6 \partial\varphi \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

gesetzt ist, und wegen $p\partial x + q\partial y + r\partial z = 0$ sich hinzufügen lässt:

$$\partial z_5 = (x_1 - x)\partial p + (y_1 - y)\partial q + (z_1 - z)\partial r \quad (7)$$

Diese Gleichungen gelten sowol für die actuellen Veränderungen in der Bewegung als auch für die willkürlichen Variationen, wo $\delta$ statt $\partial$ zu schreiben ist.

Bezeichnet der Accent die Differentialquotienten nach der Zeit, und $\gamma$ die Schwere der Masseneinheit, so ist nach dem Alembertschen Princip:

$$\int \{x_5''\delta x_5 + y_5''\delta y_5 + (z_5'' + \gamma)\delta z_5\}\partial m = 0$$

oder nach (5):

$$\int \{(M'' + N'\varphi')\delta M + (N'' - M'\varphi')\delta N + (z_5'' + \gamma)\partial z_5\}\partial m = 0 \quad (8)$$

Ebenso reducirt sich die Gleichung der lebendigen Kraft

$$\int (x_5'^2 + y_5'^2 + z_5'^2 + 2\gamma z_5)\partial m = \text{const.}$$

auf

$$\int (M'^2 + N'^2 + z_5'^2 + 2\gamma z_5)\partial m = \text{const.} \tag{9}$$

Die Variationen der 9 Richtungscosinus lassen sich bekanntlich durch folgende Substitutionen auf drei zurückführen:

$$\left.\begin{array}{lll} \delta p_1 = p_2\delta R - p\delta Q; & \delta q_1 = q_2\partial R - q\delta Q; & \delta r_1 = r_2\delta R - r\delta Q \\ \delta p_2 = p\delta P - p_1\delta R; & \delta q_2 = q\delta P - q_1\delta R; & \delta r_2 = r\delta P - r_1\delta R \\ \delta p = p_1\delta Q - p_2\delta P; & \delta q = q_1\delta Q - q_2\delta P; & \delta r = r_1\delta Q - r_2\delta P \end{array}\right\} \tag{10}$$

Infolge dessen gehen die Gl. (6) (7) über in

$$\left.\begin{array}{l} \delta M = y_6\delta(R-\varphi) - z_6\delta Q \\ \partial N = z_6\delta P - x_6\delta(R-\varphi) \\ \delta z_5 = x_6\delta Q - y_6\delta P \end{array}\right\} \tag{11}$$

Nachdem so $\delta R$ mit $\delta\varphi$ verschmolzen ist, kann man im allgemeinen $\delta P$, $\delta Q$, $\delta(R-\varphi)$ als unabhängig willkürlich betrachten, sofern überhaupt 3 unabhängige Variationen der Lage des Körpers möglich sind, Demnach zerfällt Gl. (8) in die 3 folgenden:

$$\left.\begin{array}{l} \int \{z_6(N'' + M'\varphi') - y_6(z_6'' + \gamma)\}\partial m = 0 \\ \int \{x_6(z_5'' + \gamma) - z_6(M'' - N'\varphi)\}\partial m = 0 \\ \int \{y_6(M' - N'\varphi') - x_6 N'' + M'\varphi')\}\partial m = 0 \end{array}\right\} \tag{12}$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\left.\begin{array}{l} U = p_1 x' + q_1 y' + r_1 z' \\ V = p_2 x' + q_2 y' + r_2 z' \end{array}\right\} \tag{13}$$

so ergiebt die Differentiation der Gl. (2) (1): gemäss den Formeln (10):

$$\left.\begin{array}{l} x_6' = y_6 R' - z_6 Q' - U \\ y_6' = z_6 P' - x_6 R' - V \\ z_6' = x_6 Q' - y_6 P' \end{array}\right\} \tag{14}$$

und gemäss diesen Formeln die Differentiation der Werte $M'$, $N'$, $z_5'$ aus (11):

$$\begin{aligned} M'' &= -x_6[R'(R-\varphi)' + Q'^2] + y_6[(R-\varphi)'' + P'Q'] \\ &\quad + z_6[-Q'' + P'(R-\varphi)'] - V(R-\varphi)' \\ N'' &= x_6[-(R-\varphi)'' + P'Q'] - y_4[R'(R-\varphi)' + P'^2] \\ &\quad + z_6[P'' + Q'(R-\varphi)'] + U(R-\varphi)' \\ z_5'' &= x_6(Q'' + P'R') + y_6(-P'' + Q'R') - z_6(P'^2 + Q'^2) \\ &\quad - UQ' + VP' \end{aligned}$$

woraus noch in Verbindung mit (11):

$$M''+N'\varphi' = -x_6[(R-\varphi)'^2+Q'^2]+y_6[(R-\varphi)''+P'Q'] \\ +z_6[-Q''+P'(R-2\varphi)']-V(R-\varphi)'$$

$$N''-M'\varphi' = x_6[-(R-\varphi)''+P'Q']-y_6[(R-\varphi)'^2+P'^2] \\ +z_6[P''+Q'(R-2\varphi)']+U(R-\varphi)$$

Zur Abkürzung sei

$$\lambda = \frac{1}{m}\int (y_6^2+z_6^2)\partial m; \quad \mu = \frac{1}{m}\int (z_6^2+x_6^2)\partial m;$$

$$\nu = \frac{1}{m}\int (x_6^2+y_6^2)\partial m$$

$$\pi = -\frac{1}{m}\int y_6 z_6 \partial m; \quad \varrho = -\frac{1}{m}\int z_6 x_6 \partial m; \quad \sigma = -\frac{1}{m}\int x_6 y_6 \partial m$$

Führt man die erhaltenen Werte in die Gl. (12) (9) ein, so kommt:

$$\lambda(P''-Q'\varphi')+(\mu-\nu)Q'(R-\varphi)'+\pi[(R-\varphi)'^2-Q'^2] \\ +\varrho[(R-\varphi)''-P'Q']+\sigma(Q''+P'R')+U_1 = 0 \tag{15}$$

$$\mu(Q''+P'\varphi')+(\nu-\lambda)P'(R-\varphi)'+\pi[(R-\varphi)''+P'Q'] \\ +\varrho[P'^2-R-\varphi)'^2]+\sigma(P''-Q'R')+V_1 = 0$$

$$\nu(R-\varphi)''+(\lambda-\mu)P'Q'+\pi[Q''-P'(R-2\varphi)'] \\ +\varrho[P''+Q'(R-2\varphi)']+\sigma(Q'^2-P'^2)+W_1 = 0$$

$$\lambda P'^2+\mu Q'^2+\nu(R-\varphi)'^2+2\pi Q'(R-\varphi)'+2\varrho P'(R-\varphi)' \\ +2\sigma P'Q'+2K = \text{const.}$$

wo

$$U_1 = \frac{1}{m}\int \{-y_6(VP'-UQ'+\gamma)+z_6 U(R-\varphi)'\}$$

$$V_1 = \frac{1}{m}\int \{z_6 V(R-\varphi)'+x_6(VP'-UQ'+\gamma)\}\partial m$$

$$W_1 = -\frac{1}{m}\int (x_6 U+y_6 V)(R-\varphi)'\partial m$$

$$K = \frac{\gamma}{m}\int z_6 \partial m$$

In diesen Gleichnngen ist die Wahl der Axensysteme der $x_1 y_1 z_1$ und $x_5 y_5$, sowie die Bestimmungsform der Oberfläche verbunden mit der Wahl der $x_6$, $y_6$ Axen zu freier Verfügung gelassen. Jetzt, wo die Werte der eingeführten Grössen entwickelt darzustellen sind, nehmen wir fürs erste die Hauptträgheitsaxen zu Axen der $x_1 y_1 z_1$ und setzen die Hauptträgheitsmomente

$$\int (y_1^2+z_1^2)\partial m = Am; \quad \int (z_1^2+x_1^2)\partial m = Bm; \quad \int (x_1^2+y_1^2)\partial m = Cm$$

Dann wird

$$\left.\begin{aligned}\lambda &= Ap_1^2 + Bq_1^2 + Cr_1^2 + y_2^2 + z_2^2\\ \mu &= Ap_2^2 + Bq_2^2 + Cr_2^2 + z_2^2 + x_2^2\\ \nu &= Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + x_2^2 + y_2^2\\ \pi &= App_2 + Bqq_2 + Crr_2 - y_2 z_2\\ \varrho &= App_1 + Bqq_1 + Crr_1 - z_2 x_2\\ \sigma &= Ap_1 p_2 + Bq_1 q_2 + Cr_1 r_2 - x_2 y_2\end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

$$\left.\begin{aligned}U_1 &= \quad y_2(VP' - UQ' + \gamma) - z_2 U(R-\varphi)'\\ V_1 &= -z_2 V(R-\varphi)' - x_2(VP' - UQ' + \gamma)\\ W_1 &= \quad (x_2 U + y_2 V)(R-\varphi)'\\ K &= -\gamma z_2\end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

Zur Bestimmung der Oberfläche seien $x$, $y$, $z$ als Functionen orthogonaler Parameter $u$, $v$ gegeben, und die Tangenten der Parameterlinien zu Axen der $x_6$, $y_6$ genommen. Das Quadrat des Linienelements sei

$$\partial s^2 = e\,\partial u^2 + g\,\partial v^2$$

Gemäss der Bezeichnung in meiner Flächentheorie wird ferner sein:

$$E = p\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \ldots; \quad F = p\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} + \ldots; \quad G = p\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + \ldots$$

dann folgt:

$$p_1 = \frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial x}{\partial u}; \text{ etc.} \qquad p_2 = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial x}{\partial v}; \text{ etc.}$$

$$\left.\begin{aligned}P' &= pp_2' + qq_2' + rr_2' = \frac{Fu' + Gv'}{\sqrt{g}}\\ Q' &= p_1 p' + q_1 q' + r_1 r' = -\frac{Eu' + Fv'}{\sqrt{e}}\\ R' &= p_2 p_1' + q_2 q_1' + r_2 r_1' = \frac{1}{2\sqrt{eg}}\left(\frac{\partial g}{\partial u}v' - \frac{\partial e}{\partial v}u'\right)\end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

Aus diesen Werten ersieht man, dass $\delta P$ und $\delta Q$ nicht unabhängig willkürlich sind, wenn

$$E : F = F : G$$

d. h. auf abwickelbaren Flächen. Hier also gelten die 2 ersten Gl. (15) nicht mehr einzeln, sondern statt ihrer eine einzige Gleichung, die durch Addition beider, jede mit einem Multiplicator genommen, hervorgeht.

Setzt man ferner den Radiusvector

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \varkappa$$

so wird

$$x_2 = \frac{\varkappa}{\sqrt{e}}\frac{\partial\varkappa}{\partial u}; \quad y_2 = \frac{\varkappa}{\sqrt{g}}\frac{\partial\varkappa}{\partial v}$$

$$U = \sqrt{e}.u'; \quad V = \sqrt{g}.v'$$

$$U_1 = \frac{\varkappa}{\sqrt{g}}\frac{\partial\varkappa}{\partial v}(Eu'^2+2Fu'v'+Gv'^2+\gamma)$$
$$+z_2u'\left\{\frac{1}{2\sqrt{g}}\left(\frac{\partial e}{\partial v}u'-\frac{\partial g}{\partial u}v'\right)+\sqrt{e}.\varphi'\right\}$$

$$V_1 = z_2v'\left\{\frac{1}{2\sqrt{e}}\left(\frac{\partial e}{\partial v}u'-\frac{\partial g}{\partial u}v'\right)+\sqrt{g}.\varphi'\right.$$
$$\left.-\frac{\varkappa}{\sqrt{e}}\frac{\partial\varkappa}{\partial u}(Eu'^2+2Fu'v'+Gv'^2+\gamma)\right\}$$

$$W_1 = \varkappa\varkappa'\left\{\frac{1}{2\sqrt{eg}}\left(\frac{\partial g}{\partial u}v'-\frac{\partial e}{\partial v}\right)-\varphi'\right\}$$

Bezeichnet $\frac{\partial\omega}{\partial\sigma}$ die Krümmung der Berührungscurve auf der Oberfläche, so ist

$$Eu'^2+2Fu'v'+Gv'^2 = \omega's'$$

Durch die Wahl des Parametersystems lässt sich noch manche Vereinfachung erreichen. Für orthogonal geodätische Systeme erhält man $e = 1$, und, wenn $h\,\partial u\,\partial v$ das Flächenelement bezeichnet, $g = h^2$. Hier wird

$$P' = \frac{Fu'+Gv'}{h}; \quad Q' = -(Eu'+Fv'); \quad R' = \frac{\partial h}{\partial u}v'$$

$$U_1 = \frac{\varkappa}{h}\frac{\partial\varkappa}{\partial v}(\omega's'+\gamma)-z_2u'\left(\frac{\partial h}{\partial u}v'-\varphi'\right)$$

$$V_1 = -\varkappa\frac{\partial\varkappa}{\partial u}(\omega's'+\gamma)-z_0hv'\left(\frac{\partial h}{\partial u}v'-\varphi'\right)$$

$$W_1 = \varkappa\varkappa'\left(\frac{\partial h}{\partial u}v'-\varphi'\right)$$

Die Form der Differentialgleichungen ist stets:

$$T_1u''+T_2v''+T_3\varphi''+T_4u'^2+T_5u'v'+T_1v'^2+(T_7u'+T_8v')\varphi'+T_9\varphi'^2$$
$$=\gamma T_{10}$$

In der Gleichung der lebendigen Kraft fallen die 3 ersten Terme weg. Ohne ihre Integration in Angriff zu nehmen, betrachten wir sie als Basis der Untersuchung mannichfaltiger Fragen, deren einige im folgenden behandelt werden sollen.

## §. 2. Ueber die Rotation nm die Normalo.

Vergleicht man 2 Bewegnngen desselben Körpers für dieselbe Rollcnrve auf der Oherfläche eine mit, eine ohne Rotation um die Normale, so werden die 2 Werte von $\partial\varphi$ in jedem Augenhlicke nm den Rotationswinkel von einander differiren. Daher ist $\partial\varphi$ ein Addend des Rotationswinkels ergänzt dnrch den Wert von $-\partial\varphi$ für Nnllrotation.

Nun ist

$$\partial R = p_2 \partial p_1 + \ldots = p_2(p_1 + \partial p_1) + \ldots$$

äer Cosinus des Winkels zwischen der alten $y_6$ Axe und der verdnderten $x_6$ Axe. Bei Nullrotation kann man für heide Axen ihro Projectionen auf die Grnndebene setzen. Dann wird jener Cosinus gleich dem Sinns des Winkels zwischen der alten nnd veränderten $x_6$ Axe, d. i. gleich dem Increment von $\varphi$, positiv oder negativ zu nehmen. Folglich ist der Rotationswinkel

$$= \partial(\varphi \pm R)$$

Ueber das Vorzeichen entscheidet ein specieller Fall. Ist dio Oberfläche ein Kegel

$$x = a \sin\alpha \cos\psi; \quad y = a \sin\alpha \sin\psi; \quad z = a \cos\alpha \quad (\alpha \text{ const.})$$

der sich auf der Ebene wälzt, nnd betrachtet mau den Kreis $a = \text{const.}$ als Berührungscurve, so findet offenhar keine Rotation um die Normale statt. Die Kegelseite $\psi = 0$ sei bei der Berührung $x_4$ Axe, die $\psi$ wachsen hei der Wälznng, so dass

$$s = a\psi \sin\alpha$$

die $x_4$ positiv von der Spitze nach dem Berührungspnnkt. Dann findet man:

$$\begin{aligned} p_1 &= \sin\alpha\cos\psi; & q_1 &= \sin\alpha\sin\psi; & r_1 &= \cos\alpha \\ p_2 &= -\sin\psi; & q_2 &= \cos\psi; & r_2 &= 0 \\ p &= -\cos\alpha\cos\psi; & q &= -\cos\alpha\sin\psi; & r &= \sin\alpha \end{aligned}$$

woraus:

$$\partial R = \partial\psi \sin\alpha; \quad \partial x_4 = -a\partial\psi \sin\alpha \sin\varphi = -a\partial R \sin\varphi$$

oder, da $\partial R = \mp \partial\varphi$,

$$\partial x_4 = \pm a \partial\varphi \sin\varphi; \qquad x_4 = \text{const.} \mp a\cos\varphi$$

Da aber, im Anfang dor $\varphi$, $x_4 = +a$ ist, so kann nur das untero Zeichen gelten, nnd man hat:

$\partial(R - \varphi) =$ [illegible]

Digitized by Google

Lässt man durch stetige Deformation den Kegel in eine beliebige Fläche übergehen, so kann das constante Verhältniss $\frac{\partial R}{\partial \varphi} = +1$ nicht in $-1$ übergehen, wenn nicht im ganzen Zeitraum der Bewegung $\partial \varphi = 0$ wird, d. i. für cylindrische Wälzung, die man bei der Deformation vermeiden kann. Folglich ist allgemein $\partial(R - \varphi) = 0$ die Bedingung, unter der keine Rotation um die Normale stattfindet, und $(R - \varphi)'$ der Ausdruck der Rotationsgeschwindigkeit.

Soll eine Bewegung ohne Rotation stattfinden, so müssen $u$, $v$ die 3 folgenden aus (15) für $\varphi' = R'$ hervorgehenden Gleichungen erfüllen:

$$\left.\begin{aligned} &\lambda(P'' - Q'R') + \sigma(Q'' + P'R') - \varrho P'Q' - \pi Q'^2 + Wy_2 = 0 \\ &\sigma(P'' - Q'R') + \mu(Q'' + P'R') + \varrho P'^2 + \pi P'Q' - Wx_2 = 0 \\ &\varrho(P'' - Q'R') + \pi(Q'' + P'R') - \sigma P'^2 + (\lambda - \mu)P'Q' + \sigma Q'^2 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

wo

$$W = VP' - UQ' + \gamma = \sqrt{g}\,P'v' - \sqrt{e}\,Q'u' + \gamma$$

gesetzt ist. Aus (18) ergieht sich:

$$u' = -\frac{\sqrt{g}FP' + \sqrt{e}GQ'}{H}; \qquad v' = \frac{\sqrt{g}EP' + \sqrt{e}FQ'}{H}$$

hiernach wird

$$W = \frac{gEP'^2 + 2hFP'Q' + eGQ'^2}{H} + \gamma \tag{20}$$

wo zur Abkürzung

$$H = EG - F^2$$

gesetzt ist. Eliminirt man $P''$ und $Q''$ zwischen den Gl. (19), so erhält man:

$$\begin{vmatrix} \lambda & \sigma & -\varrho P'Q' - \pi Q'^2 + y_2 W \\ \sigma & \mu & \varrho P'^2 + \pi P'Q' - x_2 W \\ \varrho & \pi & -\sigma P'^2 + (\lambda - \mu)P'Q' + \sigma Q'^2 \end{vmatrix} = 0 \tag{21}$$

eine Gleichung von der Form:

$$\lambda_1 P'^2 + 2\sigma_1 P'Q' + \mu_1 Q'^2 = 2\gamma K_1$$

von derselben wie dio der lebendigen Kraft:

$$\lambda P'^2 + 2\sigma P'Q' + \mu Q'^2 = 2\gamma K \tag{22}$$

Setzt man

$$Q' = \varkappa P'$$

und eliminirt $P'$, so kommt:

$$\begin{vmatrix} K_1 & \lambda_1 \\ K & \lambda \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} K_1 & \sigma_1 \\ K & \sigma \end{vmatrix} \varkappa + \begin{vmatrix} K_1 & \mu_1 \\ K & \mu \end{vmatrix} \varkappa^2 = 0 \tag{23}$$

Seien, nm eine zweite Gleichung für $\varkappa$ zn erhalten, die Unterdeterminanten zn

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda & \sigma & \varrho \\ \sigma & \mu & \pi \\ \varrho & \pi & \nu \end{vmatrix}$$

mit dem Index 2 am entsprechenden Elemente bezeichnet, und zur Abkürzung

$$\delta_1 = \frac{gE}{H}; \quad \delta_2 = \frac{hF}{H}; \quad \delta_3 = \frac{eG}{H}$$

gesetzt, so dass

$$\lambda_1 = \varrho_2\delta_1 y_2 + \pi_2(\varrho - \delta_1 x_2) - \nu_2\sigma$$
$$\sigma_1 = \varrho_2(-\tfrac{1}{2}\varrho + \delta_2 y_2) + \pi_2(\tfrac{1}{2}\pi - \delta_2 x_2) + \tfrac{1}{2}\nu_2(\lambda - \mu)$$
$$\mu_1 = \varrho_2(-\pi + \delta_3 y_2) - \pi_2\delta_3 x_2 + \nu_2\sigma$$

wird. Die Differentiatîon der Gl. (16) ergiebt die Formeln:

$$\lambda' = 2(\sigma R' - \varrho Q + V y_2) \qquad \pi' = (\nu - \mu)P' + \sigma Q' - \varrho R' - V z_2$$
$$\mu' = 2(\pi P' - \sigma R' + U x_2) \qquad \varrho' = -\sigma P' + (\lambda - \nu)Q' + \pi R' - U z_2$$
$$\nu' = 2(\varrho Q' - \pi P' + U x_2 + V y_2 \qquad \sigma' = \varrho P' - \pi Q' + (\mu - \lambda)R' - V x_2 - U y_2$$

nach denen sich berechnen lässt:

$$\varrho_2' = -\sigma_2 P' + (\lambda_2 - \nu_2)Q' + \pi_2 R' - U(2\varrho x_2 + \pi y_2 - \mu z_2) - V(\pi x_2 + \sigma z_2)$$
$$\pi_2' = (\nu_2 - \mu_2)P' + \sigma_2 Q' - \varrho_2 R' - U(\varrho y_2 + \sigma z_2) - V(\varrho x_2 + 2\pi y_2 - \lambda z_2)$$
$$\nu_2' = -2\pi_2 P' + 2\varrho_2 Q' + 2U(\lambda x_2 + \sigma x_2) + 2V(\sigma x_2 + \mu y_2)$$

Differentiirt man mit Hülfe dieser Formeln Gl. (21), eliminirt $P''$ und $Q''$ mittelst der Gl. (19), dividirt dnrch $P'^3$ nnd setzt

$$U = U_0 P'; \quad V = V_0 P'; \quad W = W_0 P'^2$$

so fällt $R'$ von selbst weg, und man erhält:

$$\begin{aligned} &\lambda[2\pi\sigma + (\lambda - \mu + \nu)\varrho] \\ &- \varkappa[4(\lambda\varrho + \pi\sigma)\sigma + 2(\nu - \mu)\varrho\sigma + \lambda(\mu + \nu - \lambda)\pi] \\ &- \varkappa^2[4(\mu\pi + \varrho\sigma)\sigma + 2(\nu - \lambda)\pi\sigma + \mu(\lambda + \nu - \mu)\varrho] \\ &+ \varkappa^3\mu[(\lambda - \mu - \nu)\pi - 2\varrho\sigma] \\ &+ W_0\{(\lambda + \mu + \nu)[\lambda x_2 + \sigma y_2 + \varkappa(\sigma x_2 + \mu y_2)] - 3\nu_2(x_2 + \varkappa y_2) + (\varrho_2 + \varkappa\pi_2)z_2\} \\ &+ U_0[-2\lambda\sigma x_2 + (\lambda\pi - 2\varrho\sigma)z_2] + V_0[-2(\pi\varrho + \mu\sigma)y_2 + \lambda\varrho z_2] \\ &+ 2\varkappa\{U_0[(\lambda^2 - 2\lambda\mu + \varrho^2 + \sigma^2)x_2 - \mu\varrho z_2] + V_0[(2\lambda\mu - \mu^2 - \pi^2 - \sigma^2)y_2 + \lambda\pi z_2]\} \\ &+ \varkappa^2\{U_0[2(\pi\varrho + \lambda\sigma)x_2 - \mu\pi z_2] + V_0[2\mu\sigma y_2 + (2\pi\sigma - \mu\varrho)z_2]\} \end{aligned} \tag{24}$$

$$+\{\lambda\mu-\varrho^2-3\sigma^2+2\varkappa(\lambda-\mu)\sigma+\varkappa^2(\pi^2+3\sigma^2-\lambda\mu)\}(U_0y_2+V_0x_2)$$
$$+W_0\{(V_0x_2-U_0y_2)(\varrho x_2+\pi y_2)+[(U_0x_2-V_0y_2)\sigma+U_0\mu y_2-V_0\lambda x_2]\varkappa$$
$$-U_0\pi_2+V_0\varrho_2\}=0$$

Hier ist

$$W_0=V_0-\varkappa U_0+\frac{\gamma}{P'^2}$$

oder, da nach Gl. (22)

$$P'^2(\lambda+2\varkappa\sigma+\varkappa^2\mu)=2\gamma z_2$$

ist, nach Elimination von $P'$

$$W_0=V_0-\varkappa U_0+\frac{\lambda+2\varkappa\sigma+\varkappa^2\mu}{2z_2}$$

Daher ist die gefundene Gleichung (24) von der Form:

$$L_0+L_1\varkappa+L_2\varkappa^2+L_3\varkappa^3=0$$

und giebt, verbunden mit Gl. (23), welche die Form

$$M_0+M_1\varkappa+M_2\varkappa^2=0$$

hat:

$$\begin{vmatrix} L_0 & L_1 & L_2 & L_3 & 0 \\ 0 & L_0 & L_1 & L_2 & L_3 \\ M_0 & M_1 & M_2 & 0 & 0 \\ 0 & M_0 & M_1 & M_2 & 0 \\ 0 & 0 & M_0 & M_1 & M_2 \end{vmatrix}=0$$

worin nur die primitiven $u$, $v$ enthalten sind.

Hiermit ist die Bahn des Berührungspunkts auf der Oberfläc[he] und dadurch die ganze Bewegung des Körpers geometrisch, d. i. oh[ne] Rücksicht auf die Zeit, bestimmt. Die Einführung in die Differe[n]tialgleichungen würde dann identisch zu erfüllende Gleichungen [er]geben, welche entweder durch Relationen der Constanten befriedi[gt] werden könnten, oder den Beweis der Unmöglichkeit einer Bewegun[g] ohne Rotation um die Verticale liefern würden.

## §. 3. Permanente Bewegung.

Der Körper sei bezüglich seiner Oberfläche und Massenverteilun[g] Rotationskörper. Letzteres setzt nur voraus, dass seine Rotationsa[xe] Hauptträgheitsaxe, und, wenn diese $z$ Axe, $A=B$ sei.

Die Gleichungen der Oberfläche lassen sich schreiben:

$$x=h\cos v;\qquad y=h\sin v \qquad (2$$

Functionen von $u$, und $u$ Meridianbogen,

$$\frac{\partial h}{\partial u} = \cos\tau; \quad \frac{\partial z}{\partial u} = \sin\tau$$

rümmungswinkel des Meridians.

Dann wird

$$\left.\begin{array}{lll} p_1 = \cos\tau\cos v; & q_1 = \cos\tau\sin v; & v_1 = \sin\tau \\ p_2 = -\sin v; & q_2 = \cos v; & r_2 = 0 \\ p = -\sin\tau\cos v; & q = -\sin\tau\sin v; & r = \cos\tau \end{array}\right\} \tag{26}$$

$$P' = v'\sin\tau; \quad Q' = -\tau'; \quad R' = v'\cos\tau \tag{27}$$

$$x_2 = z\sin\tau + h\cos\tau; \quad y_2 = 0; \quad z_2 = z\cos\tau - h\sin\tau \tag{28}$$

$$= C + (A - C)\cos^2\tau + (z^2\cos\tau - h\sin\tau)^2$$

$$= A + z^2 + h^2$$

$$= C + (A - C)\sin^2\tau + (z\sin\tau + h\cos\tau)^2$$

$$= 0; \quad \sigma = 0$$

$$= -(A - C)\sin\tau\cos\tau - (z\sin\tau + h\cos\tau)(z\cos\tau - h\sin\tau)$$

$$= -(z\cos\tau - h\sin\tau)u'(v'\cos\tau - \varphi')$$

$$= -(z\cos\tau - h\sin\tau)hv'\varphi' - zhv'^2 - (z\sin\tau + h\cos\tau)(u'\tau' + \gamma)$$

$$= (z\sin\tau + h\cos\tau)u'(v'\cos\tau - \varphi')$$

$$= -\gamma(z\cos\tau - h\sin\tau)$$

Die entwickelten Gleichungen lauten nach Einführung der obigen erte;

$$(C + h^2)v'' - [C\cos\tau + h(z\sin\tau + h\cos)]\varphi'' \tag{29}$$

$$-[C\sin\tau - 2h(z\cos\tau - h\sin\tau)]\varphi'\tau'$$

$$-(A + h^2 + z^2)v'\tau'\sin\tau\cos\tau + hu'(v'\cos\tau - \varphi') = 0$$

$$hzv'' - [A\sin\tau + z(z\sin\tau + h\cos\tau)]\varphi''$$

$$-[(2A - C)\cos\tau + 2z(z\cos\tau - h\sin\tau)]\varphi'\tau'$$

$$-[C + (A - C + h^2 + z^2)\sin^2\tau]v'\tau' + zu'(v'\cos\tau - \varphi') = 0$$

$$-(A + h^2 + z^2)\tau'' + [C\sin\tau - h(z\cos\tau - h\sin\tau)]v'\varphi'$$

$$+[(A - C)\sin\tau\cos\tau + (z\sin\tau + h\cos\tau)(z\cos\tau - h\sin\tau)]\varphi'^2$$

$$-(z\sin\tau + h\cos\tau)(u'\tau' + \gamma) = 0$$

und die Gleichung der lebendigen Kraft:

$$(C + h^2)v'^2 - 2[C\cos\tau + h(z\sin\tau + h\cos\tau)]v'\varphi'$$

$$+[C + (A - C)\sin^2\tau + (z\sin\tau + h\cos\tau)^2]\varphi'^2$$

$$+(A + h^2 + z^2)\tau'^2 - 2\gamma(z\cos\tau - h\sin\tau) = \text{const.}$$

Hiervon machen wir specielle Anwendung auf den Fall, wo die die Berührungscurve einer der Parallelkreise der Oberfläche ist. Die Bedingung einer solchen Bewegung ist ein constantes $u$. Da hier auch $\tau$, $h$ und $z$ constant sind, so reduciren sich die 3 Gleichungen auf

$$\begin{aligned}
&(C+h^2)v''-[C\cos\tau+h(z\sin\tau+h\cos\tau)]\varphi''=0\\
&hzv''-[A\sin\tau+z(z\sin\tau+h\cos\tau)]\varphi''=0\\
&C\sin\tau-h(z\cos\tau-h\sin\tau)]v'\varphi'\\
&+[(A-C)\sin\tau\cos\tau+(z\sin\tau+h\cos\tau)(z\cos\tau-h\sin\tau)]\varphi'^2\\
&\qquad=\gamma(z\sin\tau+h\cos\tau)
\end{aligned}\tag{30}$$

Die Coefficientendeterminante der 2 ersten, welche

$$=(AC+Ah^2+Cz^2)\sin\tau$$

ist, kann nur verschwinden für $\sin\tau=0$, wo der Körper vertical auf seinem Scheitel steht. Von diesem Falle abgesehen, ergeben jene 2 Gleichungen:

$$v''=0;\qquad \varphi''=0$$

Hiernach sind $v'$ und $\varphi'$ constant, und die dritte Gleichung setzt sie in Relation. Die lebendige Kraft ist willkürlich constant. Die dritte Gleichung lässt sich schreiben:

$$\begin{aligned}
&[-C\sin\tau+h(z\cos\tau-h\sin\tau)](v'\cos\tau+\varphi')\varphi'\\
&+[A\cos^2\tau+C\sin^2\tau+(z\cos\tau-h\sin\tau)^2]\varphi'^2\sin\tau\\
&\qquad=\gamma(z\sin\tau+h\cos\tau)\cos\tau
\end{aligned}$$

Bei einer Rollbewegung ohne Rotation um die Verticale verschwindet der erste Term, und man hat:

$$\begin{aligned}
&\varphi'=\pm\sqrt{\gamma\cot\tau\frac{z\sin\tau+h\cos\tau}{A\cos^2\tau+C\sin^2\tau+(z\cos\tau-h\sin\tau)^2}}\\
&v'=-\frac{\varphi'}{\cos\tau}
\end{aligned}\tag{31}$$

Zur Bestimmung der Rollbahn auf der Grundebene erhält man aus den Gl. (4) nach Einführung der Werte (26) (25):

$$\partial x_4=h\partial v\sin\varphi;\quad \partial y_4=h\partial v\cos\varphi$$

das ist im Falle der Nichtrotation:

$$\partial x_4=-\frac{h\partial\varphi\sin\varphi}{\cos\tau};\quad \partial y_4=-\frac{h\partial\varphi\cos\varphi}{\cos\tau}$$

woraus:

$$x_4=\text{const}+\frac{h\cos\varphi}{\cos\tau};\quad y_4=\text{const}-\frac{h\sin\varphi}{\sin\tau}$$

Demnach ist hier die ebene Rollbahn ein Kreis vom Radius

$$\frac{h}{\cos\tau}$$

und wird durchlaufen in der Zeit

$$T = 4\mathrm{R}\sqrt{\frac{\operatorname{tg}\tau}{\gamma}\,\frac{A\cos^2\tau + C\sin^2\tau + (z\cos\tau - h\sin\tau)^2}{z\sin\tau + h\cos\tau}}$$

Findet Rotation statt, so ist deren Geschwindigkeit constant, und wenn man $\varphi'$ als beliebig gegeben betrachtet, so ist

$$\partial v = \frac{v'}{\varphi'}\partial\varphi$$

die ebene Rollbahn bleibt ein Kreis, der Radius aber wird

$$= \frac{hv'}{\varphi'}$$

und die Umlaufszeit

$$T = \frac{4\mathrm{R}}{\varphi'}$$

wo $v'$ aus Gl. (31) in $\varphi'$ bekannt ist.

XVIII.

# Zur Polaritätstheorie der Kegelschnitte.

Von

**Emil Hain.**

I.

## Bezeichnungen.

Sind $x_a$, $x_b$, $x_c$ den normalen Abständen eines Punktes $X$ in der Ebene eines Dreiecks $ABC$ von den Seiten $BC = a$ proportional, so liegt $X$ auf einem Kegelschnitt, wenn die Gleichnng

$$S = \Sigma g_{aa} x_a^2 + 2 \Sigma g_{bc} x_b x_c = 0$$

für constante $g_{aa}$, $g_{bc}$ besteht.

Ist $\frac{\partial S}{\partial \xi_a}$ der erste Differentialqnotient von $S$, wenn die $\xi_a$ für die $x_a$ eingesetzt sind, so ist

$$\frac{\partial S}{\partial \xi_a} x_a + \frac{\partial S}{\partial \xi_b} x_b + \frac{\partial S}{\partial \xi_c} x_c = 0$$

die Gleichung einer Geraden, welche die Polare des Pnnktes $\xi_a$ in Bezug auf den Kegelschnitt $S$ heisst. Und zwar ist:

$$\frac{\partial S}{\partial \xi_a} = g_{aa}\xi_a + g_{ab}\xi_b + g_{ac}\xi_c$$

$$\frac{\partial S}{\partial \xi_b} = g_{ba}\xi_a + g_{bb}\xi_b + g_{bc}\xi_c$$

$$\frac{\partial S}{\partial \xi_c} = g_{ca}\xi_a + g_{cb}\xi_b + g_{cc}\xi_c$$

Die Coordinaten der Ecken $A$, $B$, $C$ sind:

$$1\ 0\ 0;\quad 0\ 1\ 0;\quad 0\ 0\ 1$$

Sonach sind die Polaren dieser Punkte bezüglich des Kegelschnittes $S$ die Geraden:

$$g_{aa},\ g_{ab},\ g_{ac};\quad g_{ba},\ g_{bb},\ g_{bc};\quad g_{ca},\ g_{cb},\ g_{cc}$$

## II.

Ein beliebiges Dreieck und sein Polardreieck liegen immer perspectivisch. Es sei das perspectivische Centrum des Fundamentaldreiecks und seines Polardreiecks in Bezug auf den Kegelschnitt:

$$\Sigma g_{aa}x_a^2 + 2\Sigma g_{bc}x_bx_c = 0$$

zu bestimmen.

Die Polare von $A \equiv 1\ 0\ 0$ hat nach I. die Form:

$$g_{aa} \qquad g_{ab} \qquad g_{ac}$$

Die Polaren von $B$ und $C$ schneiden sich in $\mathfrak{A}$, dem Pole der $BC$; derselbe hat die Form:

$$g_{bb}g_{cc} - g_{bc}^2 \qquad g_{bc}g_{ca} - g_{ab}g_{cc} \qquad g_{ab}g_{bc} - g_{ca}g_{bb}$$

Sonach treffen sich die $A\mathfrak{A}$ im Punkte

$$O \equiv (g_{ab}g_{bc} - g_{ca}g_{bb})\,(g_{bc}g_{ca} - g_{ab}g_{cc})$$

Die Gleichung des dem Dreieck $ABC$ umschriebenen Kreises ist:

$$\Sigma\, ax_bx_c = 0$$

Hier wird $O \equiv a$, der Grebe'sche Punkt. Allgemein:

Bestimmt man in der Ebene eines Dreiecks in Bezug auf dasselbe die konische Polare eines beliebigen Punktes und construirt bezüglich derselben das Polardreieck des Urdreiecks, so ist das perspectivische Centrum beider Dreiecke der ursprünglich gewählte Punkt selbst.

Für den Inkreis

$$\Sigma\sqrt{a(b+c-a)x_a} = 0$$

wird

$$g_{aa} = a^2(b+c-a)^2, \quad g_{bc} = -bc(a+c-b)\,(a+b-c)$$

$$g_{ab}g_{ac} - g_{bc}g_{aa} = 2a(b+c-a)$$

$$O \equiv bc(a+b-c)\,(a+c-b)$$

Dem Kegelschnitte $\Sigma\sqrt{a_1x_a} = 0$ entspricht $O \equiv b_1c_1$.

Geht der Kegelschnitt durch vier feste Punkte, setzen wir also

$$\text{statt } g_{aa} \ldots g_{aa} + \varphi g_{aa}'$$
$$\text{,, } g_{bc} \ldots g_{bc} + \varphi g_{bc}'$$

so wird

$$g_{ca} g_{ab} - g_{bc} g_{aa}$$

in Bezug auf $\varphi$ quadratisch. 0 bewegt sich also auf einer rationalen Curve vierter Ordnung der Art, dass die reciproken Punkte von 0 auf einem Kegelschnitte liegen.

## III.

Construirt man bezüglich eines Kegelschnittes irgend ein Tripel conjugirter Punkte, verbindet diese mit einem beliebigen Punkte in der Ebene des Kegelschnittes und bestimmt zu den Schnittpunkten dieser Verbindungslinien mit den Seiten des Tripeldreiecks die auf denselben gelegenen conjugirten Punkte bezüglich des Kegelschnittes, so liegen diese in einer Geraden.

$$\Sigma g_{aa} x_a^2 = 0$$

sei die Gleichung des Kegelschnittes bezogen auf das Tripel $ABC$. $PA$ $(P \equiv p_a)$ treffe $BC$ in

$$P_a \equiv 0 \quad p_b \quad p_c$$

$\mathfrak{P}_a$ sei bezüglich des Kegelschnittes $g_{aa}$ auf $BC$ zu $P_a$ conjugirt. $\mathfrak{P}_a$ ist der Schnittpunkt der Polare von $P_a$ mit $BC$. Die Polare eines Punktes $\xi$ bezüglich des gegebenen Kegelschnittes ist nach I. die Gerade:

$$g_{aa}\xi_a \quad g_{bb}\xi_b \quad g_{cc}\xi_c$$

Die Polare von $P_a$ hat also die Form:

$$0 \quad g_{bb}p_b \quad g_{cc}p_c$$

Sie trifft $BC$ in

$$\mathfrak{P}_a \equiv 0 \quad g_{cc}p_c \quad -g_{bb}p_b$$

Sonach liegen die $\mathfrak{P}_a$ in der Geraden $\mathfrak{G} \equiv g_{aa}p_a$, der Polaren des Punktes $P$ bezüglich des Kegelschnittes $g_{aa}$, also einer Geraden, welche von der Lage des Tripeldreiecks unabhängig ist.

## IV.

Um den Ort der Punkte zu bestimmen, deren Polaren bezüglich zweier Kegelschnitte parallel sind, wählen wir das ihnen gemeinsame sich selbst conjugirte Dreieck zum Fundamentaldreieck. Die Gleichungen der Kegelschnitte sind d

$$\Sigma g_{aa}x_a^2 = 0, \quad \Sigma g_{aa}' x_a^2 = 0$$

Die Polaren des Punktes $\xi$ bezüglich derselben sind die Geraden:

$$g_{aa}\xi_a \quad g_{bb}\xi_b \quad g_{cc}\xi_c$$
$$g_{aa}'\xi_a \quad g_{bb}'\xi_b \quad g_{cc}'\xi_c$$

Für den Parallelismus zweier Geraden, deren Gleichungen

$$\Sigma a_1 x_a = 0, \quad \Sigma a_2 x_a = 0$$

sind, gilt die Beziehung:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$$

Sonach hat der verlangte Ort die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} g_{aa}x_a & g_{bb}x_b & g_{cc}x_c \\ g_{aa}'x_a & g_{bb}'x_b & g_{cc}'x_c \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$$

Der Ort der Punkte, deren Polaren bezüglich zweier Kegelschnitte parallel sind, ist eine Curve dritter Ordnung, welche dem diesen Kegelschnitten gemeinsamen sich selbst conjugirten Dreiecke umschrieben ist.

Die Bedingung der Orthogonalität zweier Geraden $a_1$, $a_2$ ist:

$$\Sigma a_1 a_2 = \Sigma (b_1 c_2 + b_2 c_1) \cos \alpha$$

Der Ort der Punkte, deren Polaren bezüglich zweier Kegelschnitte auf einander senkrecht stehen, hat also die Gleichung:

$$\Sigma g_{aa} g_{aa}' x_a^2 = \Sigma (g_{bb} g_{cc}' + g_{cc} g_{bb}') \cos \alpha \, x_b x_c$$

ist somit ein Kegelschnitt.

## V.

Durch einen Punkt $P$ werden zu einer Geraden $\mathfrak{G}$ in der Ebene eines Kegelschnittes $k$ Strahlen gezogen. Construirt man zu dem Schnittpunkte eines jeden Strahles durch $P$ mit der Geraden $\mathfrak{G}$ auf demselben den conjugirten Punkt bezüglich $k$, so beschreibt derselbe bei der Drehung des Strahles einen Kegelschnitt. Die Gleichung desselben in trimetrischen Punktcoordinaten ist zu bilden.

Die Gleichung der Geraden $\mathfrak{G}$ sei:

$$a_1 x_a + b_1 x_b + c_1 x_c = 0$$

Die Coordinaten von $P$ seien:

$$p_a, \quad p_b, \quad p_c$$

Die Gleichnng des Kegelschnittes $k$ laute:

$$\Sigma g_{aa} x_a^2 + 2 \Sigma g_{bc} x_b x_c = 0$$

Die Gleichungen der Strahlen $PB$, $PC$ sind:

$$-p_c x_a + p_a x_c = 0, \quad p_b x_a - p_a x_b = 0$$

Die Gleichung des Strahlenbüschels von dem Mittelpunkte $P$ ist also:

$$-p_c x_a + p_a x_c + \lambda(p_b x_a - p_a x_b) = 0$$

Der Strahl $\lambda$ ist somit die Gerade:

$$-p_c + \lambda p_b \qquad -\lambda p_a \qquad +p_a$$

Der Strahl $\lambda$ trifft $\mathfrak{G}$ in

$$\mathfrak{P}_\lambda \equiv -b_1 p_a - \lambda c_1 p_a \quad a_1 p_a + c_1 p_c - \lambda c_1 p_b \quad -b_1 p_c + \lambda a_1 p_a + \lambda b_1 p_b$$

Die Polare von $\mathfrak{P}_\lambda$ in Bezug auf den Kegelschnitt $k$ trifft den Strahl $\lambda$ in einem zu $\mathfrak{P}_\lambda$ conjngirten Pnnkte $P_\lambda$. Die Gleichung der Polare von $\mathfrak{P}_\lambda$ ist nach I.:

$$\begin{aligned}
& [-b_1(p_a g_{aa} + p_c g_{ac}) + (a_1 p_a + c_1 p_c) g_{ab}] x_a \\
& + [-b_1(p_a g_{ba} + p_c g_{bc}) + (a_1 p_a + c_1 p_c) g_{bb}] x_b \\
& + [-b_1(p_a g_{ca} + p_c g_{cc}) + (a_1 p_a + c_1 p_c) g_{cb}] x_c \\
+ \lambda & \left\{ \begin{aligned} & [-c_1(p_a g_{aa} + p_b g_{ab}) + (a_1 p_a + b_1 p_b) g_{ac}] x_a \\ & + [-c_1(p_a g_{ba} + p_b g_{bb}) + (a_1 p_a + b_1 p_b) g_{bc}] x_b \\ & + [-c_1(p_a g_{ca} + p_b g_{cb}) + (a_1 p_a + b_1 p_b) g_{cc}] x_c \end{aligned} \right\} \\
& = 0
\end{aligned}$$

Die Polaren der $\mathfrak{P}_\lambda$ bilden ein Strahlenbüschel

$$U + \lambda V = 0$$

Die Gleichung des Strahles $P\mathfrak{P}_\lambda$ hat die Form:

$$U' + \lambda V' = 0$$

Für den Schnittpnnkt $P_\lambda$ des Strahles $P\mathfrak{P}_\lambda$ mit der Polare von $\mathfrak{P}_\lambda$ gilt also die Beziehnng:

$$UV' - U'V = 0$$

Die Rechnnng gibt:

$$\Sigma g_{aa}' x_a^2 + 2 \Sigma g_{bc}' x_b x_c = 0$$

$$g_{aa}' = (b_1 p_b + c_1 p_c) g_{aa} - a_1 (p_b g_{ab} + p_c g_{ac})$$
$$2g_{bc}' = g_{bc}(2a_1 p_a + b_1 p_b + c_1 p_c) - p_a(b_1 g_{ca} + c_1 g_{ab}) - (b_1 p_c g_{cc} + c_1 p_b g_{bb})$$

Wir bezeichnen diesen Kegelschnitt mit 𝔎. Die Coefficienten $g_{aa}'$, $g_{bc}'$ sind in Bezug anf $p_a$, $a_1$ und $g_{aa}$, $g_{bc}$ linear. Die Kegelschnitte 𝔎 bilden also ein Büschel, sowol wenn die Kegelschnitte $k$ ein solches bilden, als auch wenn $P$ anf einer Geraden sich bewegt, oder 𝔊 durch einen festen Punkt geht. Ist 𝔊 die uuendlich ferne Gerade, also $a_1 = a$, so wird 𝔎 der Ort der Mittelpunkte aller Sehnen des Kegelschnittes $k$, welche dnrch einen Punkt $P$ gehen.

Wien, Jnli 1880.

# XIX.

# Ueber das Transversalensystem zweier Punkte.

Von

**Emil Hain.**

---

I. $P$, $Q$ seien zwei Punkte in der Ebene des Dreiecks $ABC$. $AP$ treffe $BC$ in $P_a$. $\Pi_a$ liege zu $P_a$ bezüglich $BC$ harmonisch. $\Pi_a$, $\Pi_b$, $\Pi_c$ liegen in einer Geraden, der Harmonikale von $P$. Diese treffe $AQ$ in $\mathfrak{P}_a$. Dann schneiden sich die $P_a\mathfrak{P}_a$ in einem Punkte.

Die Seiten des Dreiecks $ABC$ ($BC = a$) seien die Axen für die trimetrischen Coordinaten $p_a$, $p_b$, $p_c$ des Punktes $P$, so dass

$$\begin{array}{llll} P & \equiv p_a & p_b & p_c \\ P_a & \equiv 0 & p_b & p_c \\ \Pi_a & \equiv 0 & p_b & -p_c \\ Q_a & \equiv 0 & q_b & q_c \end{array}$$

Die $\Pi_a$ liegen in der Geraden

$$p_bp_c \qquad p_cp_a \qquad p_ap_b$$

Diese trifft die

$$AQ_a \equiv 0 \qquad q_c \qquad -q_b$$

in

$$\mathfrak{P}_a \equiv p_a(p_bq_c + p_cq_b) \qquad -p_bp_cq_b \qquad -p_bp_cq_c$$

Wir finden nun:

$$P_a\mathfrak{P}_a \equiv p_bp_c(p_bq_c - p_cq_b) \qquad -p_cp_a(p_bq_c + p_cq_b) \qquad p_ap_b(p_bq_c + p_cq_b)$$

Die $P_a\mathfrak{P}_a$ treffen sich in

$$O \equiv p_a^2(p_bq_c + p_cq_b)$$

$O$ liegt in der Geraden $p_bq_c - p_cq_b$, der Verbindungsgeraden der Punkte $P$, $Q$. Für $P \equiv J$, dem Inkreiscentrum des Axendreiecks, wird $p_a = 1$, $O \equiv q_b + q_c$. Wir haben also folgendes Resultat:

Die Harmonikale des Inkreiscentrums $J$ des Dreiecks $ABC$ trifft die Ecktransversalen $AQ$ des Punktes $Q$ $(Q \equiv q_a)$ in $\mathfrak{J}_a$. Die $J_a\mathfrak{J}_a$ treffen sich im Pnnkte $0 \equiv q_b + q_c$.

II. $P$, $Q$ seien zwei beliebige Pnnkte in der Ebene des Dreiecks $ABC$. $AP$ treffe $BC$ in $P_a$. Die Harmonikale von $P$ treffe die $AQ$ in $\mathfrak{P}_a$. $\mathfrak{P}_a'$ liege zu $\mathfrak{P}_a$ bezüglich $AQ$ harmonisch. Dann begegnen sich die $P_a\mathfrak{P}_a'$ in einem Pnnkte.

Die Harmonikale von $P$ treffe $BC$ in $\Pi_a$. Wir construiren $\mathfrak{P}_a'$, indem wir die Punkte $\Pi_b$, $\Pi_c$ der durch $\mathfrak{P}_a$ gehenden Harmonikale von $P$ mit $A$ und $Q$ verbinden. Die Verbindungsgerade der Schnittpnnkte

$$(\Pi_b A,\ \Pi_c Q),\quad (\Pi_b Q,\ \Pi_c A)$$

trifft $AQ$ in $\mathfrak{P}_a'$. Wir erhalten:

$$\begin{array}{llll} (\Pi_b A,\ \Pi_c Q) \equiv p_a q_b + p_b q_a & 0 & p_b q_c \\ (\Pi_b Q,\ \Pi_c A) \equiv p_c q_a + p_a q_c & p_c q_b & 0 \end{array}$$

Die Verbindnngsgerade dieser Pnnkte hat die Form:

$$p_b p_c q_b q_c \qquad -p_b q_c(p_c q_a + p_a q_c) \qquad -p_c q_b(p_a q_b + p_b q_a)$$

Diese Gerade trifft $AQ$ in

$$\mathfrak{P}_a' \equiv 2 p_b p_c q_a + p_c p_a q_b + p_a p_b q_c \quad p_b p_c q_b \quad p_b p_c q_c$$

Die $\mathfrak{P}_a' P_a$ treffen sich somit in

$$0 \equiv p_a(2 p_b p_c q_a + p_c p_a q_b + p_a p_b q_c)$$

Die Verbindungsgerade der Pnnkte $P$, $Q$ hat die Form $p_b q_c - p_c q_b$. Es ist nun:

$$\begin{vmatrix} p_b(2 p_c p_a q_b + p_a p_b q_c + p_b p_c q_a) & p_b \\ p_c(2 p_a p_b q_c + p_b p_c q_a + p_c p_a q_b) & p_c \end{vmatrix} \equiv p_b q_c - p_c q_b$$

Somit liegt 0 auf der Geraden $PQ$.

III. Indem wir das erhaltene zusammenfassen, bekommen wir folgenden Satz:

$P$, $Q$ seien zwei beliebige Pnnkte in der Ebene eines Dreiecks $ABC$. $AP$, $AQ$ treffen die $BC$ in $P_a$, $Q_a$. Die Harmonikale von $P$ schneide die $AQ$ in $\mathfrak{P}_a$, die Harmonikale von $Q$ die $AP$ in $\mathfrak{Q}_a$. $\mathfrak{P}_a'$ sei zu $\mathfrak{P}_a$ bezüglich $AQ$, $\mathfrak{Q}_a'$ zu $\mathfrak{Q}_a$ bezüglich $AP$ harmonisch. Dann begegnen sich die Geradentripel $P_a\mathfrak{P}_a$, $Q_a\mathfrak{Q}_a$, $P_a\mathfrak{P}_a'$, $Q_a\mathfrak{Q}_a'$ in je einem Punkte, und diese vier Punkte liegen mit $P$ und $Q$ in einer Geraden.

Wien, Jänner 1881.

## XX.

# Ueber eine Verwandtschaft ersten Grades.

Von

**Emil Hain.**

---

$P$ sei ein Punkt in der Ebene des Dreiecks $ABC$. Auf den Geraden $PA$, $PB$, $PC$ liegen die Punkte $A_1$, $B_1$, $C_1$. Dann schneiden sich, wie bekannt, die $B_1C_1$ mit den $BC$ in Punkten einer Geraden.

Um die analytischen Beziehungen derselben zu erhalten, wählen wir $ABC$ als Axendreieck. Ferner sei:

$$BC = a, \quad \text{Dreieck } ABC = F$$

$$P \equiv p_a \quad p_b \quad p_c$$

Die $p_a$ sind die trimetrischen Punktcoordinaten von $P$. Sonach ist, wenn $P(a)$ die Normale von $P$ auf $BC$ bezeichnet,

$$P(a) = \frac{2Fp_a}{\Sigma ap_a}$$

$AP$ trifft $BC$ in

$$P_a \equiv 0 \quad p_b \quad p_c$$

Die Seitennormalen von $P_a$ sind

$$0 \quad \frac{2Fp_b}{bp_b + cp_c} \quad \frac{2Fp_c}{bp_b + cp_c}$$

Ferner sei $AP_a = a_p$, $AA_1 = a_1$. $a_1$ ist positiv zu nehmen in der Richtung von $A$ gegen $BC$. Die Figur gibt:

$$\frac{A_1(a)}{A(a)} = \frac{a_p - a_1}{a_p}, \quad A_1(a) = \frac{a_p - a_1}{a_p} \cdot \frac{2F}{a}$$

$$\frac{A_1(b)}{P_a(b)} = \frac{a_1}{a_p}, \quad A_1(b) = \frac{a_1}{a_p} \cdot \frac{2Fp_b}{bp_b + cp_c}$$

Also ist:

$$A_1 \equiv \left(\frac{a_p - a_1}{a_p}\right)\frac{2F}{a} \qquad \frac{a_1}{a_p}\cdot\frac{2Fp_b}{bp_b + cp_c} \qquad \frac{a_1}{a_p}\cdot\frac{2Fp_c}{bp_b + cp_c}$$

$$\equiv (a_p - a_1)(bp_b + cp_c) \qquad aa_1 p_b \qquad aa_1 p_c$$

Setzen wir

$$\frac{a_1}{a_p - a_1} = \alpha,$$

so haben wir:

$$\begin{array}{llll} A_1 \equiv & bp_b + cp_c & \alpha ap_b & \alpha ap_c \\ B_1 \equiv & \beta bp_a & cp_c + ap_a & \beta bp_c \\ C_1 \equiv & \gamma cp_a & \gamma cp_b & ap_a + bp_b \end{array}$$

Somit ist:

$$B_1C_1 \equiv \begin{array}{l} (cp_c + ap_a)(ap_a + bp_b) - \beta\gamma bcp_b p_c \\ \beta bp_a(\gamma cp_c - ap_a - bp_b) \\ \gamma cp_a(\beta bp_b - cp_c - ap_a) \end{array}$$

Die $B_1C_1$ treffen die $BC$ in

$$A_2 \equiv 0 \qquad \gamma c(\beta bp_b - cp_c - ap_a) \qquad -\beta b(\gamma cp_c - ap_a - bp_b)$$

Also liegen die $A_2$ in der Geraden:

$$a\alpha(\beta bp_b - cp_c - ap_a)(\gamma cp_c - ap_a - bp_b)$$

Der harmonische Pol dieser Geraden ist der Symmetriepunkt:

$$O \equiv bc\beta\gamma(bp_b + cp_c - \alpha ap_a)$$

Denken wir uns $AP_a$ über $P_a$ bis $A_1$ so verlängert, dass

$$P_aA_1 = AP_a$$

so ist

$$a_1 = 2a_p, \qquad \alpha = -2$$

$$O \equiv bc(2ap_a + bp_b + cp_c)$$

Dieser Punkt wird also, wenn $P \equiv p_a$ gegeben, auf folgende Weise construirt:

$AP$ trifft $BC$ in $P_a$. $AP_a$ wird über $P_a$ bis $A_1$ so verlängert, dass $P_aA_1 = AP_a$. Die $B_1C_1$ treffen die $BC$ in $A_2$. Die $A_2$ liegen in einer Geraden, der Harmonikale von $O$ (der Polare von $O$ bezüglich des Dreiseites $ABC$).

Wendet man dieselbe Construction auf den Punkt $O$ an, so erhält man:

$$O_2 \equiv bc \begin{bmatrix} 2a.bc(2ap_a+bp_b+cp_c) \\ +b.ca(ap_a+2bp_b+cp_c) \\ +c.ab(ap_a+bp_b+2cp_c) \end{bmatrix}$$

$$\equiv bc(6ap_a+5bp_b+5cp_c)$$

Denselben Punkt erhält man aber auch, wenn man

$$-\alpha = \tfrac{6}{5}, \quad a_1 = 6a_p$$

setzt.

Verlängern wir $AP_a$ über $A$ hinaus um sich selbst, so ist:

$$a_1 = -a_p, \quad \alpha = -\tfrac{1}{2}$$
$$O \equiv bc(ap_a+2bp_b+2cp_c)$$

Für $\alpha = 1$ erhalten wir folgendes Resultat:

Trifft $AP$ ($P \equiv p_a$) die $BC$ in $P_a$, ist $A_1$ die **Mitte von** $AP_a$, schneiden die $B_1C_1$ die $BC$ in $A_2$, und liegt $A_3$ **harmonisch zu** $A_2$ bezüglich $BC$, so begegnen sich die $AA_3$ im Punkte

$$O \equiv bc(bp_b+cp_c-ap_a)$$

Für $\alpha = \beta = \gamma = \varepsilon$ wird

$$\frac{a_1}{a_p} = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} = \frac{AA_1}{AP}$$

$$O \equiv bc(bp_c+cp_c-\varepsilon ap_a)$$

Alle Punkte $\varepsilon$ liegen auf der Geraden $a(bp_b-cp_c)$, welche durch $P$ und den Schwerpunkt $S$ des Axendreiecks geht. Die Punktpaare $+\varepsilon$, $-\varepsilon$ bilden eine Involution, deren Doppelpunkte $P$ und der Punkt

$$O_0 \equiv bc(bp_b+cp_c)$$

sind. Setzen wir $AA_1 : AP = \varphi$, so erhalten wir:

$$A_1(a) = \frac{2F}{a\Sigma ap_a}\left[(1-\varphi)(bp_b+cp_c)+ap_a\right]$$

$$A_1(b) = \frac{2F\varphi p_b}{\Sigma ap_a}, \qquad A_1(c) = \frac{2F\varphi p_c}{\Sigma ap_a}$$

Da, wie aus der Figur zu ersehen, die $B_1C_1$ den $BC$ **parallel sind**, so wird hier $O$ immer mit $S$ zusammenfallen. **Als Schwerpunkt des** Dreiecks $A_1B_1C_1$ erhält man den Punkt:

$$bc\left[bp_b+cp_c-\left(\frac{2\varphi+1}{\varphi-1}\right)ap_a\right]$$

Vergleicht man diesen Wert mit dem früher gefundenen:

$$O \equiv bc(bp_b + cp_c - \varepsilon a p_a)$$

$$\varepsilon = \frac{a_1}{a_p - a_1}$$

so findet man:

$$a_1 = \frac{2\varphi + 1}{3\varphi} a_p$$

Zugleich ergibt sich der Satz:

Die Schwerpunkte aller Dreiecke, welche mit einem gegebenen Dreieck ähnlich liegen und einen gemeinsamen Aehnlichkeitspunkt besitzen, liegen auf einer Geraden, welche durch den gemeinsamen Aehnlichkeitspunkt und den Schwerpunkt des Urdreiecks geht.

Wien, November 1880.

XXI.

# Ueber magische Quadrate und ähnliche Zahlenfiguren.

Von

Dr. **Th. Harmuth.**

---

I.

## Magische Quadrate.

Man bezeichnet mit dem Ausdruck „magisches Quadrat" bekanntlich eine Gruppe von $m^2$ auf einander folgenden Zahlen, welche in $m$ Reihen von je $m$ Gliedern so geordnet sind, dass die Summe jeder beliebigen Horizontalreihe oder Verticalreihe gleich

$$\frac{1}{m} \cdot \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m^2} \lambda = \frac{m^3+m}{2} \quad \text{ist.}$$

Zuweilen wird ausserdem verlangt, dass jede der beiden Diagonalreihen diese Summe haben soll. Im Folgenden ist diese Forderung unberücksichtigt geblieben. Die Lösung gestaltet sich sehr verschieden, je nachdem $m$ eine der drei Formen $2n+1$, $4n$, $4n+2$ annimmt.

1) $m$ ungerade, also $= 2n+1$.

§ 1. Für diesen Fall ist eine Herstellungsregel (‚welche übrigens auch die Diagonalreihen berücksichtigt') bekannt. Sie lautet:

Man setzt unmittelbar unter das mittelste Feld die Zahl 1 und geht dann in der natürlichen Zahlenfolge rechts abwärts weiter. Wo

unten oder rechts abgebrochen wird, fährt man oben oder links in der folgenden Verticalreihe oder Horizontalreihe fort. Stösst man dabei auf ein bereits beschriebenes Feld, so setzt man die nächste Zahl senkrecht unter die zuletzt geschriebene, aber durch **ein** Feld von derselben getrennt.

Beispiel: $m = 5$, also $n = 2$.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 11 | 24 | 7 | 20 | 3 |
| 4 | 12 | 25 | 8 | 16 |
| 17 | 5 | 13 | 21 | 9 |
| 10 | 18 | 1 | 14 | 22 |
| 23 | 6 | 19 | 2 | 15 |

**Beweis.** Die oben verlangte Summe nimmt, da $m = 2n+1$ ist, die Form an:

$$\frac{m^3+m}{2} = 4n^3+6n^2+4n+1.$$

Die Diagonale von links oben nach rechts unten enthält die mittelsten $2n+1$ Zahlen des Systems, ihre Summe ist demnach:

$$(2n+1)\frac{(2n+1)^2+1}{2} = 4n^3+6n^2+4n+1$$

Die andere Diagonale enthält eine arithmetische Progression mit demselben Mittelgliede und der Gliederdifferenz $2n+1$. Ihre Summe ist also dieselbe.

Die Verticalreihen lassen sich als arithmetische Reihen mit der Gliederdifferenz $2n+2$ auffassen, in denen diejenigen Glieder, welche grösser als $(2n+1)^2$ ausfallen würden, durch ihren congruenten Rest $\mathrm{mod}(2n+1)^2$ ersetzt worden sind.

So ist in obigem Beispiel die erste Verticalreihe

11 17 23 29 35

durch 11 17 23 4 10 ersetzt worden.

Man findet die Anfangsglieder dieser Reihen, wenn man sich, von der Zahl 1 ausgehend, jedesmal um eine Horizontalreihe und eine Verticalreihe tiefer resp. nach links wendet und bei Erreichung der Grenze der obigen Erklärung analog verfährt. Diese Anfangsglieder sind demnach

$$1,\ 2n+2,\ 4n+3,\ 6n+4\ \ldots\ 2kn+(k+1)$$

Bezeichnet man das letzte (allgemeine) dieser Glieder kurz mit $a$, so heisst die Reihe, in der die congruenten Reste noch nicht eingeführt sind

$$a, \quad a+2n+2, \quad a+2(2n+2) \ \ldots \ a+2n(2n+2).$$

Ihre Summe ist

$$= (2n+1)a + n(2n+1)(2n+2)$$

oder, wenn man für $a$ den obigen Wert einsetzt

$$(2n+1)^2k + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$$

d. h. die Summe kann von dem verlangten Werte nur um ein ganzzahliges Vielfaches von $(2n+1)^2$ abweichen.

Nun giebt aber $k$ an, wie viele Glieder in der betreffenden Reihe durch den congruenten Rest ersetzt worden sind, also ist dieselbe Zahl $(2n+1)^2k$ wieder in Abzug zu bringen.

Aehnlich ist der Beweis für die Horizontalreihen, welche sich mit derselben Beschränkung (Ersetzung einiger Zahlen durch den congruenten Rest) als arithmetische Reihen mit der Differenz $2n$ auffassen lassen. Die Anfangsglieder derselben findet man von $2n+1$ aus links abwärts:

$$2n+1, \quad 4n+2 \ \ldots \ 2kn+k,$$

das allgemeine Anfangsglied $= \alpha$ gesetzt, heisst die Reihe vor Einsetzung der congruenten Reste

$$\alpha, \quad \alpha+2n, \quad \alpha+2.2n, \quad \alpha+3.2n \ \ldots \ \alpha+2n.2n$$

Ihre Summe ist, wenn $\alpha$ gleichzeitig durch seinen Wert wieder ersetzt wird

$$(2n+1)\alpha + 4n^3 + 2n^2 = (2n+1)^2(k-1) + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$$

d. h. auch diese Summe unterscheidet sich von der verlangten entweder gar nicht (wenn $k=1$), oder um ein ganzzahliges Vielfaches von $(2n+1)^2$ und zwar

$$\begin{aligned} \text{für } k &= 2 \quad \text{um} \quad (2n+1)^2 \\ k &= 3 \quad ,, \quad 2(2n+1)^2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ k &= \lambda \quad ,, \quad (\lambda-1)(2n+1)^2, \end{aligned}$$

aber gerade ebenso viele Glieder sind auch hier wieder durch ihre congruenten Reste ersetzt worden, also hat man auch hier die verlangte Summe, da das Glied $(2n+1)^2(k-1)$ wieder wegfällt.

Bemerkenswert dürfte noch Folgendes sein:

Denkt man sich sämmtliche Quadrate für $m = 1, 3, 5 \ldots 2n+1$ neben einander gestellt, so gehen die einzelnen oben rechts stehenden

Zahlen die natürliche Zahlenreihe 1, 2, 3 ... $n+1$, also den Wert des jedesmaligen $n+1$. Die drei Zahlen enthaltenden von links nach rechts abwärts gehenden Linien (dritten Nebendiagonalen) bilden in den successiven Quadraten ebenfalls die natürliche Zahlenfolge, ebenso auch die fünften, siebenten u. s. w. Nebendiagonalen. Man vergleiche:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n=1$ | 4 | 5 | 6 | | $n=2$ | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| $n=2$ | 7 | 8 | 9 | | $n=3$ | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| $n=3$ | 10 | 11 | 12 | | $n=4$ | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
| . . . | . . . | . | . | | . . . | . . | . . | . . | . . | . . |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n=3$ | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 |
| $n=4$ | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 |
| . . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | u. s. w. |

Die Anfangszahlen dieser Systeme sind

$$(1)\qquad 4\ 11\ 22\ 37\ 56\ 79\ \ldots\ \frac{(2n+1)^2+1}{2}-n,$$

ihre Anfangsreihen sind die betreffenden von links oben nach rechts unten gerichteten Diagonalen.

§ 2. Auf eine andere Lösung wird man durch folgende Bemerkung geführt:

Wählt man aus dem quadratisch geordneten System, dessen Glieder der genaueren Uebersicht wegen teilweise nicht in der einfachsten Form geschrieben sind:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | ... | $m-1$ | $m$ |
| | $m+1$ | $m+2$ | $m+3$ | ... | $m+m-1$ | $m+m$ |
| (A) | $2m+1$ | $2m+2$ | $2m+3$ | ... | $2m+m-1$ | $2m+m$ |
| | . . . . . | . . . . . | . . . . . | . . . | . . . . . | . . . . . |
| | $(m-1)m+1$ | $(m-1)m+2$ | $(m-1)m+3$ | ... | $(m-1)m+m-1$ | $(m-1)m+m$ |

$m$ Zahlen so, dass nicht zwei derselben Horizontalreihe oder Verticalreihe angehören, so haben diese stets die Summe

$$\frac{m^3+m}{2}$$

denn ihre Summe besteht notwendig aus den Teilen

$$1+2+3+\ldots(m-1)+m=\frac{m(m+1)}{2}$$

und

$$m+2m+3m+\ldots(m-1)m=\frac{m^2(m-1)}{2},$$

und es ist

$$\frac{m^2(m-1)+m(m+1)}{2}=\frac{m^3+m}{2}$$

Kann man also das obige System so umstellen, dass nicht zwei Glieder in derselben Horizontalreihe oder Verticalreihe verbleiben, so wird diese Umstellnng eine Lösung für das magische Quadrat ergeben.

Für den vorliegenden Fall $m=2n+1$ geschieht dies in folgender Weise:

Man ordnet znnächst die Zahlen so, dass in die erste Horizontalreihe die Diagonalreihe 1, $m+2$, $2m+3$ u. s. w. gestellt wird, in die folgenden Reihen setzt man die mit dieser Diagonale parallel verlanfenden Reihen, die wie leicht ersichtlich, sich ans zwei Teilen ergänzen müssen. Dadnrch erhält man:

$$(B)\quad\begin{array}{ccccccc}
1 & m+2 & 2m+3 & 3m+4 & \ldots & (m-2)m+m-1 & (m-1)m+m \\
2 & m+3 & 2m+4 & 3m+5 & \ldots & (m-2)m+m & (m-1)m+1 \\
3 & m+4 & 2m+5 & 3m+6 & \ldots & (m-2)m+1 & (m-1)m+2 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
m-1 & m+m & 2m+1 & 3m+2 & & (m-2)m+m-3 & (m-1)m+m-2 \\
m & m+1 & 2m+2 & 3m+3 & & (m-2)m+m-2 & (m-1)m+m-1.
\end{array}$$

In dieser Anordnnng haben die Horizontalreihen die verlangte Snmme, die Verticalreihen dagegen entsprechen (bis auf die Reihenfolge der Zahlen) den Horizontalreihen in (A). Wendet man dieselbe Umstellnng noch einmal an, so erhält man:

$$(C)\quad\begin{array}{ccccc}
1 & m+3 & 2m+5\ldots(m-2)m+m\cdot\,3 & (m-1)m+m-1 \\
m+2 & 2m+4 & 3m+6\ldots(m-1)m+m-2 & m \\
2m+3 & 3m+5 & 4m+7\ldots\quad m-1 & m+1 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
(m-2)m+m-1 & (m-1)m+1 & 3\quad\ldots(m-4)m+m-5 & (m-3)m+m-3 \\
(m-1)m-m & 2 & m+4\ \ldots(m-3)m+m-4 & (m-2)m+m-2
\end{array}$$

ein System, welches, wie leicht ersichtlich, den Anforderungen genügt. Denn jede Reihe enthält einmal die Ausdrücke

$$m,\quad 2m,\quad 3m\ \ldots\ (m-1)m$$

und dann die Zahlen 1 bis $m$, und zwar die Verticalreihen in der natürlichen Reihenfolge von einem Anfangsgliede aus; die Horizontalreihen in der Reihenfolge

$$1,\quad 3,\quad 5\ \ldots\ m-4,\quad m-2,\quad m,\quad 2,\quad 4\ \ldots\ m-3,\quad m-1$$

Digitized by Google

welche, da $m$ ungerade ist, notwendig $m$ verschiedene Zahlen enthält. Bei der Verwandlung von (B) konnte man auch so vorgehen, dass man die erste Horizontalreihe unverändert liess und dann die zweite, vom zweiten Gliede, allgemein die $p$te von ihrem $p$ten Gliede anfangend, daruntersetzte. Das so erhaltene System (C′) ist mit (C) identisch, nur sind die Horizontalreihen der einen Verticalreihen des andern geworden (und umgekehrt).

**Beispiel:** Für $n = 5$ hat man:

(B)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 7 | 13 | 19 | 25 |
| 2 | 8 | 14 | 20 | 21 |
| 3 | 9 | 15 | 16 | 22 |
| 4 | 10 | 11 | 17 | 23 |
| 5 | 6 | 12 | 18 | 24 |

(C′)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 7 | 13 | 19 | 25 |
| 8 | 14 | 20 | 21 | 2 |
| 15 | 16 | 22 | 3 | 9 |
| 17 | 23 | 4 | 10 | 11 |
| 24 | 5 | 6 | 12 | 18 |

Vergleicht man die Lösungen von § 1. und § 2., so zeigt sich allgemein, dass die nach § 1. gebildeten Verticalreihen mit den Verticalreihen in (C) oder mit den Horizontalreihen in (C′) identisch sind. Bei dem Quadrat für $m = 3$ findet sich eine noch vollständigere Uebereinstimmung. Die Reihenfolge der Reihen und der Zahlen in denselben bleibt dabei unberücksichtigt.

Bemerkt sei übrigens, dass die Quadrate, welche nach § 1. gebildet sind, auch die für das System (C) gestellten Bedingungen erfüllen, d. h. der verlangten Umänderung von (A) entsprechen.

§ 3. Aus den §§ 1. und 2. lässt sich noch eine mittelbare Lösung für diejenigen Quadrate herleiten, deren Grundzahlen nicht Primzahlen sind. Ein Beispiel wird das dabei anzuwendende Verfahren am einfachsten darthun.

Für $m = 3$ hat man

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 5 | 9 |
| 6 | 7 | 2 |
| 8 | 3 | 4 |

für $m = 9$ bildet man danach

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 9 | 37 | 41 | 45 | 73 | 77 | 81 |
| 6 | 7 | 2 | 42 | 43 | 38 | 78 | 79 | 74 |
| 8 | 3 | 4 | 44 | 39 | 40 | 80 | 75 | 76 |
| 46 | 50 | 54 | 55 | 59 | 63 | 10 | 14 | 18 |
| 51 | 52 | 47 | 60 | 61 | 56 | 15 | 16 | 11 |
| 53 | 48 | 49 | 62 | 57 | 58 | 17 | 12 | 13 |
| 64 | 68 | 72 | 19 | 23 | 27 | 28 | 32 | 36 |
| 69 | 70 | 65 | 24 | 25 | 20 | 33 | 34 | 29 |
| 71 | 66 | 67 | 26 | 21 | 22 | 35 | 30 | 31 |



Google

Das Quadrat ist aus dem vorigen dadurch entstanden, dass man die neun Quadrate

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I | gebildet | aus | den | Zahlen | 1 | bis | 9 |
| II | „ | „ | „ | „ | 10 | „ | 18 |
| III | „ | „ | „ | „ | 19 | „ | 27 |
| . . . | . . . | . . . | . . . | . . . | . . . | . . . | . . . |
| IX | „ | „ | „ | „ | 73 | „ | 81 |

nach Analogie der Glieder des ersten in die Gruppirung

| | | |
|---|---|---|
| I | V | IX |
| VI | VII | II |
| VIII | III | IV |

bringt. Die Richtigkeit der Teilsummen ergibt sich sehr leicht aus der Herleitnng.

Ebenso werden sich für alle zusammengesetzten Zahlen (als Basis) analoge Quadrate aufstellen lassen nnd zwar in der Regel doppelt so viel verschiedene, als die Grundzahl Zerlegungen in zwei Factoren zulässt. Die einzelnen Teilquadrate können dabei ebenso gut wie die nachherige Zusammenstellung derselben sowohl nach § 1., als auch nach § 2. hergestellt werden. Nur wenn die vorliegende Grundzahl selbst eine Quadratzahl ist, wird für ihre Zerlegung in zwei gleiche Factoren nnr ein Quadrat möglich sein.

Sind nämlich

$$\alpha_1 . \beta_1 = \alpha_2 . \beta_2 = \alpha_3 . \beta_3 = \ldots = m$$

die verschiedenen möglichen Zerlegungen in zwei Factoren, so kann das Quadrat für 1 bis $m^2$ gebildet werden

durch $\alpha_i^2$ Quadrate nach dem Schema 1 bis $\beta_i^2$, oder
„ $\beta_i^2$ „ „ „ „ 1 „ $\alpha_i^2$

$$i = 1, 2, 3 \ldots$$

nnd nur für $\alpha_i = \beta_i$ fallen beide Quadrate zusammen. Sind die $\alpha_i$ oder $\beta_i$ ganz oder teilweise zusammengesetzte Zahlen, so können die Teilquadrate analog dadurch gebildet werden, dass $\alpha_i$ resp. $\beta_i$ noch weiter in Primfactoren enthalten, so dass die Anzahl der möglichen verschiedenen Quadratbildungen sehr gross werden kann.

2) $m$ dnrch 4 teilbar, also $= 4k = 2n$.

Eine Herstellung für magische Quadrate mit gerader Basis nach Analogie von § 1. ist selbstverständlich unmöglich, weil dort bei der

Herstellung gerade darauf Rücksicht genommen wurde, dass $m$ ungerade, folglich ein Mittelfeld vorhanden war.

§ 4. Wie im Anfange des § 2. gezeigt wurde, ist das Quadrat hergestellt, sobald man das dort mit (A) bezeichnete System in der verlangten Weise transformirt hat, d. h. sobald man — der Abkürzung wegen

$$(p-1)n+q = a_{p,q}$$

gesetzt — das System

$$\begin{matrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,m} \end{matrix}$$

so umstellen kann, dass nicht irgend zwei Glieder einer und derselben Horizontalreihe denselben vorderen oder denselben hinteren Index haben. Diese Aufgabe scheint sich für gerade Zahlen allgemein nicht lösen, für die Zahlen von der Form $4k$ jedoch successive ableiten zu lassen. Man findet nämlich für die kleinste Zahl $k = 1$, also $n = 4$ mechanisch die Lösung:

$$\left|\begin{matrix} a_{1,1} & a_{2,2} & a_{3,3} & a_{4,4} \\ a_{3,2} & a_{4,1} & a_{1,4} & a_{2,3} \\ a_{4,3} & a_{3,4} & a_{2,1} & a_{1,2} \\ a_{2,4} & a_{1,3} & a_{4,2} & a_{3,1} \end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix} 1 & 6 & 11 & 16 \\ 10 & 13 & 4 & 7 \\ 15 & 12 & 5 & 2 \\ 8 & 3 & 14 & 9 \end{matrix}\right|$$

mit der verlangten Teilsumme 34. Aus diesem Quadrate lassen sich zunächst successive die Quadrate für die Grundzahlen

8, 16, 32, 64, 128 ... $2^\alpha$ ableiten.

Bezeichnet man nämlich das allgemeinere Quadrat:

$$\left|\begin{matrix} a_{4x+1,\,4y+1} & a_{4x+2,\,4y+2} & a_{4x+3,\,4y+3} & a_{4x+4,\,4y+4} \\ a_{4x+3,\,4y+2} & a_{4x+4,\,4y+1} & a_{4x+1,\,4y+4} & a_{4x+2,\,4y+3} \\ a_{4x+4,\,4y+3} & a_{4x+3,\,4y+4} & a_{4x+2,\,4y+1} & a_{4x+1,\,4y+2} \\ a_{4x+2,\,4y+4} & a_{4x+1,\,4y+3} & a_{4x+4,\,4y+2} & a_{4x+3,\,4y+1} \end{matrix}\right|$$

kurz mit $\varphi(x,y)$, so stelle man die vier Quadrate zusammen:

$$\begin{matrix} \varphi(0,0) & \varphi(1,1) \\ \varphi(1,0) & \varphi(0,1) \end{matrix}$$

Dieses System enthält 8 Reihen mit je 8 Gliedern, von denen die wagerechten Reihen sogleich die verlangte Summe geben, weil sie der verlangten Anordnung entsprechen. Bei den senkrechten Reihen erreicht man das dadurch am einfachsten, dass man in den mittelsten

$\frac{m}{2} = 4$ Reihen, diejenigen Glieder, welche gleichweit vom Ende stehen, mit einander vertauscht. Nach Ausführung dieser Vertauschung erhält man für $m = 8$:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{2,2} & a_{3,3} & a_{4,4} & a_{5,5} & a_{6,6} & a_{7,7} & a_{8,8} \\ a_{3,2} & a_{4,1} & a_{1,4} & a_{2,3} & a_{7,6} & a_{8,5} & a_{5,8} & a_{6,7} \\ a_{5,6} & a_{6,5} & a_{7,8} & a_{8,7} & a_{1,2} & a_{2,1} & a_{3,4} & a_{4,3} \\ a_{7,5} & a_{8,6} & a_{5,7} & a_{6,8} & a_{3,1} & a_{4,2} & a_{1,3} & a_{2,4} \\ a_{4,8} & a_{3,7} & a_{2,6} & a_{1,5} & a_{8,4} & a_{7,3} & a_{6,2} & a_{5,1} \\ a_{2,7} & a_{1,8} & a_{4,5} & a_{3,6} & a_{6,3} & a_{5,4} & a_{8,1} & a_{7,2} \\ a_{8,3} & a_{7,4} & a_{6,1} & a_{5,2} & a_{4,7} & a_{3,8} & a_{2,5} & a_{1,6} \\ a_{6,4} & a_{5,3} & a_{8,2} & a_{7,1} & a_{2,8} & a_{1,7} & a_{4,6} & a_{3,5} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 10 & 19 & 28 & 37 & 46 & 55 & 64 \\ 18 & 25 & 4 & 11 & 54 & 61 & 40 & 47 \\ 38 & 45 & 56 & 63 & 2 & 9 & 20 & 27 \\ 53 & 62 & 39 & 48 & 17 & 26 & 3 & 12 \\ 32 & 23 & 14 & 5 & 60 & 51 & 42 & 33 \\ 15 & 8 & 29 & 22 & 43 & 36 & 57 & 50 \\ 59 & 52 & 41 & 34 & 31 & 24 & 13 & 6 \\ 44 & 35 & 58 & 49 & 16 & 7 & 30 & 21 \end{vmatrix}$$

Man überzeugt sich leicht, dass statt der $\frac{m}{2}$ mittelsten Reihen auch $\frac{m}{2}$ andere umgestellt werden können, falls die Auswahl so getroffen wird, dass $\frac{m}{4}$ aus der ersten Hälfte beliebig genommen werden und $\frac{m}{4}$ aus der zweiten Hälfte so, dass dass die in der ersten Hälfte übergangenen nun genommen werden. Für den vorliegenden Fall können also zunächst gewählt werden die Reihen

| | | |
|---|---|---|
| 1, 2, 7, 8 | oder | 3, 4, 5, 6 |
| 1, 3, 6, 8 | „ | 2, 4, 5, 7 |
| 1, 4, 6, 7 | „ | 2, 3, 5, 8. |

Die in demselben Paare stehenden Vertauschungen geben keine wesentlich verschiedenen Lösungen; sie gehen durch Vertauschung der gleichweit vom Ende stehenden Verticalreihen in einander über.

In ganz analoger Weise lässt sich nun das Quadrat

für die Grundzahl 16 aus dem für die Grundzahl 8,
„ „ „ 32 „ „ „ „ „ 16,
„ „ „ 64 „ „ „ „ „ 32

u. s. w. für jede Grundzahl von der Form $2^{\alpha}$ ableiten.

Stellt man nun nach Analogie der in § 2. gezeigten Anordnung der Elemente unter Beibehaltung der Bezeichnung $\varphi(x, y)$ folgende Quadrate zusammen:

$$\begin{vmatrix} \varphi(0,0) & \varphi(1,1) & \varphi(2,2) \\ \varphi(2,1) & \varphi(0,2) & \varphi(1,0) \\ \varphi(1,2) & \varphi(2,0) & \varphi(0,1) \end{vmatrix}$$

so geben diese direct das Quadrat für die Grundzahl 12, $= Q(12)$. Ebenso erhält man:

$$\begin{vmatrix} \varphi(0,0) & \varphi(1,1) & \varphi(2,2) & \varphi(3,3) & \varphi(4,4) \\ \varphi(2,1) & \varphi(3,2) & \varphi(4,3) & \varphi(0,4) & \varphi(1,0) \\ \varphi(4,2) & \varphi(0,3) & \varphi(1,4) & \varphi(2,0) & \varphi(3,1) \\ \varphi(1,3) & \varphi(2,4) & \varphi(3,0) & \varphi(4,1) & \varphi(0,2) \\ \varphi(3,4) & \varphi(4,0) & \varphi(0,1) & \varphi(1,2) & \varphi(2,3) \end{vmatrix} = Q(20)$$

Analog findet man allgemein:

$$\begin{vmatrix} \varphi(0,0) & \varphi(1,1) & \varphi(2,2) & \ldots\varphi(\alpha-2,\alpha-2) & \varphi(\alpha-1,\alpha-1) \\ \varphi(2,1) & \varphi(3,2) & \varphi(4,3) & \ldots\varphi(0,\alpha-1) & \varphi(1,0) \\ \varphi(4,2) & \varphi(5,3) & \varphi(6,4) & \ldots\varphi(2,0) & \varphi(3,1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi(\alpha-4,\alpha-2) & \varphi(\alpha-3,\alpha-1) & \varphi(\alpha-2,0) & \ldots\varphi(\alpha-6,\alpha-4) & \varphi(\alpha-5,\alpha-3) \\ \varphi(\alpha-2,\alpha-1) & \varphi(\alpha-1,0) & \varphi(0,1) & \ldots\varphi(\alpha-4,\alpha-3) & \varphi(\alpha-3,\alpha-2) \end{vmatrix}$$
$$= Q(4\alpha)$$

worin $\alpha$ eine ungerade Zahl bedeutet.

Auf diese Weise lassen sich folgende Quadrate bilden:

$$Q(4) \quad Q(12) \quad Q(20) \quad Q(28) \quad Q(36) \ldots Q(4(2\lambda+1))$$

ebenso erhält man successive aus $Q(8)$, $Q(16)$ ... die Reihen

$$Q(8) \quad Q(24) \quad Q(40) \quad Q(56) \quad Q(72) \ldots Q(8(2\lambda+1))$$
$$Q(16) \quad Q(48) \quad Q(80) \quad Q(112) \quad Q(144) \ldots Q(16(2\lambda+1))$$

u. s. w.

Da nun jede durch 4 teilbare Zahl notwendig die Form

$$2^{\alpha}(2\lambda+1) \quad \alpha \geqq 2, \quad \lambda \geqq 0$$

$\alpha$ und $\lambda$ ganzzahlig

haben muss, ist somit die Darstellbarkeit aller hierher gehörigen Quadrate in einer mit § 2. analogen Weise nachgewiesen.

§ 5. Eine mit der soeben ausgeführten verwandte, aber bequemere Herstellungsweise für Quadrate von der Grundzahl $4k$, welche

Digitized by Google

ungefähr dem § 3. entsprechen würde, lässt sich folgendermassen angeben.

Von der für $k = 1$, also $n = 4$ gefundenen Grundform

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 6 | 11 | 16 |
| 10 | 13 | 4 | 7 |
| 15 | 12 | 5 | 2 |
| 8 | 3 | 14 | 9 |

die einstweilen kurz mit (1, 16) bezeichnet werden möge, ausgehend bilde man die diesem entsprechenden allgemeineren Quadrate

$$(17, 32) \quad (33, 48) \quad (49, 64) \ldots (16\lambda + 1,\ 16\lambda + 16)$$

worin $\lambda = (2p-1)^2 - 1$, $p$ ganzzahlig anzunehmen ist. $\lambda$ hat demnach successive die Werte

$$\lambda = 8,\ 24,\ 48,\ 80,\ 120,\ 168,\ 224 \ldots (2p+1)^2 - 1$$

Für diese Werte ordne man die einzelnen Gruppen entsprechend den Elementen eines Quadrates mit der Grundzahl

$$3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15 \ldots 2p+1$$

um geradstellige Quadrate mit den successiven Grundzahlen:

$$12,\ 20,\ 28,\ 36,\ 44,\ 52,\ 60 \ldots 8p+4$$

zu erhalten.

Um das Quadrat für die Grundzahl 8 zu erhalten, stelle man zusammen:

$$\begin{array}{cc} (1,\ 16) & (49,\ 64) \\ (17,\ 32) & (33,\ 48) \end{array}$$

und vertausche dann wieder in vier nach Massgabe des vorigen § zu bestimmenden Horizontalreihen diejenigen Glieder, welche gleichweit vom Ende stehen. Bei Benutzung der vier mittelsten Reihen erhält man dann:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 6 | 11 | 16 | 49 | 54 | 59 | 64 |
| 10 | 13 | 4 | 7 | 58 | 61 | 52 | 55 |
| 50 | 53 | 60 | 63 | 2 | 5 | 12 | 15 |
| 57 | 62 | 51 | 56 | 9 | 14 | 3 | 8 |
| 48 | 43 | 38 | 33 | 32 | 27 | 22 | 17 |
| 39 | 36 | 45 | 42 | 23 | 30 | 29 | 26 |
| 31 | 28 | 21 | 18 | 47 | 44 | 37 | 34 |
| 24 | 19 | 30 | 25 | 40 | 35 | 46 | 41 |

$= Q(8)$

Aus der Herleitnng des Quadrates ergibt sich als Teilsnmme für die Horizontalreihen

$$\text{teils } 2.34+4.0+4.48=260$$

$$\text{teils } 2.34+4.16+4.32=260$$

für die Verticalreihen dagegen überall:

$$2.34+2.0+2.16+2.32+2.48=260.$$

Nun kann man aber nacb directer Analogie von § 3. wieder ans $Q(8)$ die Reibe:

$$Q(8) \quad Q(24) \quad Q(40) \quad Q(56) \ldots$$

ableiten. Ferner folgt weiter $Q(16)$ ans $Q(8)$ ebenso wie dies ans $Q(4)$, ebenso findet man $Q(32)$ $Q(64)$ ..., die für sicb wieder die in § 4. angedeuteten Reihen von Quadraten ergeben, so dass anch in dieser Darstellnngsweise jedes $Q(4k)$ berücksicbtigt ist.

§ 6. Eine einfache, für jedes $4k$ ohne Unterscbied gleichmässig anzuwendende Darstellnngsweise ist folgende ($4k = 2n$ gesetzt).

Man scbreibt in die erste Verticalreihe die ersten $n$ ungeraden Zahlen vom obersten Felde an und jedesmal eins überschlagend; in die offen gebliebenen Felder die letzten $n$ geraden Zahlen, von nnten anfangend. Sodann kommen in die letzte Verticalreihe die ersten $n$ geraden Zahlen, in das 2te, 4te ... $2n$te Feld von oben an und in die Lücken dio letzten $n$ ungeraden Zahlen von nnten an.

Dann setzt man in die zweitletzte Verticalreihe die zweiten $n$ ungeraden Zahlen, vom untersten Felde beginnend nnd jedesmal eins überscblagend und die zweitletzten $n$ geraden Zablen, von oben beginnend, in die Lücken. In die zweite Reihe kommen die zweiten $n$ geraden Zahlen vom zweitnntersten Felde an anfwärts, jedesmal eins überschlagend nnd die zweitletzten $n$ nngeraden Zahlen vom zweitobersten Felde an abwärts in die Lücken. In die dritte Reihe die dritten $n$ nngeraden Zahlen, vom obersten Felde an, jedesmal eins überschlagend, in die Lücken die drittletzten $n$ geraden Zahlen von unten an n. s. w.

Nacb diesem Scbema bat man für $n = 4$ oder $k = 2$ als Beispiel:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 16 | 17 | 32 | 34 | 47 | 50 | 63 |
| 64 | 49 | 48 | 33 | 31 | 18 | 15 | 2 |
| 3 | 14 | 19 | 30 | 36 | 45 | 52 | 61 |
| 62 | 51 | 46 | 35 | 29 | 20 | 13 | 4 |
| 5 | 12 | 21 | 28 | 38 | 43 | 54 | 59 |
| 60 | 53 | 44 | 37 | 27 | 22 | 11 | 6 |
| 7 | 10 | 23 | 26 | 40 | 41 | 56 | 57 |
| 58 | 55 | 42 | 39 | 25 | 24 | 9 | 8 |

$= Q(8)$

Der allgemeine Beweis für die Richtigkeit der Anordnung ist in folgender Weise zu führen:

a. Für die Verticalreihen.

In der ersten Verticalreihe stehen die Zahlen:

$$[1+3+5+\ldots 2n-1]+[4n^2+(4n^2-2)+(4n^2-4)+\ldots(4n^2-\overline{2n-2})]$$

$$= n^2 \qquad +4n^3-(2+4+\ldots 2n-2)$$

$$= n^2+4n^3-n(n-1) = 4n^3+n, \text{ oder weil } n=\frac{m}{2} \text{ ist}$$

$$= \frac{m^3+m}{2}$$

welches die verlangte Summe ist. In der letzten Verticalreihe dagegen stehen:

$$[2+4+6+\ldots 2n]+[(4n^2-1)+(4n^2-3)+(4n^2-5)+\ldots(4n^2-\overline{2n-1})]$$

d. h. in der einen Hälfte ist jedes Glied um 1 grösser, in der andern um 1 kleiner als ein entsprechendes Glied der ersten Verticalreihe, die Gesammtsumme beider Reihen muss demnach dieselbe sein.

In der vorletzten Verticalreihe stehen:

$$[(2n+1)+(2n+3)+(4n-1)]+[(4n^2-2n)+(4n^2-\overline{2n+2})+(4n^2-\overline{2n+4})$$
$$+\ldots-(4n^2-\overline{4n-2})]$$

d. h. $n$ Zahlen sind um je $2n$ grösser und $n$ Zahlen um je $2n$ kleiner als die entsprechenden in der ersten Verticalreihe. Die zweite Verticalreihe mit der Summe:

$$[(2n+2)+(2n+4)+\ldots+4n)]+[(4n^2-\overline{2n+1})+(4n^2-\overline{2n+3})$$
$$+(4n^2-\overline{2n+5})+\ldots+(4n^2-\overline{4n-1})$$

steht zur letzten in derselben Beziehung.

Ebenso vergrössern sich in der dritten und drittletzten Reihe gegen die beiden äussersten Reihen $n$ Glieder um je $4n$, während die andern $n$ Glieder um eben soviel kleiner werden. Dieselbe Rolle spielt

| | | | |
|---|---|---|---|
| in der vierten und viertletzten | Reihe | die Grösse | $6n$ |
| „ „ fünften „ fünftletzten | „ | „ „ | $8n$ |
| . . . . . . . . . . . . | | | |
| „ „ $\lambda$ten und $\lambda$letzten | „ | „ „ | $2(\lambda-1)n$ *). |

b. Für die Horizontalreihen.

In der ersten Horizontalreihe stehen, jedesmal von den Grenzen gleichweit entfernt, die Glieder

| | | |
|---|---|---|
| $1$ | und | $4n^2-1$ |
| $2.2n$ | „ | $4n^2-(2.2n-2)$ |
| $2.2n+1$ | „ | $4n^2-(2.2n+1)$ |
| $4.2n$ | „ | $4n^2-(4.2n-2)$ |
| $4.2n+1$ | „ | $4n^2-(4.2n+1)$ |
| $6.2n$ | „ | $4n^2-(6.2n-2)$ |
| . . . . . | | . . . . . |

Die Summe des ersten, dritten, fünften u. s. w. Paares ist jedesmal $4n^2$, dagegen die Snmme des zweiten, vierten, sechsten n. s. w. Paares jedesmal $4n^2+2$.

Da $n$ Paare vorhanden sind, und $n$ als gerade vorausgesetzt ist, treten beide Snmmen $\frac{n}{2}$mal auf, d. h. die Gesammtsnmme ist:

$$4n^2 \cdot \frac{n}{2} + (4n^2+2)\frac{n}{2} = 4n^3+n.$$

In der zweiten Horizontalreihe zeigt sich analog, dass die Summe im

| | | |
|---|---|---|
| ersten, dritten, fünften n. s. w. | Paare | $= 4n^2+2$ |
| zweiten, vierten, sechsten u. s. w. | „ | $= 4n^2$ |

ist. Die Gesammtsnmme ist demnach dieselbe. Es stehen sich nämlich gegenüber

| | | |
|---|---|---|
| $4n^2$ | nnd | $2$ |
| $4n^2-(2.2n-1)$ | „ | $2.2n-1$ |
| $4n^2-2.2n$ | „ | $2.2n+2$ |
| $4n^2-(4.2n-1)$ | „ | $4.2n-1$ |
| $4n^2-4.2n$ | „ | $4.2n+2$ |
| . . . . . | | . . . . . |

*) Kürzer: Jede Verticalreihe enthält nach der Anordnung je $n$ Paare mit der Summe $4n^2+1$, also

$$n(4n^2+1) = 4n^3+n.$$

Stellt man das System vollständig auf, so findet man, dass der Beweis für die ungeradstelligen Horizontalreihen analog der ersten, für die geradstelligen analog der zweiten zu führen ist.

§ 7. Eine der vorigen ähnliche Lösung ist folgende:

Man ersetze die Zahlen

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1, | 3, | 5 | ...$2n-1$ | d. Reihe nach durch | 1, | 2, | 3, | ...$n$ |
| 2, | 4, | 6 | ...$2n$ | „ „ „ „ | $n+1$, | $n+2$, | $n+3$ | ...$2n$ |
| $2n+1$, | $2n+3$; | $2n+5$ | ...$4n-1$, | „ „ „ „ | $2n+1$, | $2n+2$, | $2n+3$ | ...$3n$ |
| $2n+2$, | $2n+4$, | $2n+6$ | ...$4n$ | „ „ „ „ | $3n+1$, | $3n+2$, | $3n+3$ | ...$4n$ |

u. s. w.

Für $n = 4$ oder $k = 2$ hat man dann das Beispiel:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 16 | 17 | 32 | 37 | 44 | 53 | 60 |
| 64 | 49 | 48 | 33 | 28 | 21 | 12 | 5 |
| 2 | 15 | 18 | 31 | 38 | 43 | 54 | 59 |
| 63 | 50 | 47 | 34 | 27 | 22 | 11 | 6 |
| 3 | 14 | 19 | 30 | 39 | 42 | 55 | 58 |
| 62 | 51 | 46 | 35 | 26 | 23 | 10 | 7 |
| 4 | 13 | 20 | 29 | 40 | 41 | 56 | 57 |
| 61 | 52 | 45 | 36 | 25 | 24 | 9 | 8 |

$= Q(8)$

Für die Verticalreihen ist der Beweis direct auf den vorigen Fall zurückzuführen, da hier wie dort je zwei auf einander folgende Glieder jeder Verticalreihe die Summe $4n^2+1$ haben; da $n$ solcher Paare vorhanden sind, ist die Gesammtsumme $4n^3+n$. Dagegen stehen in den Horizontalreihen Paare, deren Summe abwechselnd

$$4n^2-n+1 \text{ und } 4n^2+n+1 \text{ ist.}$$

Die Gesammtsumme ist also:

$$\frac{n}{2}(8n^2+2) = 4n^3+n.$$

§ 8. Eine andere ebenfalls für jede Grundzahl $m = 4k$ anwendbare Auflösung findet in folgender Herstellungsregel Ausdruck:

Man schreibe in die ersten $\frac{m}{4}$ Felder der ersten Verticalreihe die ersten $\frac{m}{4}$ ungeraden Zahlen; in die direct darunter folgenden $\frac{m}{2}$ Felder der letzten Verticalreihe die folgenden $\frac{m}{2}$ ungeraden Zah-

Digitized by Google

len, in die letzten $\frac{m}{4}$ Felder der ersten Verticalreihe die dann folgenden ungeraden Zahlen. In die in diesen beiden Reihen auf diese Weise gelassenen Lücken stelle man die $m$ letzten geraden Zahlen, von $m^2$ abwärts, so dass sich stets zwei Zahlen gegenüberstehen, die von 1 und $m^2$ gleich weit entfernt sind. Ebenso behandle man die zweite und zweitletzte Verticalreihe, indem man die ungeraden Zahlen 1, 3, 5 ... durch die geraden 2, 4, 6 ... und die geraden Zahlen $m^2$, $m^2-2$, $m^2-4$ ... durch die ungeraden $m^2-1$, $m^2-3$, $m^2-5$ ersetzt. Die dritte und drittletzte Reihe nimmt dann in genau entsprechender Weise die zweiten $m$ ungeraden und die zweitletzten $m$ geraden Zahlen auf, während auf die vierte und viertletzte Reihe die zweiten $m$ geraden und die zweitletzten $m$ ungeraden Zahlen fallen u. s. w. Dieser Form entspricht die folgende Anordnung für $Q(8)$.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 17 | 18 | 47 | 48 | 63 | 64 |
| 3 | 4 | 19 | 20 | 45 | 46 | 61 | 62 |
| 60 | 59 | 44 | 43 | 22 | 21 | 6 | 5 |
| 58 | 57 | 42 | 41 | 24 | 23 | 8 | 7 |
| 56 | 55 | 40 | 39 | 26 | 25 | 10 | 9 |
| 54 | 53 | 38 | 37 | 28 | 27 | 12 | 11 |
| 13 | 14 | 29 | 30 | 35 | 36 | 51 | 52 |
| 15 | 16 | 31 | 32 | 33 | 34 | 49 | 50 |

$= Q(8)$

Der allgemeine Beweis ist folgender: Die Summe einer jeden einzelnen Verticalreihe besteht aus 3 Teilen; diese sind bei der ersten:

$$\alpha)\ 1+3+5+\dots\frac{m}{2}-1=\frac{m^2}{16}$$

$$\beta)\ \left(m^2-\frac{m}{2}\right)+\left(m^2-\overline{\frac{m}{2}+2}\right)+\left(m^2-\overline{\frac{m}{2}+4}\right)+\dots+\left(m^2-\overline{\frac{3m}{2}-2}\right)$$
$$=\frac{m^3-m^2+m}{2}$$

$$\gamma)\ \left(\frac{3m}{2}+1\right)+\left(\frac{3m}{2}+3\right)+\dots\left(\frac{3m}{2}+\overline{\frac{m}{2}-1}\right)=\frac{7m^2}{16}$$

Nun ist aber

$$\frac{m^2}{16}+\frac{m^3-m^2+m}{2}+\frac{7m^2}{16}=\frac{m^3+m}{2}=4n^2+n.$$

In der zweiten Verticalreihe sind $\frac{m}{2}$ Zahlen um 1 vergrössert,

die andern $\frac{m}{2}$ um 1 verkleinert gegen die entsprechenden in der ersten Verticalreihe, die Summe muss demnach dieselbe sein.

In der dritten resp. vierten Verticalreihe tritt in dem obersten und untersten Viertel eine Vermehrung um die Grösse $2m$ für jedes Glied gegen das entsprechende der ersten resp. zweiten hinzu, in der mittleren Hälfte eine ebenso grosse Verminderung. Beide heben sich also auf. In den folgenden Paaren von Verticalreihen bis zur Mitte des Quadrates geben die successiven Zahlen

$$4m, \ 6m, \ \ldots \ \left(\frac{m}{2}-2\right)m$$

die respective Vermehrung oder Verminderung jedes Gliedes an. Auch die zweite Hälfte des Quadrates enthält dieselben Zahlen in je 2 aufeinander folgenden Reihen, nur dadurch verändert, dass die Reihe $\alpha$) $\beta$) $\gamma$) in umgekehrter Richtung zu lesen ist, und dass als Addendus resp. Subtrahendus die Zahlen

$$\frac{m}{2}m, \ \left(\frac{m}{2}+2\right)m, \ \left(\frac{m}{2}+4\right)m, \ \ldots \ (m-2)m$$

successive hinzutreten. Mithin ist die Summe in allen Verticalreihen dieselbe.

Für die Horizontalreihen ergibt sich der Beweis direct aus dem Umstande, dass nach der oben angegebenen Anordnung je zwei Glieder, die in derselben Horizontalreihe gleichweit vom Ende stehen, die Summe $m^2+1$ haben. Nun sind $\frac{m}{2}$ Paare vorhanden, also die Summe

$$\frac{m}{2}(m^2+1) = \frac{m^3+m}{2}.$$

§ 9. Ebenso, wie vorhin aus § 6. eine neue Lösung in § 7. abgeleitet wurde, kann man nun auch aus der eben in § 8. aufgestellten eine ähnliche entnehmen.

Man setze in die erste Verticalreihe zunächst die ersten $\frac{m}{4}$ Zahlen, sodann in die darunter folgenden $\frac{m}{2}$ Stellen der letzten Verticalreihe die folgenden $\frac{m}{2}$ Zahlen von $\frac{m}{4}+1$ bis $\frac{3m}{4}$ und in die letzten $\frac{m}{4}$ Stellen der ersten Verticalreihe die Zahlen von $\frac{3m}{4}+1$ bis $m$. In die Lücken, welche in diesen beiden Reihen geblieben sind, setze man die letzten $m$ Zahlen wieder so, dass je zwei sich gegenüber-

stehende Zahlen die Summe $m^2+1$ geben. In der zweiten und zweitletzten Reihe bringe man in analoger Weise die Zahlen $m+1$ bis $2m$ und $(m-2)m+1$ bis $(m-1)m$ unter, ebenso in der dritten und drittletzten die Zahlen $2m+1$ bis $3m$ und $(m-3)m+1$ bis $(m-2)m$ u. s. w.

Das vorige Beispiel hiernach transformirt, hat man:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 9 | 17 | 25 | 40 | 48 | 56 | 64 |
| 2 | 10 | 18 | 26 | 39 | 47 | 55 | 63 |
| 62 | 54 | 46 | 38 | 27 | 19 | 11 | 3 |
| 61 | 53 | 45 | 37 | 28 | 20 | 12 | 4 |
| 60 | 52 | 44 | 36 | 29 | 21 | 13 | 5 |
| 59 | 51 | 43 | 35 | 30 | 22 | 14 | 6 |
| 7 | 15 | 23 | 31 | 34 | 42 | 50 | 58 |
| 8 | 16 | 24 | 32 | 33 | 41 | 49 | 57 |

$= Q(8)$

Beweis. Die den obigen entsprechenden Gruppen haben jetzt die Teilsummen:

$$\alpha)\ 1+2+\ldots\frac{m}{4} = \frac{m}{8}\left(\frac{m}{4}+1\right) = \frac{m^2}{32}+\frac{m}{8}$$

$$\beta)\ \left[(m-1)m+\frac{m}{4}+1\right]+\left[(m-1)m+\frac{m}{4}+2\right]+\ldots+\left[(m-1)m+\frac{3m}{4}\right] = \frac{m^3}{2}-\frac{m^2-m}{4}$$

$$\gamma)\ \left(\frac{3m}{4}+1\right)+\left(\frac{3m}{4}+2\right)+\ldots+m = \frac{7m^2}{32}+\frac{m}{8}$$

und es ist

$$\frac{m^2}{32}+\frac{m}{8}+\frac{m^3}{2}-\frac{m^2-m}{4}+\frac{7m^2}{32}+\frac{m}{8} = \frac{m^3+m}{2}$$

In der zweiten, dritten, vierten ... letzten Verticalreihe ist nun die eine Hälfte der Glieder gegen die entsprechenden der ersten Verticalreihe um $m$, $2m$, $3m$, ... $(m-1)m$ vermehrt, die andere Hälfte um ebensoviel vermindert worden. Deshalb ist auch hier die Summe aller Verticalreihen gleich.

Für die Horizontalreihen ist der Beweis derselbe wie in § 8.

3) $m$ nicht durch 4, aber durch 2 teilbar, also $m = 4n+2$.

§ 10. Eine allgemein giltige Lösung für die Quadrate dieser Basis ist nicht so einfach aufzustellen, wie für die bisher behandelten Fälle.

Die den §§ 4. nnd 5. analoge Herstellnng scheitert znnächst daran, dass sich das System

$$\begin{matrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \ldots & a_{m,m} \end{matrix}$$

für den Fall $m = 4n + 2$ anscheinend nicht so nmstellen lässt, dass nicht zwei Glieder derselben Horizontalreihe oder Verticalreihe denselben vorderen oder deuselben hinteren Index behalten.

Anch kann man uicht von $n = 0$, also $m = 2$ ausgehend die übrigen Quadrate mittelbar anfstellen, denn für

$$\begin{matrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{matrix} \quad \text{oder} \quad \begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{matrix}$$

ist diese Umstellung absolut unmöglich. Auch übersieht man sofort, dass $Q(2)$ überhaupt nicht darstellbar ist.

Die §§ 8. und 9. nehmen darauf Rücksicht, dass jede Verticalreihe aus $m = 4n$ Gliedern besteht, sich also in vier Teile von gleichviel Gliedern zerlegen lässt. Sie gestatten demnach für den vorliegenden Fall auch keine Analogie. Die einzige der vorigen analoge Lösung ist also nach § 6. resp. 7. zu versuchen, doch wird auch diese eine Zerlegung in die Fälle

$$m = 4n + 2 = 8k + 2$$

nud $m = 4n + 2 = 8k + 6$ verlangen.

Ordnet man die Zahlen zunächst genau nach der in § 6. gegebenen Anweisung, so zeigt sich aus dem dort geführten Beweise, dass die Summe der Verticalreihen sofort die verlangte ist, weil auch in ihnen je 2 anfeinander folgende Glieder die Summe $m^2 + 1$ haben und $\frac{m}{2}$ solcher Paare vorhanden sind. In den Horizontalreihen wurden die Glieder ebenfalls paarweise zusammengefasst und hatten in der ersten, dritten, fünften u. s. w. Horizontalreihe

die ungeradstelligen Paare die Summe $m^2$,
„ geradstelligen „ „ „ $m^2 + 2$,

dagegen in der zweiten, vierten, sechsten u. s. w. Horizontalreihe

die nngeradstelligen Paare die Snmme $m^2 + 2$,
„ geradstelligen „ „ „ $m^2$.

Nun sind jetzt $2n+1$ Paare in jeder Reihe vorhanden, d. h. eine ungerade Anzahl. Mithin überwiegt die Anzahl der ungeradstelligen Paare diejenige der geradstelligen um 1. Daraus geht ferner leicht hervor, dass die Gesammtsumme in der

ersten, dritten, fünften ... Horizontalreihe $= \frac{m^3+m}{2}+1$

zweiten, vierten, sechsten ... " $= \frac{m^3+m}{2}-1$

sein muss. Man ordne also bis auf die beiden mittelsten Verticalreihen ebenso wie dort. In diesen lasse man die Zahlen

$$\tfrac{1}{2}(4n+2)^2+1 \quad \text{bis} \quad \tfrac{1}{2}(4n+2)^2+4n+2$$

unverändert. Von den Zahlen

$$\tfrac{1}{2}(4n+2)^2-(4n+2)+1 \quad \text{bis} \quad \tfrac{1}{2}(4n+2)^2$$

vertausche man die ungeraden mit den um 1 grösseren geraden Zahlen. Dadurch wird der Fehler in den Horizontalreihen ausgeglichen, aber in die beiden mittelsten Verticalreihen $V_{2n+1}$ und $V_{2n+2}$ übertragen, deren erste nun eine um $2n+1$ zu grosse, deren zweite eine um ebensoviel zu kleine Summe gibt. Dieser neue Fehler lässt sich durch folgende Ueberlegung ausgleichen. Es stehen in diesen beiden Reihen die folgenden Zahlen mit nebenstehender Differenz (von unten nach oben gelesen; $\frac{1}{2}(4n+2)^2$ der Kürze wegen $= a$ gesetzt):

| $V_{2n+1}$ | $V_{2n+2}$ | $V_{2n+1} - V_{2n+2}$ |
|---|---|---|
| $a+2$ | $a-1$ | $+3$ |
| $a$ | $a+1$ | $-1$ |
| $a+4$ | $a-3$ | $+7$ |
| $a-2$ | $a+3$ | $-5$ |
| $a+6$ | $a-5$ | $+11$ |
| $a-4$ | $a+5$ | $-9$ |
| . . . | . . . | . . . |

also sind die Differenzen von der Form $4k+1$ negativ,
" " " " " $4k+3$ positiv.

Hat also $2n+1$ die Form $4k+3$, demnach $4n+2$ die Form $8k+6$, so genügt es, die beiden Glieder zu vertauschen, deren Differenz $4k+3$ ist; so gleicht sich der Fehler in den Verticalreihen aus, während in den Horizontalreihen keine Aenderung eintritt. Hat aber $2n+1$ die Form $4k+1$, demnach $4n+2$ die Form $8k+2$, so beachte man die identische Gleichung:

$$4k+1 = 4k-1+4k+3-(4k+1)$$

und vertausche demgemäss in den mittleren Verticalreihen diejenigen Glieder, deren Differenz

$$+(4k-1) \quad -(4k+1) \quad +(4k+3) \text{ ist,}$$

so wächst $V_{2n+1}$ um $2n+1$ und $V_{2n+2}$ nimmt um ebensoviel ab. Wir führen dies für die kleinstmöglichen Beispiele $m = 6$ und $m = 10$ aus, beschränken uns jedoch auf die Darstellung der beiden von § 6. abweichenden Verticalreihen und bezeichnen mit $A$ die nach diesem Paragraphen ausgeführte Anordnung, mit $B$ die erste Correction durch Vertauschung der vorstehend bezeichneten Zahlen, mit $C$ die endgiltige Form. Man hat für

| $m = 6$ | $A$ | $B$ | $C$ |
|---|---|---|---|
| | 13 23 | 14 23 | 14 23 |
| | 24 14 | 24 13 | 24 13 |
| | 15 21 | 16 21 | 16 21 |
| | 22 16 | 22 15 | 22 15 |
| | 17 19 | 18 19 | 18 19 |
| | 20 18 | 20 17 | 17 20 |
| $m = 10$ | $A$ | $B$ | $C$ |
| | 41 59 | 42 59 | 42 59 |
| | 60 42 | 60 41 | 60 41 |
| | 43 57 | 44 57 | 44 57 |
| | 58 44 | 58 43 | 58 43 |
| | 45 55 | 46 55 | 46 55 |
| | 56 46 | 56 45 | 56 45 |
| | 47 53 | 48 53 | 53 48 |
| | 54 48 | 54 47 | 47 54 |
| | 49 51 | 50 51 | 50 51 |
| | 52 50 | 52 49 | 49 52 |

§ 11. Wie die eben behandelte Lösung sich aus § 6. ergab, so scheint sich eine zweite auch aus § 7. herleiten zu lassen, wenn sich auch der Nachweis in allgemeinen Formeln nicht so einfach darstellen lässt. In der Anordnung $A$, die § 7. gleichzustellen wäre, ist die Summe der Verticalreihen die verlangte, in den Horizontalreihen

von ungerader Ordnung ist sie $\frac{m^3+m}{2} - \frac{m}{2} = \frac{m^3}{2}$

" gerader " " " $\frac{m^3+m}{2} + \frac{m}{2} = \frac{m^3}{2} + m$

Durch die in $B$ angedeutete Umstellung wird dieser Fehler wieder in die mittelsten zwei Verticalreihen übertragen, so dass die erstere derselben eine um $\frac{m^2}{4}$ zu grosse Summe, die zweite eine um ebensoviel zu kleine Summe enthält. $V_{2n+1} - V_{2n+2}$ enthält dann der Reihe nach — wieder von unten an — die Werte

$$+(m+1),\ -1,\ +(m+3),\ -3,\ +(m+5),\ -5, \ldots +(2m-1),\ -(m-1)$$

Durch Vertauschung einiger in diesen Reihen sich gegenüberstehenden Glieder wird man stets eine Anordnung, welche die Fehler in $V_{2n+1}$ und $V_{2n+2}$ ausgleicht, ohne die Horizontalreihen zu beeinträchtigen, erhalten können. Ein allgemeines Gesetz scheint darüber nicht zu existiren, auch genügt die Vertauschung von drei Gliederpaaren für diesen Zweck schon bei $m = 18$ nicht mehr.

## II.

### Magische Rechtecke.

§ 12. Bildet man diese Bezeichnung analog der Bezeichnung „magisches Quadrat“, so würde die Aufgabe, ein magisches Rechteck herzustellen, mit der folgenden zusammenfallen:

Es sollen die Zahlen 1 bis $pq$ in $p$ Reihen zu je $q$ so verteilt werden, dass sowohl die Summe der einzelnen Horizontalreihen unter sich, als auch die Summe der einzelnen Verticalreihen unter sich gleich gross ist. Die resp. Summen müssten dann sein:

$$\frac{p(pq+1)}{2} \quad \text{und} \quad \frac{q(pq+1)}{2}$$

Man überzeugt sich zunächst leicht, dass die erste Bedingung für die Lösbarkeit folgende ist: $p$ und $q$ müssen entweder gleichzeitig gerade oder gleichzeitig ungerade sein.

Ist nämlich erstens $p = 2m$, $q = 2n$, so hat man:

$$1+2+3+\ldots+2m.2n = 2mn(4mn+1),$$

welche Zahl sowohl durch $2m$ als auch durch $2n$ teilbar ist.

Ist zweitens $p = 2m+1$, $q = 2n+1$, so hat man:

$$1+2+3+\ldots+(2m+1)(2n+1) = \frac{(2m+1)(2n+1)\left[(2m+1)(2n+1)+1\right]}{2}.$$

dann ist die eckige Klammer des Ausdruckes rechts geradzahlig, also der ganze Ausdruck durch $2m+1$ und durch $2n+1$ teilbar.

Hat man dagegen $p = (2m+1)$, $q = 2n$, so ist:

$$1+2+3+\ldots+2n(2m+1) = n(2m+1)[2n(2m+1)+1]$$

welcher Ausdruck wohl durch die ungerade Zahl $2m+1$, aber nicht durch die gerade $2n$ teilbar ist. Die Teilbarkeit der Gesammtsumme durch die beiden Factoren $p$ und $q$ der Endzahl ist aber Bedingung dafür, dass die obigen Formeln für die Teilsummen ganzzahlige Werte geben. Bezeichnet also $R(x, y)$ das Rechteck aus den Zahlen 1 bis $xy$, so ist danach $R(2n, 2m+1)$ von der Betrachtung auszuschliessen.

§ 13. Die Lösung für die Rechtecke der ersten Art ($p = 2m$, $q = 2n$) zeigt eine bedeutende Aehnlichkeit mit den Lösungen, welche für Quadrate in den §§ 6—10 gegeben sind.

Für Rechtecke, bei denen beide Zahlen $p$ und $q$ durch 4 teilbar sind, lassen sich die Anweisungen aus § 6—9 direct übertragen, weil dort die Quadrate so gebaut sind, dass die Verticalreihen zu je 4 ein vollständig symmetrisches System bilden, nämlich die beiden ersten und die beiden letzten, sodann die dritte, vierte, drittletzte und viertletzte u. s. w. Der Beweis ist vom demjenigen für die betreffenden Quadrate zu wenig abweichend, als dass es nötig wäre, die geringen Umänderungen für denselben auszuführen. Es genügen als Darstellungsbeispiele für das Rechteck $R(4, 8)$ mit den Teilsummen 66 und 132 folgende Formen.

Nach § 6.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 16 | 18 | 31 |
| 32 | 17 | 15 | 2 |
| 3 | 14 | 20 | 29 |
| 30 | 19 | 13 | 4 |
| 5 | 12 | 22 | 27 |
| 28 | 21 | 11 | 6 |
| 7 | 10 | 24 | 25 |
| 26 | 23 | 9 | 8 |

Nach § 7.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 16 | 21 | 28 |
| 32 | 17 | 12 | 5 |
| 2 | 15 | 22 | 27 |
| 31 | 18 | 11 | 6 |
| 3 | 14 | 23 | 26 |
| 30 | 19 | 10 | 7 |
| 4 | 13 | 24 | 25 |
| 29 | 20 | 9 | 8 |

Nach § 8.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 31 | 32 |
| 3 | 4 | 29 | 30 |
| 28 | 27 | 6 | 5 |
| 26 | 25 | 8 | 7 |
| 24 | 23 | 10 | 9 |
| 22 | 21 | 12 | 11 |
| 13 | 14 | 19 | 20 |
| 15 | 16 | 17 | 18 |

Nach § 9.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 9 | 24 | 32 |
| 2 | 10 | 23 | 31 |
| 30 | 22 | 11 | 3 |
| 29 | 21 | 12 | 4 |
| 28 | 20 | 13 | 5 |
| 27 | 19 | 14 | 6 |
| 7 | 15 | 18 | 26 |
| 8 | 16 | 17 | 25 |

Bezeichnet man diese Systeme mit $R(4,8)$, so lassen sich nun selbstredend auch noch vier andere Formen $R(8,4)$ successive nach denselben Paragraphen bilden.

Wenn eine der beiden Zahlen $p$ und $q$ durch 4, die andere nur durch 2 teilbar ist, so sind directe Darstellungen nur möglich nach Analogie von § 6. und 7., wenn man die durch 4 teilbare Zahl zur Horizontalseite des Rechteckes nimmt, dagegen nach Analogie von § 8. und 9., wenn man diese Zahl zur Verticalseite bestimmt. Diese Forderung begründet sich leicht durch die Beweise für die betreffenden Quadrate. Die hiernach zulässigen vier Lösungen für das Beispiel $R(4,6)$ resp. $R(6,4)$ mit den Teilsummen 50 und 75 sind:

Nach § 6.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 12 | 14 | 23 |
| 24 | 13 | 11 | 2 |
| 3 | 10 | 16 | 21 |
| 22 | 15 | 9 | 4 |
| 5 | 8 | 18 | 19 |
| 20 | 17 | 7 | 6 |

Nach § 7.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 12 | 16 | 21 |
| 24 | 13 | 9 | 4 |
| 2 | 11 | 17 | 20 |
| 23 | 14 | 8 | 5 |
| 3 | 10 | 18 | 19 |
| 22 | 15 | 7 | 6 |

Nach § 8.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 9 | 16 | 23 | 24 |
| 22 | 21 | 14 | 11 | 4 | 3 |
| 20 | 19 | 12 | 13 | 6 | 5 |
| 7 | 8 | 15 | 10 | 17 | 18 |

Nach § 9.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 9 | 16 | 20 | 24 |
| 23 | 19 | 15 | 10 | 6 | 2 |
| 22 | 18 | 14 | 11 | 7 | 3 |
| 4 | 8 | 12 | 13 | 17 | 21 |

Ist endlich keine der Zahlen $p$ und $q$ durch 4 teilbar, so sind nur Lösungen möglich, welche den Lösungen für $Q(4n+2)$ in § 10. und 11. entsprechen. Die Transformation, welche für die beiden mittelsten Verticalreihen notwendig ist, ist ebenso wie dort verschieden, je nachdem die betreffende Zahl die Form $8k+2$ oder $8k+6$ hat. [Es kann hieraus auch noch eine mittelbare, aber umständliche Lösung für den vorigen Fall abgeleitet werden]. Beispiele sind leicht zu bilden.

§ 14. Für den zweiten Hauptfall ($p$ und $q$ ungerade) scheint sich eine allgemeine Lösung nicht leicht aufstellen zu lassen. Wohl aber gelingt dies für den speciellen Fall $q = p^2$, also für das Rechteck $R(p, p^2)$. Die Teilsummen sind für diesen Fall:

$$\frac{p(p^3+1)}{2} \quad \text{und} \quad \frac{p^2(p^3+1)}{2}$$

Man bilde sich folgende allgemeinere Quadrate nach § 1. oder 2, eventuell auch nach § 3. und setze sie mit den gleichstelligen Verticalreihen unter einander:

| | | |
|---|---|---|
| $(1, p^2)$ | mit der Teilsumme | $\frac{p(p^2+1)}{2}$ |
| $(p^2+1, 2p^2)$ | " " " | $\frac{p(p^2+1)}{2}+p^3$ |
| $(2p^2+1, 3p^2)$ | " " " | $\frac{p(p^2+1)}{2}+2p^3$ |
| . . . . . . . . . . | . . . . . . . . . . | . . . |
| $((p-1)p^2+1, p^3)$ | " " " | $\frac{p(p^2+1)}{2}+(p-1)p^3$ |

Stehen die Quadrate so unter einander, so sind diese Teilsummen gleichzeitig Summen der ersten, zweiten, dritten ... $p$ten $p$ Horizontalreihen. Die Summe der Teilsummen dagegen gibt die Summe der Verticalreihen; diese ist also:

$$\frac{p^2(p^2+1)}{2}+p^3.\frac{p(p-1)}{2}=\frac{p^2(p^3+1)}{2},$$

also die verlangte. Es bleiben also noch die Horizontalreihen umzuformen. Vertauscht man die Verticalreihen der einzelnen Quadrate so, dass jedesmal eine Verticalreihe des ersten, eine zweite des zweiten, eine dritte des dritten, ... eine $p$te des $p$ten Quadrates zusammengestellt wird, so wird man die veränderte Horizontalsumme erhalten, wenn man die Teilsumme des ersten Quadrates um die Zahlen vermehrt, um die jedes Glied der einzelnen Quadrate gegen das entsprechende des ersten Quadrates vermehrt worden ist. Man findet also für die nunmehrigen Horizontalreihen die Summe

$$\frac{p(p^2+1)}{2}+p^2+2p^2+3p^2+\ldots(p-1)p^2=\frac{p(p^3+1)}{2},$$

wie oben verlangt wurde. Bezeichnet man die Verticalreihen des $i$ten Quadrates mit $A_{i,1}, A_{i,2} \ldots A_{i,p}$, so erhält man die gewünschte Anordnung sofort durch die Umstellung (cf. § 2.):

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_{1,1}$ | $A_{2,2}$ | $A_{3,3}$ | ... | $A_{p-1,p-1}$ | $A_{p,p}$ |
| $A_{2,1}$ | $A_{3,2}$ | $A_{4,3}$ | ... | $A_{p,p-1}$ | $A_{1,p}$ |
| $A_{3,1}$ | $A_{4,2}$ | $A_{5,3}$ | ... | $A_{1,p-1}$ | $A_{2,p}$ |
| . . . | . . . | . . . | . . . | . . . | . . . |
| $A_{p-1,1}$ | $A_{p,2}$ | $A_{1,3}$ | ... | $A_{p-3,p-1}$ | $A_{p-2,p}$ |
| $A_{p,1}$ | $A_{1,2}$ | $A_{2,3}$ | ... | $A_{p-2,p-1}$ | $A_{p-1,p}$. |

In dem folgenden Beispiele $R(3, 9)$ für $p = 3$ bedeutet $A$ die natürliche Anordnung der drei unter einander gestellten Quadrate (nach § 1. gebildet), $B$ das durch die angedeuteten Vertauschungen erhaltene Resultat:

| A. | | | B. | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 9 | 2 | 4 | 18 | 20 |
| 3 | 5 | 7 | 3 | 14 | 25 |
| 8 | 1 | 6 | 8 | 10 | 24 |
| 13 | 18 | 11 | 13 | 27 | 2 |
| 12 | 14 | 16 | 12 | 23 | 7 |
| 17 | 10 | 15 | 17 | 19 | 6 |
| 22 | 27 | 20 | 22 | 9 | 11 |
| 21 | 23 | 25 | 21 | 5 | 16 |
| 26 | 19 | 24 | 26 | 1 | 15 |

Die Teilsummen sind in diesem Falle 42 resp. 126.

Anmerkung. Für Quadrate sowohl als Rechtecke gilt noch, dass nach geschehener Anordnung sowohl die Horizontalreihen als auch die Verticalreihen beliebig unter sich vertauscht werden können, weil dadurch die Teilsummen nicht geändert werden. Auf § 1. ist diese Bemerkung selbstverständlich nur dann auszudehnen, wenn davon abgesehen wird, dass auch die Diagonalen die verlangte Summe haben sollen.

## III.

### Magische Kuben.

§ 15. Durch die in § 14. ausgeführte Behandlung specieller magischer Rechtecke wird man darauf geführt, magische Kuben aufzustellen, d. h. die Zahlen von 1 bis $n^3$ nach 3 verschiedenen Richtungen so anzuordnen, dass die Teilsummen aus je $n$ Gliedern bestehen und sämmtlich gleich gross sind. Da $n^2$ solcher Teilsummen vorhanden sind, werden, wie leicht ersichtlich, diese Teilsummen gleich

$$\frac{n^3(n^3+1)}{2} : n^2 = \frac{n(n^3+1)}{2} = \frac{n^4+n}{2} \quad \text{sein müssen.}$$

Es wird das erreicht sein, sobald das System

$$\begin{array}{cccc} A_{1,1} & A_{1,2} & \ldots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \ldots & A_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \ldots & A_{n,n} \end{array}$$

so umgestellt werden kann, dass nicht zwei Glieder derselben Horizontalreihe oder Verticalreihe denselben vorderen oder hinteren Index behalten. Diese Aufgabe ist nach § 2. und 4. lösbar für solche $n$, welche entweder ungerade oder durch 4 teilbar sind.

Die Herstellungsregel für die Kuben würde demnach sein:

Bezeichnet man die Glieder von $Q(n)$ mit

$$\begin{array}{cccc} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n}, \end{array}$$

so dass also:

$$a_{i,1}+a_{i,2}+\dots+a_{i,n}=a_{1,k}+a_{2,k}+\dots+a_{n,k}=\frac{n(n^2+1)}{2}$$

$$i=1,2,3\dots n \quad k=1,2,3\dots n$$

so stelle man folgendes System auf:

$$\begin{array}{llllll}
A_{1,1}\equiv a_{1,1} & n^2+a_{1,2} & 2n^2+a_{1,3} & \dots & (n-2)n^2+a_{1,n-1} & (n-1)n^2+a_{1,n} \\
A_{1,2}\equiv a_{2,1} & n^2+a_{2,2} & 2n^2+a_{2,3} & \dots & (n-2)n^2+a_{2,n-1} & (n-1)n^2+a_{2,n} \\
\dots & & & & & \\
A_{1,n}\equiv a_{n,1} & n^2+a_{n,2} & 2n^2+a_{n,3} & \dots & (n-2)n^2+a_{n,n-1} & (n-1)n^2+a_{n,n} \\
A_{2,1}\equiv n^2+a_{1,1} & 2n^2+a_{1,2} & 3n^2+a_{1,3} & \dots & (n-1)n^2+a_{1,n-1} & a_{1,n} \\
A_{2,2}\equiv n^2+a_{2,1} & 2n^2+a_{2,2} & 3n^2+a_{2,3} & \dots & (n-1)n^2+a_{2,n-1} & a_{2,n} \\
\dots & & & & & \\
A_{2,n}\equiv n^2+a_{n,1} & 2n^2+a_{n,2} & 3n^2+a_{n,3} & \dots & (n-1)n^2+a_{n,n-1} & a_{n,n} \\
A_{3,1}\equiv 2n^2+a_{1,1} & 3n^2+a_{1,2} & 4n^2+a_{1,3} & \dots & a_{1,n-1} & n^2+a_{1,n} \\
A_{3,2}\equiv 2n^2+a_{2,1} & 3n^2+a_{2,2} & 4n^2+a_{2,3} & \dots & a_{2,n-1} & n^2+a_{2,n} \\
\dots & & & & & \\
A_{3,n}\equiv 2n^2+a_{n,1} & 3n^2+a_{n,2} & 4n^2+a_{n,3} & \dots & a_{n,n-1} & n^2+a_{n,n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
A_{n,1}\equiv (n-1)n^2+a_{1,1} & a_{1,2} & n^2+a_{1,3} & \dots & (n-3)n^2+a_{1,n-1} & (n-2)n^2+a_{1,n} \\
A_{n,2}\equiv (n-1)n^2+a_{2,1} & a_{2,2} & n^2+a_{2,3} & \dots & (n-3)n^2+a_{2,n-1} & (n-2)n^2+a_{2,n} \\
\dots & & & & & \\
A_{n,n}\equiv (n-1)n^2+a_{n,1} & a_{n,2} & n^2+a_{n,3} & \dots & (n-3)n^2+a_{n,n-1} & (n-2)n^2+a_{n,n}
\end{array}$$

und ordne die $A_{i,k}$

nach § 1. oder 2. für den Fall $n=2\lambda+1$
" § 4. " " " $n=4\lambda$

so, dass nicht für zwei Glieder derselben Horizontalreihe oder Verticalreihe $i$ oder $k$ gleich gross wird.

Der Beweis liegt auf der Hand. In jeder Richtnng findet man eine der Reihen

$$a_{i,1} \quad a_{i,2} \quad \dots \quad a_{i,n}$$

$$\text{oder} \quad a_{1,k} \quad a_{2,k} \quad \dots \quad a_{n,k}$$

mit der Snmme $\frac{n(n^2+1)}{2}$ nnd ansserdem die Summanden

$$0, \quad n^2, \quad 2n^2, \quad 3n^2 \quad \dots \quad (n-1)n^2$$

welche nach § 14 zusammen mit $\frac{n(n^2+1)}{2}$ die verlangte Snmme geben. Als die drei Richtnngen sind anzusehen die Horizontalreihen und Verticalreihen der $n$ Teilqnadrate und diejenigen Glieder, welche in diesen Qnadraten dieselbe horizontale nnd verticale Stellung einnehmen.

Beispiele für $n = 3$ (nach § 2.) und $n = 4$ (nach § 4.):

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 14 | 27 |
| 17 | 21 | 4 |
| 24 | 7 | 11 |
| 15 | 25 | 2 |
| 19 | 5 | 18 |
| 8 | 12 | 22 |
| 26 | 3 | 13 |
| 6 | 16 | 20 |
| 10 | 23 | 9 |

Teilsnmme 42

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 22 | 43 | 64 |
| 26 | 45 | 52 | 7 |
| 47 | 60 | 5 | 18 |
| 56 | 3 | 30 | 41 |
| 42 | 61 | 4 | 23 |
| 49 | 6 | 27 | 48 |
| 8 | 19 | 46 | 57 |
| 31 | 44 | 53 | 2 |
| 63 | 12 | 21 | 34 |
| 40 | 51 | 14 | 25 |
| 17 | 38 | 59 | 16 |
| 10 | 29 | 36 | 55 |
| 24 | 35 | 62 | 9 |
| 15 | 28 | 37 | 50 |
| 58 | 13 | 20 | 39 |
| 33 | 54 | 11 | 32 |

Teilsumme 130.

Für $n = 4\lambda + 2$ scheint nach § 10 eine kubische Anordnung auf diesem Wege nicht erreichbar zu sein.

Dass diese Knben, wenn man ihre einzelnen Teilquadrate nicht hintereinander, sondern nebeneinander oder untereinander stellt, eine neue Lösung für $R(n, n^3)$ geben, bedarf keines Beweises.

XXII.

# Zur Zerlegung einer rationalen algebraischen Function in Partialbrüche.

Von

Dr. **Heinrich v. Hoepflingen-Bergendorf**
in Wien

---

Bei der Theorie der Zerlegung einer rationalen algebraischen Function $\frac{f(x)}{F(x)}$ kommt bekanntlich nur der Fall zur näheren Betrachtung, dass jene Function eine echt gebrochene ist. Wir können somit als allgemeinste Form dieser Function identisch

$$(\alpha)\quad \frac{f(x)}{F(x)}=\frac{a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0}{x^n+b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+\ldots+b_2x_2+b_1x+b_0}$$

setzen. Sind nun $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_n$ die $n$ Wurzeln der Gleichung $F(x)=0$, und kommt keine dieser Wurzeln wiederholt vor, so erfolgt die Zerlegung in der bekannten Form

$$(\beta)\quad \frac{f(x)}{F(x)}=\frac{A_1}{x-\alpha_1}+\frac{A_2}{x-\alpha_2}+\ldots+\frac{A_{n-1}}{x-\alpha_{n-1}}+\frac{A_n}{x-\alpha_n},$$

wo $A_1, A_2, A_3 \ldots A_n$ $n$ zu bestimmende Constanten sind. Wählen wir zur Bestimmung dieser Constanten die Methode der unbestimmten Coefficienten, so müssen wir uns zunächst die Gleichung bilden:

$$\begin{aligned}(\gamma)\quad f(x)\equiv\, & A_1[(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\ \ldots\ (x-\alpha_{n-2})(x-\alpha_{n-1})(x-\alpha_n)]\\ & +A_2[(x-\alpha_1)(x-\alpha_3)\ \ldots\ (x-\alpha_{n-1})(x-\alpha_{n-1})(x-\alpha_n)]\\ & +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ & +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ & +A_{n-1}[(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ \ldots\ (x-\alpha_{n-2})(x-\alpha_n)]\\ & +A_n[(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ \ldots\ (x-\alpha_{n-2})(x-\alpha_{n-1})].\end{aligned}$$

Indem wir die Multiplication wirklich ausführen und das Polynom nach Potenzen von $x$ ordnen, erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
(\delta)\quad f(x) &\equiv a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_1x+a_0 \\
&\equiv x^{n-1}[A_1+A_2+\ldots+A_{n-1}+A_n] \\
&+x^{n-2}[A_1\{-(\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_{n-1}+\alpha_n)\} \\
&\qquad\qquad +A_2\{-(\alpha_1+\alpha_3+\ldots+\alpha_{n-1}+\alpha_n)\} \\
&\quad +A_{n-1}\{-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\ldots+\alpha_n)\} \\
&\qquad\qquad +A_n\{-(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{n-2}+\alpha_{n-1})\}] \\
&+x^{n-3}[A_1\{\alpha_2(\alpha_3+\alpha_4+\ldots+\alpha_n)+\alpha_3(\alpha_4+\alpha_5+\ldots+\alpha_{n-1}+\alpha_n) \\
&\qquad\qquad +\ldots+\alpha_{n-2}(\alpha_{n-1}+\alpha_n)+\alpha_{n-1}\alpha_n\} \\
&\quad +A_2\{\alpha_1(\alpha_3+\alpha_4+\ldots+\alpha_n)+\alpha_3(\alpha_4+\alpha_5+\ldots+\alpha_{n-1}+\alpha_n) \\
&\qquad\qquad +\ldots+\alpha_{n-2}(\alpha_{n-1}+\alpha_n)+\alpha_{n-1}\alpha_n\} \\
&\quad +A_3\{\alpha_1(\alpha_2+\alpha_4+\ldots+\alpha_n)+\alpha_2(\alpha_4+\alpha_5+\ldots+\alpha_{n-1}+\alpha_n) \\
&\qquad\qquad +\alpha_4(\alpha_5+\ldots+\alpha_n)+\alpha_{n-2}(\alpha_{n-1}+\alpha_n)+\alpha_{n-1}\alpha_n\} \\
&\quad +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\quad +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\quad +A_{n-1}\{\alpha_1(\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_{n-2}+\alpha_n) \\
&\qquad\qquad +\alpha_2(\alpha_3+\alpha_4+\ldots+\alpha_{n-2}+\alpha_n)+\alpha_{n-2}\alpha_n\} \\
&\quad +A_n\{\alpha_1(\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_{n-2}+\alpha_{n-1}) \\
&\qquad\qquad +\alpha_2(\alpha_3+\alpha_5+\ldots+\alpha_{n-2}+\alpha_{n-1})+\ldots+\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\}] \\
&+x^{n-4}[A_1\{-\alpha_2[\alpha_3(\alpha_4+\alpha_5+\ldots+\alpha_{n-1}+\alpha_n) \\
&\qquad\qquad +\alpha_4(\alpha_5+\alpha_6+\ldots+\alpha_{n-1}+\alpha_n)+\ldots+\alpha_{n-1}\alpha_n] \\
&\qquad -\alpha_3[\alpha_4(\alpha_5+\alpha_6+\ldots+\alpha_{n-1}+\alpha_n \\
&\qquad\qquad +\alpha_5(\alpha_6+\alpha_7+\ldots+\alpha_{n+1}+\alpha_n)+\ldots+\alpha_{n-1}\alpha_n] \\
&\qquad -\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\qquad -\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\qquad -\alpha_{n-3}[\alpha_{n-2}(\alpha_{n-1}+\alpha_n)]-\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}+\alpha_n\} \\
&\quad +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\quad +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\quad +A_n\{-\alpha_1[\alpha_2(\alpha_3+\alpha_4+\ldots\alpha_{n-2}+\alpha_{n-1}) \\
&\qquad\qquad +\alpha_3(\alpha_4+\alpha_5+\ldots\alpha_{n-1})+\ldots+\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}] \\
&\qquad -\alpha_2[\alpha_8(\alpha_4+\alpha_5+\ldots\alpha_{n-2}+\alpha_{n-1}) \\
&\qquad\qquad +\alpha_4(\alpha_5+\alpha_6+\ldots\alpha_{n-1})+\ldots+\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}] \\
&\qquad -\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\qquad -\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\qquad -\alpha_{n-4}[\alpha_{n-3}(\alpha_{n-2}\alpha_{n-1})]-\alpha_{n-3}\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}] \\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+(-1)^{\mu-1}[A_1(\alpha_2\alpha_3\alpha_4\ldots\alpha_{n-1}\alpha_n)+A_2(\alpha_1\alpha_3\alpha_4\ldots\alpha_{n-1}\alpha_n) \\
&\qquad +\ldots+A_{n-1}(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_{n-2}\alpha_n)+A_n(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_{n-2}\alpha_{n-1})].
\end{aligned}
$$

Zur Bestimmung dieser Constanten $A - n$ an der Zahl ergeben sich nun aus dieser identischen Gleichung $n$ Bestimmungsgleichungen. Bevor wir diese Gleichungen in Betracht ziehen, werden wir mit Vorteil die Factoren, mit denen die $A$ multiplicirt erscheinen werden, in anderer Form ausdrücken. Bezeichnen wir nämlich den Factor bei $A_1$ im Coefficienten von $x^{n-2}$ mit $C_1'$, so ist

$$C_1' - \alpha_1 = b_{n-1} \quad \text{und} \quad C_1' = b_{n-1} + \alpha_1.$$

In dem Coefficienten von $x^{n-3}$ bezeichnen wir den Factor bei $A_1$ mit $C_1''$; so ist

$$C_1'' + \alpha_1(\alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n) = b_{n-2} \text{ und } C_1'' = b_{n-2} - \alpha_1(\alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n)$$

oder

$$C_1'' = b_{n-2} + \alpha_1 C_1'.$$

Weiter sei $C_1'''$ der Factor bei $A_1$ im Coefficienten von $x^{n-4}$, so ist

$$C_1''' - \alpha_6\{\alpha_2(\alpha_3 + \alpha_4 + \ldots + \alpha_n) + \alpha_3(\alpha_4 + \alpha_5 + \ldots + \alpha_n) + \ldots + \alpha_{n-1}\alpha_n = b_{n-3}$$

und

$$C_1''' = b_{n-3} + \alpha_1\{\alpha_2(\alpha_3 + \alpha_4 + \ldots + \alpha_n) + \ldots + \alpha_{n-1}\alpha_n\}$$

oder

$$C_1''' = b_{n-3} + \alpha_1 C_1''.$$

Analog lassen sich nun die anderen Factoren dieser Gattung bilden sowol bei $A_1$ als auch bei den übrigen Constanten $A$. Der Factor von $A_1$ im letzten Ausdruck in obiger Gleichung, der als Coefficient von $x^0$ angesehen werden kann, lässt sich am kürzesten in folgender Form darstellen. Nennen wir ihn $C_1^{(n-1)}$, so ist

$$C_1^{(n-1)} = (-1)^{n-1}(\alpha_2\alpha_3\alpha_4 \ldots \alpha_n),$$

also ist

$$C_1^{(n-1)}.(-\alpha_1) = b_0$$

und

$$C_1^{(n-1)} = -\frac{b_0}{\alpha_1}.$$

Analog erhält man auch für die Factoren bei den übrigen Constanten $A$ in den entsprechenden Coefficienten.

Indem wir nun die eben gefundenen Werte der Factoren $C$ benutzen, können wir jetzt die Gleichung ($\delta$) in folgender Form schreiben:

$$(\varepsilon) \quad \begin{aligned} f(x) \equiv x^{n-1}&[A_1 + A_2 + \ldots + A_n] \\ &+ x^{n-2}[A_1(b_{n-1} + \alpha_1 = C_1') + A_2(b_{n-1} + \alpha_2 = C_2') \\ &\qquad + \ldots + A_n(b_{n-1} + \alpha_n = C_n')] \\ &+ x^{n-3}[A_1(b_{n-2} + \alpha_1 C_1' - C_1'') + A_2(b_{n-2} + \alpha_2 C_2' = C_2'') \\ &\qquad + \ldots + A_n(b_{n-2} + \alpha_n + C_n' = C_n'')] \end{aligned}$$

$$+x^{n-4}[A_1(b_{n-3}+\alpha_1 C_1''=C_1''')+A_2(b_{n-3}+\alpha_2 C_2''=C_2''')$$
$$+\ldots+A_n(b_{n-3}+\alpha_n C_n''=C_n''')]$$
$$+\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$
$$+\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$
$$+A_1\left(-\frac{b_0}{\alpha_1}\right)+A_2\left(-\frac{b_0}{\alpha_2}\right)+A_3\left(-\frac{b_0}{\alpha_3}\right)$$
$$+\ldots+A_{n-1}\left(-\frac{b_0}{\alpha_{n-1}}\right)+A_n\left(\frac{b_0}{\alpha_n}\right)$$

Indem wir nun die beiderseitigen Coefficienten der gleichhohen Potenzen von $x$ einander gleich setzen, erhalten wir:

$$A_1=\frac{\varDelta_1}{\varDelta'},\quad A_2=\frac{\varDelta_2}{\varDelta'},\quad \ldots\quad A_n=\frac{\varDelta_n}{\varDelta'},$$

wo die verschiedenen $\varDelta$ gewisse Determinanten vorstellen.

Betrachten wir zuerst die in allen Ausdrücken vorkommende Determinante $\varDelta'$, so finden wir:

$$(1)\quad \varDelta'=$$
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ b_{n-1}+\alpha_1=C_1' & b_{n-1}+\alpha_2=C_2' & \ldots & b_{n-1}+\alpha_n=C_n' \\ b_{n-2}+\alpha_1 C_1'=C_1'' & b_{n-2}+\alpha_2 C_2'=C_2'' & \ldots & b_{n-2}+\alpha_n C_n'=C_n'' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\frac{b_0}{\alpha_1} & -\frac{b_0}{\alpha_2} & \ldots & -\frac{b_0}{\alpha_n} \end{vmatrix}$$

Diese Determinante können wir sehr vereinfachen, indem wir sie in zwei Determinanten $\varDelta'=\varDelta_1'+\varDelta_2'$ so zerlegen, dass wir die zweite Horizontalzeile in ihre Summanden auflösen.

Wir erhalten dann:

$$(2)\quad \varDelta_1'=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ b_{n-1} & b_{n-1} & \ldots & b_{n-1} \\ b_{n-2}+\alpha_1 C_1'' & b_{n-2}+\alpha_2 C_2'' & \ldots & b_{n-2}+\alpha_n C_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

$$=b_{n-1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \\ b_{n-2}+\alpha_1 C_1' & b_{n-2}+\alpha_2 C_2' & \ldots & b_{n-1}+\alpha_n C_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}=0$$

Digitized by Google

Wenden wir nun dieses Verfahren auf $\Delta_2'$ an, indem wir die dritte Horizontalzeile zerlegen, und fahren wir so fort bis die vorletzte Zeile zerlegt ist, so erhalten wir:

$$(3)\qquad \Delta' = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_{n-1} & \alpha_n \\ \alpha_1 C_1'' & \alpha_2 C_2' & \ldots & \alpha_{n-1}C_{n-1}' & \alpha_n C_n' \\ \alpha_1 C_1'' & \alpha_2 C_2'' & \ldots & \alpha_{n-1}C_{n-1}'' & \alpha_n C_n'' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{b_0}{\alpha_1} & \frac{b_0}{\alpha_2} & \ldots & \frac{b_0}{\alpha_{n-1}} & \frac{b_0}{\alpha_n} \end{vmatrix}$$

Führen wir hier in der dritten Horizontalzeile für die verschiedenen $C'$ ihre Werte wieder ein, so ergiebt sich:

$$(4)\quad \Delta' = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \\ \alpha_1(a_{n-1}+\alpha_1) & \alpha_2(b_{n-1}+\alpha_7 & \ldots & \alpha_n(b_{n-1}+\alpha_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

$$= \Delta_3' + \Delta_4',$$

wo (nach Zerlegung der dritten Horizontalreihe)

$$(5)\qquad \Delta_3' = -b_{n-1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & \text{wie oben} & & \end{vmatrix} = 0$$

und

$$(6)\qquad \Delta_4' = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \ldots & \alpha_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & \text{wie oben} & & \end{vmatrix} \text{ sind.}$$

Verfahren wir nun ebenso mit der vierten, fünften u. s. f. endlich mit der vorletzten Horizontalzeile, so erhalten wir, wenn wir überdies aus der letzten Zeile $b_0$ herausheben:

$$(7)\qquad \Delta' = -b_0 \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_1^{n-2} & \alpha_2^{n-2} & \dots & \alpha_n^{n-2} \\ \frac{1}{\alpha_1} & \frac{1}{\alpha_2} & \dots & \frac{1}{\alpha_n} \end{vmatrix}$$

Führen wir nun für $b_0$ seinen Wert: $(-1)^n \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n$ ein, multipliciren wir ferner die Verticalzeilen der Reihe nach mit: $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3 \dots \alpha_n$ und machen wir endlich die letzte Horizontalzeile zur ersten, so erhalten wir folgende einfache Determinante für den gemeinschaftlichen Nenner der Constanten $A_1$, $A_2$, $A_3 \dots A_n$:

$$(8)\qquad \Delta' = + \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-1} & \alpha_n \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_{n-1}^2 & \alpha_n^2 \\ \alpha_1^3 & \alpha_2^3 & \dots & \alpha_{n-1}^3 & \alpha_n^3 \\ \alpha_1^4 & \alpha_2^4 & \dots & \alpha_{n-1}^4 & \alpha_n^4 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_1^{n-3} & \alpha_2^{n-2} & \dots & \alpha_{n-1}^{n-2} & \alpha_n^{n-2} \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-2} & \dots & \alpha_{n-1}^{n-1} & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Das Vorzeichen dieser Determinante ist immer das positive, da der Factor $(-b_0) = (-1)^{n+1}(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n)$ ist, und dadurch, dass wir die letzte Horizontalzeile zur ersten gemacht haben, $(n-1)$ Vertauschungen, also auch $(n-1)$ Vorzeichenänderungen vorgenommen wurden, d. h. $(-1)^{n+1} . (-1)^{n-1} = (-1)^{2n} = +1$ das schliessliche Vorzeichen angiebt.

Sind zwei oder mehrere der Wurzeln $\alpha$ einander gleich, so werden zwei oder mehr Verticalzeilen identisch, also die Determinante $\Delta'$ gleich Null; die Zerlegung der Function $\frac{f(x)}{F(x)}$ kann demnach nicht mehr nach $(\beta)$ durchgeführt werden.

Die Determinanten $\Delta_1, \Delta_2 \ldots \Delta_n$, welche den Zähler der Constanten $A_1, A_2 \ldots A_n$ bilden, unterscheiden sich bekanntlich von der Determinante $\Delta'$ in Form (1) nur dadurch, dass der Reihe nach statt der 1, 2 ... $n$ Verticalzeile die entsprechenden Coefficienten $a_{n-1}, a_{n-2} \ldots a_1, a_2\, a_0$ gesetzt werden. Diese Determinanten lassen sich im Allgemeinen auf keine einfachere Form bringen. Eine Zerlegung in Unterdeterminanten einfacherer Form hätte die Vergrösserung der Anzahl von Determinanten gegen sich.

---

Anm. d. Red. Vergleicht man das Resultat, das auf diesem Wege gewiss niemand suchen wird, mit dem bekannten Ausdruck des Partialbruchs, so stellt sich die vorstehende Rechnung als Beweis eines gleichfalls bekannten Determinantensatzes dar.

## XXIII.

# Miscellen.

---

1.

### Eine Tangentenconstruction zur Astroide.

Es sei gegeben eine gerade Kante $\overline{P}$, in dieser die Punkte $m\ s\ n$, deren gegenseitige Entfernnug $\delta(m - - - s) = \delta(s - - - n) = a$ beträgt.

Die Pnnkte $m$ nnd $s$ bewegen sich längs der sich normal durchschneidenden Geraden $\overline{X}\ \overline{Z}$.

Dann beschreibt bekanntlich der Punkt $n$ eine Ellipse $\breve{E}$ von den Axenläugen $a$, $2a$, die aufeinander folgenden Lagen ${}^{a}\overline{P}$, ${}^{1}\overline{P}$, ${}^{2}\overline{P}$ ... ${}^{n}\overline{P}$ ... der Kante nmhüllen eine Astroide. (In Fig. 1. wurde die Papieroberfläche als die Ebene der Geraden $\overline{X}\ \overline{Z}$ aufgefasst, nnd die einzelnen Lagen der Kante, als auch die dieselben nmhüllende Astroide abgebildet).

Die so erhaltene Figur (Fig. 1.) wollen wir nun ränmlich wie folgt interpretiren:

Die Axen $\overline{X}\ \overline{Z}$ der Ellipse $\breve{E}$ betrachten wir als die $X$- nnd $\overline{Z}$-Axe des orthogonalen Coordinaten-Systems; die Linien $\breve{E}_2$, $X_2\ \overline{Z}_2$ sind dann die Aufrisse der in der Verticalprojectionsebene enthaltenen Ellipse $\breve{E}$ nnd der Coordinatenaxen $\overline{X}$, $\overline{Z}$; $o_{1.2}$ der Grund- und Aufriss der Coordinatenanfangs.

Jede zwei parallele Bildgerade z. B. ${}^{\mu}P_1$ nnd ${}^{\mu}P_2$ können als Grund- und Aufriss einer Geraden ${}^{\mu}\overline{P}$ betrachtet werden, welche die

Ellipse $\breve{E}$ in dem Punkte $^u n$, eine Gerade $\bar{A}$, die in der Halbirungsebene $\bar{H}x$ *) liegt, im Punkte $^u s$ trifft.

Aus der Parallelität der Bildgeraden $^u\bar{P}_1$, $^u\bar{P}_2$ geht ausserdem hervor, dass die sämmtlichen Geraden $^u P$ zur Halbirungsebene $\bar{H}'x$ parallel sind, folglich einem geraden Konoide angehören.

Die Grund- und Aufrisscontour dieser Fläche sind congruente Astroiden, die mit der schon erwähnten zusammenfallen.

Wir stellen uns nun die Aufgabe, aus dem Bildpunkte $a_1$ zu dieser Astroide die Tangenten zu construiren.

Da diese Astroide von den Grundrissen aller Geraden unseres Konoids tangirt wird, können umgekehrt alle geradlinigen Tangenten, folglich auch die von uns gesuchten als Grundrisse von Mantellinien des Konoids aufgefasst werden.

Diese Mantellinien müssen, da die Grundrisse den Bildpunkt $a_1$ enthalten sollen, die horizontalprojicirende Gerade $\bar{Z}_a$, deren Grundriss mit $a_1$ zusammenfällt, treffen.

Es ist folglich zur Lösung unserer Aufgabe notwendig diejenigen Mantellinien des Konoides zu ermitteln, welche die Gerade $\bar{Z}_a$ durchschneiden.

Alle Geraden, welche $Z_a$ und $\bar{A}$ schneiden und zur Halbirungsebene H'x parallel sind bilden ein gleichseitiges hyperbolisches Paraboloid. Die gesuchten Geraden liefert der Schnitt desselben mit dem Konoide.

Um diesen Schnitt zu erhalten, bedienen wir uns der Verticalprojectionsebene.

Diese schneidet das Konoid in der Ellipse $\breve{E}$, das Paraboloid in einer gleichseitigen Hyperbel $\breve{H}$, die durch den Punkt $o$ hindurchgeht, und deren Asymptoten wir leicht ermitteln können.

Die zur Verticalprojectionsebene parallelen Geraden des Paraboloids sind die $\bar{Z}_a$ und dann die Gerade $\bar{U}$, welche, da sie in der Halbirungsebene H$\bar{x}$ enthalten ist und $\bar{Z}_a$ schneidet, leicht aufzufinden ist. (Ihr Horizontalabstand gleicht dem Verticalabstande der Geraden $\bar{Z}_a$).

Die Verticaltrace der durch $\bar{Z}_a$ bestimmten Verticalprojections-

*) Vergl. Fiedler, Darst. Geometrie.

Google

ebene ist schon eine Asymptote unserer Hyperbel, die andere erhalten wir als Verticaltrace der durch $U$ zur Ebene H'x parallelen Ebene.

Folglich ist $\bar{Z}^a{}_2$ eine, $\bar{N}_2$ (eine von $\bar{X}_2$ um den doppelten Verticalabstand von $\bar{Z}_a$ im entgegengesetzten Sinne entfernte Bildgerade) die andere Asymptote des Aufrisses $\breve{H}_2$ unserer Hyperbel.

Dieser kann nun mit genügender Genauigkeit verzeichnet, und dessen vier Durchschnittspunkte mit $\breve{E}_2$ — die zweiten Spurpunktbilder $w_2$, $x_2$ $y_2$ $z_2$ der gesuchten Geraden — gefunden werden.

Wir brauchen dann nur noch ihre Grundrisse $w_1$ $x_1$ $y_1$ $z_1$, die sämmtlich der Grundlinie $X_{1,2}$ angehören, zu construiren; die durch diese und $a_1$ bestimmten vier Bildgeraden sind die gesuchten Tangenten. ($\varrho\bar{P}$ $\sigma\bar{P}$ $\tau\bar{P}$ $\varphi\bar{P}$).

Es ist leicht einzusehen, dass wir uns die Punkte $w_1$ $x_1$ $y_1$ $z_1$ bequemer verschaffen können, wenn wir anstatt der Ellipse $\breve{E}$ und Hyperbel $\breve{H}$ affine Gebilde: den Kreis $\breve{E}'$ und die Hyperbel $\breve{H}'$ einführen.

Der Aufriss des ersteren ist die der Astroide umschriebene Kreislinie $\breve{E}'_2$, jener der letzteren die gleichseitige hyp. Linie $H'_2$.

Die Bildgerade $\bar{Z}^a{}_2$ verbleibt auch da in der Eigenschaft einer Asymptote, die andere ist der Aufriss der zu $N$ affinen Geraden $N'$, folglich die von der Grundlinie $\bar{X}_{1,2}$ um die Entfernung von $a_1$ von derselben im entgegengesetzten Sinne entfernte Bildgerade $\bar{N}'_2$.

Diese Bildhyperbel, die selbstverständlich auch den Bildpunkt $o_2$ enthält, schneidet den Kreis $\breve{L}'_2$ in den zu den früheren affinen Bildpunkten $w'_2$ $x'_2$ $y'_2$ $z'_2$, zu denen dieselben Grundrisse $w_1$ $x_1$ $y_1$ $z_1$ angehören.

Die Construction gewinnt an Einfachheit, indem durch Anwendung des Kreises die Construction der Ellipse erspart, die Bildhyperbel $\breve{H}'_2$ dann unabhängig von der mit $\breve{H}_2$ bezeichneten — folglich nach Weglassung derselben — verzeichnet werden kann.

Die besprochene Tangentenconstruction kann weiter noch dadurch vereinfacht werden, dass man die Tangenten unabhängig von den Grundrissen $w_1$ $x_1$ $y_1$ $z_1$ darstellt.

Weil nämlich $\varrho s_2$ die Strecke $\delta(\varrho m_2 - - - x_2)$ halbirt, ist

$$\delta(\varrho s_2 - - - o_2) = \tfrac{1}{2}\delta(x_2 - - - x_1),$$

und folglich

$$\delta(\varrho s_2 - - - o_2) = \delta(x'_2 - - - x_1).$$

Hieraus folgt aber

$$\overline{eP_2} \parallel G(x'_2\, o_2) \parallel \overline{eP_1}.$$

Um also die Tangenten des Bildpunktes $a_1$ zu ermitteln, brauchen wir durch diesen nur die Parallelen zu den durch $o_2$ und die vier Schnittpunkte von $\breve{H}'_2$ mit $\breve{E}'_2$ bestimmten Geraden zu errichten.

Es erübrigt nur noch die bezüglichen Berührungspunkte zu ermitteln.

Dieses geschieht auf Grund folgender Betrachtung: Die Berührungspunkte können als Grundrisse von Berührungspunkten der, die in den Tangenten abgebildeten Mantellinien enthaltenden horizontal-projicirenden Ebenen mit dem Konoide aufgefasst werden.

Um den Berührungspunkt der die Gerade $\overline{eP}$ horizontal projicirenden Ebene zu erhalten, bedienen wir uns eines, das Konoid längs der Geraden berührenden hyperbolischen Paraboloides. Dieses sei durch die Gerade $\bar{A}$, die Tangente $T_x$ und durch die Halbirungsebene $\mathrm{H}'_{\bar{X}}$ bestimmt.

Ausser der Geraden $\overline{eP}$ gehört diesem Paraboloide sichtlich auch die Gerade $\bar{X}$ desselben Systems, welche die horizontal-projicirende Ebene von $\overline{eP}$ in dem Punkte $i$ schneidet.

Bekanntlich ist der Schnittpunkt der durch $i$ zu den Geraden $\bar{A}$ und $\bar{T}$ parallelen Ebene $\bar{\mathrm{E}}$ mit $\overline{eP}$ der gesuchte Punkt, sein Grundriss also der gewünschte Berührungspunkt.

Wir construiren die Aufrisse der die Ebene $\bar{\mathrm{E}}$ bestimmenden Geraden $\bar{A}_i$ und $\bar{T}_i$; die Punkte $q$ und $t$ sind die leicht zu ermittelnden Schnittpunkte der horizontal-projicirenden Ebene von $\overline{eP}$ mit $\bar{\mathrm{E}}$, folglich der Punkt $r$ der Geraden $G(q-t)$ der gesuchte Punkt, dessen Grundriss $r_1$ einen der gewünschten Berührungspunkte liefert.

Um die Construction vom Aufrisse der Geraden $\overline{eP}$ unabhängig zu machen, können wir uns anstatt $\bar{T}'_2$ der zu ihr durch parallelen Constructionslinie bedienen.

Unsere Construction erhält nun folgende Gestalt: Man finde mittelst der Bildgeraden $x_2\, x_1$ den Bildpunkt $q_1$, ziehe $q_1\, w_1$ parallel $\bar{T}_2$, mache dann $\overline{e_1\, t_1}$ senkrecht $X_{1,2}$.

Der Durchschnitt von $\overline{q_1\, t_1}$ mit $\bar{P}_1$ ist das gesuchte $r_1$.

Um auch diese Construction von der der Bildellipse $\breve{E}_2$ unabhängig zu machen, berücksichtigen wir nur den Umstand, dass, wie leicht planimetrisch bewiesen werden kann, die zu $q_1\, w_1$ affine Bildgerade $q'_1\, w_1$ die $\overline{eP_1}$ in demselben Bildpunkte $r_1$ schneiden muss. Aus der erwähnten Affinität geht ferner hervor, dass die erstgenannte Bildgerade zur Tangente des Kreises im Punkte $x'_2$, folglich zu $\overline{eP_1}$ normal ist.

Um also den Berührungspunkt der Tangente $\overline{eP_1}$ zu ermitteln, genügt es hienach, aus dem Bildpunkte $q_1$ zu derselben eine Normale zu errichten. Ihr Fusspunkt ist der gesuchte Berührungspunkt. (Fig. 2.)

A. Sucharda.

---

## 2.

### Einige Sätze aus der Kreislehre.

1. Zwei Kreise $K$ und $K_1$ mit den Mittelpunkten $s$, $s_1$ schneiden sich in den Punkten $a$ und $b$ (Fig. 1). Die Geraden $\overline{ac}$, $\overline{ad}$, . . . welche durch den Punkt $a$ gehen, treffen den Kreis $K$ in den Punkten $c$, $d$, . . . und die Kreislinie $K_1$ in den Punkten $c_1$, $d_1$, . . . . Werden auf die Geraden $\overline{ac}$, $\overline{ad}$, . . . nach beiden Richtungen hin von $c_1$, $d_1$, . . . aus die Strecken $\overline{ac}$, $\overline{ad}$, . . . aufgetragen, so liegen die Endpunkte $c_3$, $d_3$, . . . (oder $c_4$, $d_4$, . . .) der so erhaltenen Strecken $\overline{c_1c_3}$, $\overline{d_1d_3}$, . . . (oder $\overline{c_1c_4}$, $\overline{d_1d_4}$) auf einer bestimmten Kreislinie $K_3$ (oder $K_4$).

Setzt man z. B. voraus, dass $\overline{ac} = \overline{c_1c_3}$, $\overline{ad} = \overline{d_1d_3}$, . . . ist, so hat man zu beweisen, dass die Punkte $c_3$, $d_3$, . . . der Kreislinie $K_3$ angehören.

Zu dem Zwecke ziehe man $\overline{c_1c_2}$ parallel $\overline{ab}$, $\overline{d_1d_2}$ parallel $\overline{ab}$, . . . und $\overline{c_2c_3}$ parallel $\overline{bc}$, $\overline{d_2d_3}$ parallel $bd$, . . . . Aus der Congruenz der Dreiecke $\triangle\, abc \cong \triangle\, c_1c_2c_3$, $\triangle\, abd \cong \triangle\, d_1d_2d_3$, . . . erhält man $\overline{c_1c_2} = \overline{d_1d_2} = \ldots = \overline{ab}$, woraus folgt, dass $\overline{ac_1}$ gleich und parallel $\overline{bc_2}$, $\overline{ad_1}$ gleich und parallel $\overline{bd_2}$, . . . ist, und dass die Punkte $c_2$, $d_2$, . . . auf einem Kreise $K_2 \cong K_1$ liegen, welcher durch den Punkt $b$ geht, und dessen Mittelpunkt $s_2$ so bestimmt ist, dass $\overline{s_1s_2}$ gleich und parallel $\overline{ab}$ ist. Da Wkl. $bc_2c_3$ = Wkl. $bcc_3$, Wkl. $bd_2d_3$ = Wkl. $bdd_3$ . . ., und weil die Winkel $bcc_3$, $bdd_3$, . . . als Nebenwinkel der gleichen

Digitized by Google

Peripheriewinkel $c$, $d$, . . . der Kreislinie $K$ einander gleich sind, so müssen auch die Winkel $bc_2c_3$, $bd_2d_3$, . . . einander gleich sein. Die Scheitel $c_2$, $d_2$, . . . der zuletzt genannten Winkel befinden sich aber auf der Kreislinie $K_2$, und ihre Schenkel $\overline{bc_2}$, $\overline{bd_2}$, . . . schneiden sich im Punkte $b$ derselben Kreislinie, folglich müssen auch die übrigen Schenkel $c_2c_3$, $d_2d_3$, . . . im Punkte $f$ der Kreislinie $K_2$ sich schneiden. Endlich sind die Winkel $ac_3f$, $ad_3f$, . . . auch einander gleich, denn sie sind gleich den Winkeln $bc_2c_3$, $bd_2d_3$, . . ., und weil ihre Schenkel in zwei festen Punkten $a$ und $f$ sich treffen, so müssen ihre Scheitel $c_3$, $d_3$, . . . auf einer Kreislinie $K_3$ sich befinden.

Was die Bestimmung des Mittelpunktes $s_3$ des Kreises $K_3$ betrifft, hat man zu berücksichtigen, dass die Tangente $\overline{ae_1}$ des Kreises $K$ im Punkte $a$, da sie mit dem Kreise zwei zusammenfallende Punkte $a$ und $e$ gemein hat, auf den Kreisen $K_1$ und $K_3$ auch zwei zusammenfallende Punkte $e_1$ und $e_3$ bestimmt, und dass sie also als eine gemeinschaftliche Secante der Kreise $K_1$ und $K_3$ erscheint. Nun erkennt man, dass der Radius $\overline{sa}$ und die Verbindungslinie $\overline{s_1s_3}$ der Kreismittelpunkte $s_1$, $s_3$ auf der gemeinschaftlichen Secante $\overline{ae_1}$ senkrecht stehen, und dass daher $as$ parallel zu $\overline{s_1s_3}$ ist. Wird aus den congruenten Dreiecken $ans$, $s_1ms_3$ auch Gleichheit der Strecken $\overline{s_1s_2}$, $\overline{as}$ erwiesen, so kann der Mittelpunkt $s_3$ entweder durch den Schnitt der Geraden $bs_3$ (parallel $ss_1$), $s_1s_3$ (parallel $as$), oder durch $s_1s_3$ gleich und parallel $as$ bestimmt werden. In ähnlicher Weise könnte man beweisen, dass die gemeinschaftliche Secante $ag$ der Kreise $K$ und $K_3$ den Kreis $K_1$ im Punkte $a$ berührt, und dass $ss_3$ gleich und parallel $\overline{as_1}$ ist.

Ebenso wird der Beweis geliefert, dass die Punkte $c_4d_4$ . . . auf einem Kreise $K_4$ liegen, welcher durch die Punkte $a$ und $e_1$ geht, und dessen Mittelpunkt $s_4$ so erhalten wird, dass $s_1s_4$ gleich und parallel $as$ gemacht wird.

Aus dem Vorigen erhält man auch folgende Sätze, von deren Richtigkeit man sich leicht überzeugen kann.

2. Ist ein Dreieck $ae_1g$ gegeben, und werden drei Kreise $K$, $K_1$, $K_3$ so construirt, dass $K$ durch $g$ geht und die Seite $ae_1$ in $a$ berührt, $K_1$ durch $e_1$ geht und die Seite $ag$ in $a$ taugirt, und dass $K_3$ dem Dreiecke $ae_1g$ umschrieben wird, so hat man für eine beliebige durch $a$ gelegte Gerade, welche die Kreise $K$, $K_1$, $K_3$ in den Punkten $c$, $c_1$, $c_3$ schneidet, $\overline{ac} = \overline{c_1c_2}$. Im Falle, dass das Dreieck $ae_1g$

bei $a$ rechtwinklig ist, sind $\overline{ag}$, $ae_1$, $\overline{e_1g}$ Durchmesser der Kreise $K$, $K_1$, $K_3$, und die Kreiso $K$, $K_1$ schneiden sich auf der Hypotenuse im Punkte $b$.

3. Wenn zwei Kreise $K_3$ und $K_4$ in zwei Punkten $a$ und $e_1$ sich schneiden, so werden sie auf den, durch den Punkt $a$ gelegten Geraden die Strecken $c_3c_4$, $\overline{d_3d_4}$, . . . begrenzen, und die Halbirungspunkte $c_1$, $d_1$, . . . dieser Strecken werden auf einer Kreislinie $K_1$ liegen, welche durch die Punkte $a$ und $e_1$ geht, und ihr Mittelpunkt $s_1$ die Strecke $\overline{s_3s_4}$ halbirt.

Die Aufstellung der übrigen speciellen Sätze, z. B. wenn dio Kreise $K$ und $K_1$ sich berühren, oder wenn sie zusammenfallen, wird dem geneigten Leser überlassen.

Teltsch, am 25. September 1880.

W. Jeřábek.

---

3.

**Zum Beweise des Satzes, dass jede Primzahl $p = 4n + 1$ Summe zweier Quadrate ist.**

Nach Serret's Handbuch der höheren Algebra (Bearbeitung von Wertheim) Bd. I. Nr. 15. besteht der Satz:

> Wenn eine ganze Zahl ohne Rest in die Summe zweier Quadrate aufgeht, welche relativ prim zu einander sind, so ist sie selbst Summe zweier Quadrate.

Nun lässt sich zeigen, dass sich für jede Primzahl $p = 4n + 1$ Vielfache finden lassen, welche Summen von zwei Quadraten sind, die keine gemeinschaftlichen Factoren haben. Denn nach dem bereits citirten Werke, Bd. II, Nr. 316, 1° hat jede Primzahl $p = 4n + 1$ gleichviele gerade und ungerade primitive Wurzeln. Für eine ungerade primitivo Wurzel gibt es immer einen Exponenten $\lambda$ von der Eigenschaft, dass

$$g^\lambda \equiv 2 \text{ mod. } p$$

also

$$g^{2\lambda} \equiv 2^2 = 4 \text{ mod. } p$$

Da ferner für jede primitive Wurzel

$$g^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \text{ mod. } p$$

ist, hat man durch Multiplication sofort

$$g^{2\lambda+\frac{p-1}{2}} \equiv -4 \text{ mod. } p$$

oder

$$g^{2\lambda+\frac{p-1}{2}} + 2^2 \equiv 0 \text{ mod. } p$$

Da $\frac{p-1}{2}$ eine gerade Zahl und jede ungerade Zahl relativ prim zu 2 ist, folgt der Satz, dass jede Primzahl $p = 4n+1$ Summe zweier Quadrate ist, direct aus dem oben angeführten.

Sind ferner $g$ und $\gamma$ zwei primitive Wurzeln von $p$, welche relativ prim zu einander sind, so ist

$$g^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \quad \text{und} \quad \gamma^{p-1} \equiv +1 \text{ mod. } p$$

also

$$g^{\frac{p-1}{2}} + \gamma^{p-1} \equiv 0 \text{ mod. } p$$

Ebenso ist

$$g^{p-1} \equiv +1 \quad \text{und} \quad \gamma^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \text{ mod. } p$$

also

$$g^{p-1} + \gamma^{\frac{p-1}{2}} \equiv 0 \text{ mod. } p$$

wodurch der Satz ebenfalls auf den a. a. O. bewiesenen zurückgeführt ist.

Th. Harmuth.

---

4.

**Ueber die Ausdehnung der Kepler'schen Gesetze.**
Fortsetzung zu S. 112.

Bezeichnet $T$ die Umlaufszeit, entsprechend einem Intervall der $\mu$ von 4 Rechten, so hat man:

$$\gamma T = 2Rab$$

Nach dem 4. Gesetze muss sein:

$$cT = 2Ra^{\frac{3}{2}}$$

wo $c$ für alle Planeten denselben Wert hat. Folglich ist notwendige Bedingung der Gültigkeit:

$$\gamma^2 = c\frac{b^2}{a}$$

woraus:

$$v = \frac{2cb^2}{a} \frac{a^2 - e^2\cos^2\mu}{(ab + b\alpha\cos\mu + a\beta\sin\mu)^2} \tag{13}$$

Ausreichend ist dieselbe, wenn zwei Planeten in Relation kommen, wo, wie es bei allen grossen der Fall ist, die 2 Intervalle der $r$ getrennt sind. Denn obgleich das Anziehungsgesetz wegen Ungleichheit der Constanten im Ausdruck (13) im Bezug auf beide verschieden formulirt ist, so lässt sich die eine Function ohne Widerspruch als Fortsetzung der andern ansehen.

Greifen hingegen, wie vielfach bei den kleinen Planeten, die Intervalle der $r$ über einander, so bildet die Identität der Ausdrücke $v$ in den sich deckenden Intervallteilen eine neue Bedingung, an deren Erfüllung, solange irrationale Wurzeln darin vorkommen, gewiss nicht gedacht werden kann. Hiernach wären nur die 3 Specialfälle (10) (11) (12) zu untersuchen, wo jetzt die Formeln lauten:

$$v = \text{const.} - \frac{2cr^2}{a^3}; \quad v = \text{const.} + \frac{8ca^3}{(r^2 + a^2 - \alpha^2)^2}$$

$$v = \text{const.} + \frac{4c}{r}$$

Im ersten und zweiten lässt sich die Function bei unabhängig variirendem $a$ nicht identisch machen, der dritte ist der Kepler'sche selbst.

Die Resultate sind folgende.

Das 1. und 3. Gesetz gelten bedingungslos. Das 2te nur für Newton'sche Attraction. Jeder elliptischen Bewegung um ein Attractionscentrum, das aber auf einer Axe liegen muss, und zwar vom Mittelpunkt entfernter als der Krümmungsmittelpunkt des Scheitels, entspricht ein angebbares Potential. Statt dessen kann auch das Attractionscentrum im Mittelpunkt selbst liegen. Das Potential ist rational 1) im letzt genannten Falle, 2) wenn die Bahn ein Kreis, 3) wenn das Attractionscentrum Brennpunkt ist. Das 4. Gesetz gilt (abgesehen von Newton'scher Attraction) bei elliptischer Bewegung, wenn das Quadrat der Flächengeschwindigkeit dem Parameter der Ellipse proportional ist, für Planeten, deren Radienvectoren nie einander gleich werden.

Die Form der Relation zwischen mittlerer und excentrischer Anomalie ist für alle elliptischen Centralbewegungen dieselbe.

R. Hoppe.

5.

**Zu dem Aufsatze T. LXV. S. 218. über den Schwerpunkt des Vierecks.**

In dem citirten Aufsatze von Noeggerath wird u. a. die Coordinate des Schwerpunkts des Vierecks in einer Form dargestellt, welche sie zu der des Schwerpunkts des Eckpunktsystems in einfache Beziehung setzt, und aus der ersichtlich, dass beide nur beim Parallelogramm identisch sein können. Hieraus schliesst der Verfasser, dass in La Fremoire's Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen, wo für erstere der Ausdruck der letztern angegeben sei, ein Irrtum enthalten sein müsse. Hiergegen hat nun Herr Dr. Stammer in Düsseldorf erinnert, dass in jener Sammlung nur vom Schwerpunkt des Eckpunktsystems die Rede sei. Wie der Verfasser mir darauf mitteilt, ist folgendes der Wortlaut des Satzes in jener Sammlung:

„Der Mittelpunkt der mittleren Entfernungen eines Vierecks ist der Durchschnittspunkt der Geraden, welche die Mitten der Gegenseiten verbinden.“

Er fügt hinzu, dass aus den vorhergehenden Sätzen allerdings sich erkennen lasse, dass das Eckpunktsystem gemeint sei.

Der vermutete sachliche Irrtum ist demnach nicht vorhanden. Wenn der Verfasser aber nur erklärt durch den Ausdruck zum Misverstehen verleitet worden zu sein, so möchte doch ein strengeres Urteil am Platze sein. Ist ein Schriftsteller berechtigt, ein Wort wie Viereck, das Jahrhunderte lang in allen Schulen und Schulbüchern nur eine Bedeutung, die der Fläche, hat, bloss weil ein Autor, Steiner, in seinem begreuzten Gebiete einen andern Begriff, den des Punktsystems, damit verbindet, ohne nähere Erklärung — und, wie ich den Verfasser verstehe, findet sich eine solche in der Sammlung nicht — in jenem abweichenden Sinne zu gebrauchen? Gegen ein solches Vorgehen ist um so nachdrücklicher Einspruch zu tun, weil die weithin geltende Autorität Steiner's wol fähig ist zur Nachahmung zu reizen und dadurch Verwirrung zu schaffen. Für den vorliegenden Fall genüge es zu constatiren, dass (wofern die Tatsachen sich wie angegeben verhalten) die Wortfassung unrichtig ist.

R. Hoppe.

## 6.

### Anzahl der innern Diagonalschnitte eines Vierecks.

In dem mir eben vorliegenden 4. Heft des 65. Bandes des „Archiv etc.“ ist von einem angehenden Mathematiker die Aufgabe gelöst, die Anzahl der Schnittpunkte der Diagonalen innerhalb eines Polygons ($x$) zu finden. Es sei mir gestattet, zwei etwas einfachere Methoden und Beantwortung hinzuzufügen.

Erste Methode. Betrachte ich eine bestimmte vom Punkte $A$ ausgehende Diagonale eines Polygons von $n$ Seiten, so sei $y$ die Anzahl der auf ihr liegenden Schnittpunkte. Geht nun die Diagonale $\alpha$ links liegenden und $\beta$ rechts liegenden Ecken vorbei, so dass:

$$\alpha+\beta=n-2 \tag{1}$$

ist, so teilt sie das $n$-Eck in ein Polygon von $\alpha+2$ und eines von $\beta+2$ Ecken. Die betrachtete Diagonale wird nun geschnitten von den Diagonalen des $n$-Ecks abzüglich einer (ihr selbst) und mit Ausnahme der Diagonalen des $\alpha+2$-Ecks und des $\beta+2$-Ecks. Da nun ein $n$-Eck $\frac{n(n-3)}{2}$ Diagonalen hat, so ist:

$$y=\frac{n(n-3)}{2}-1-\frac{(\alpha+2)(\alpha-1)}{2}-\frac{(\beta+2)(\beta-1)}{2} \tag{2}$$

d. i. mit Benutzung der Gl. (1):

$$2y=n^2-3n-2-(n^2-3n-2\alpha n+2\alpha^2+4\alpha-2)$$

und daher:

$$y=(n-2)\alpha-\alpha^2 \; ^{*)} \tag{3}$$

Um nun die Anzahl der Schnittpunkte zu erhalten, die auf sämmtlichen von den Punkten $A$ ausgehenden Diagonalen liegen, habe ich statt $\alpha$ der Reihe nach $1, 2, \ldots n-3$ anzunehmen; dann wird, wenn ich zur Abkürzung $n-3=m$ setze:

---

*) Man gelangt zu dieser Gleichung noch einfacher durch folgende Betrachtung. Die betrachtete Diagonale wird von sämmtlichen geschnitten, die von einem der Punkte $\alpha$ nach einem der Punkte $\beta$ gehen. Von jedem der erstgenannten Punkte gehen $\beta$ solcher aus, von allen also $\alpha\beta$, folglich:

$$y=\alpha\beta$$

d. i. nach Gl. (1):

$$y=\alpha(n-2-\alpha).$$

$$\begin{aligned}\Sigma y &= (m+1)\Sigma\alpha - \Sigma\alpha^2\\ &= \frac{(m+1)(m+1)m}{2} - \left(\frac{m^3}{3}+\frac{m^2}{2}+\frac{m}{6}\right)\\ &= \frac{n(m+1)(m+2)}{6}\end{aligned}$$

oder

$$\Sigma y = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6} \tag{4}$$

Gehe ich nun der Reihe nach von dem Punkte $A$ und den anderen Ecken des Polygons aus und beachte einmal, dass jeder Schnittpunkt zwei Diagonalen angehört, und zweitens, dass jede Diagonale zweimal angetroffen wird, so habe ich obigen Ausdruck mit $\frac{n}{4}$ zu multipliciren und dieser die gesuchte Anzahl sämmtlicher Schnittpunkte $x$:

$$x = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} \tag{5}$$

Zweite Methode. Ich kann je zwei sich schneidende Diagonalen als Diagonalen eines 4-Ecks ansehen, dessen Seiten Polygonseiten oder andere Diagonalen sind. Da nun jedes Viereck einen Diagonalschnittpunkt hat, so ist die Anzahl $x$ der Diagonalschnittpunkte gleich der Anzahl der Vierecke, die sich durch Combination von je 4 Punkten aus $n$ Punkten bilden liessen. Das Resultat ist also wieder das obige.

Hieran knüpfe ich noch eine Frage: Wieviel aneinanderstossende (sich also nicht ganz oder teilweise überdeckende) Figuren werden durch die Diagonalen des Polygons innerhalb desselben gebildet?

Königsberg, Januar 1881.

L. Saalschütz.

---

7.

**Ueber die Gleichung $x^y = y^x$.**

Bekanntlich ist $2^4 = 4^2$; ebenso $\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{27}{8}} = \left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{9}{4}}$. Schreibt man diese beiden Gleichungen in folgender Weise:

$$\left[\left(\frac{2}{1}\right)^1\right]^{\left(\frac{2}{1}\right)^2} = \left[\left(\frac{2}{1}\right)^2\right]^{\left(\frac{2}{1}\right)^1} \text{ und } \left[\left(\frac{3}{2}\right)^2\right]^{\left(\frac{3}{2}\right)^3} = \left[\left(\frac{3}{2}\right)^3\right]^{\left(\frac{3}{2}\right)^2},$$

so findet man, dass die Ausdrücke in beiden Gleichungen analog zu-

sammengesetzt sind. An Stelle der Zahlen 2 und 1 der ersten Gleichnng stehen die Zahleu 3 und 2 in der zweiten Gleichung. Bildet man dieselben Ausdrücke mit den Zahlen 4 und 3, so erhält man

$$\left(\frac{64}{27}\right)^{\frac{256}{81}} \text{ und } \left(\frac{256}{81}\right)^{\frac{64}{27}}.$$

Auch diese beiden Ausdrücke sind identisch, was sich zeigt, wenn man auf beiden Seiteu den Logar. nimmt. Man erhält dann

$$\left(\frac{4}{3}\right)^4 . \log . \left(\frac{4}{3}\right)^3 \text{ und } \left(\frac{4}{3}\right)^3 . \log . \left(\frac{4}{3}\right)^4$$

$$3 . \left(\frac{4}{3}\right)^4 . \log . \frac{4}{3} \qquad 4 . \left(\frac{4}{3}\right)^3 . \log . \frac{4}{3}$$

$$3 . \frac{4}{3} \qquad 4$$

$$4 = 4$$

Auf diese Weise kann man fortfahren, Ausdrücke von der Form $a^b$ und $b^a$ zu bilden, welche stets gleich sind, wie sich auf obige Weise leicht zeigen lässt. Alle diese Ausdrücke sind von der Form

$$\left[\left(\frac{x+1}{x}\right)^x\right]^{\left(\frac{x+1}{x}\right)^{x+1}} \text{ und } \left[\left(\frac{x+1}{x}\right)^{x+1}\right]^{\left(\frac{x+1}{x}\right)^x}.$$

Auch die Identität dieser beiden allgemeinen Ausdrücke lässt sich auf obige Weise dartun. — Man kanu somit zu jeder beliebigen, positiven oder negativen, ganzen oder gebrochenen Zahl $x$ eine Zahl $a$ und eiue Zahl $b$ so finden, dass

$$a^b = b^a.$$

Es fragt sich nun, ob man auch zu jeder Zahl $a$, die gegeben ist, die zugehörige Zahl $b$ finden kann, die so beschaffen ist, dass $a^b = b^a$. Nuu kann man zwar aus der Gleichung $\left(\frac{x+1}{x}\right)^x = a$ die Zahl $x$ nicht algebraisch berechnen, jedoch lässt sie sich näherungsweise finden, woraus man natürlich auch $b$ herstellen kann. Es bleibt jedoch noch zu erörtern, ob sich auch für jedes $a$, sei es durch Gleichsetzung mit $\left(\frac{x+1}{x}\right)^x$ oder mit $\left(\frac{x+1}{x}\right)^{x+1}$ ein reelles $x$, also auch reelles $b$ ergiebt, uud ob sich vielleicht dadurch, dass man die gegebeue Zahl $a$ einmal dem einen, andermal dem zweiten Ausdruck gleichsetzt, 2 Werte für $b$ ergeben. Setzt man für $x$ nach und nach alle Werte von $+\infty$ bis $-\infty$, so erhält man:

| $x$ | $\left(\frac{x+1}{x}\right)^x$ | $\left(\frac{x+1}{x}\right)^{x+1}$ |
|---|---|---|
| $+\infty$ | $e$ | $e$ |
| ⋮ | | |
| 3 | $\frac{64}{27}$ | $\frac{256}{81}$ |
| ⋮ | | |
| 2 | $\frac{9}{4}$ | $\frac{27}{8}$ |
| ⋮ | | |
| 1 | 2 | 4 |
| ⋮ | | |
| $\frac{1}{2}$ | $\sqrt{3}$ | $\sqrt{27}$ |
| ⋮ | | |
| $\frac{1}{3}$ | $\sqrt[3]{4}$ | $\sqrt[3]{256}$ |
| ⋮ | | |
| $\pm 0$ | 1 | $\infty$ |
| ⋮ | imaginäre | Werte |
| $-1$ | 0 | 0 |
| ⋮ | | |
| $-\frac{3}{2}$ | $\sqrt{27}$ | $\sqrt{3}$ |
| ⋮ | | |
| $-2$ | 4 | 2 |
| ⋮ | | |
| $-\infty$ | $e$ | $e$ |

Aus dieser Tabelle geht hervor, dass sich zu jedem Werte von $a$, sofern derselbe positiv und grösser als $+1$ ist, eine Zahl $b$ finden lässt, welche so beschaffen ist, dass $a^b = b^a$. Gleichzeitig sieht man, dass nur ein Wert von $b$ möglich ist. Denn ist z. B. $a = \sqrt{3}$, so findet sich diese Zahl zwar in beiden Reihen, die zugehörige Zahl $b$ lautet aber beidemal $\sqrt{27}$. Für echte Brüche ist jedoch entweder die Zahl $b$ imaginär oder die Potenz $a^b$.

Das erhaltene Resultat ist also: Zu jeder positiven Zahl $a$, die grösser als $+1$ ist (mit Ausnahme von $e$), existirt eine von ihr verschiedene zugehörige Zahl $b$, die so beschaffen ist, dass $a^b = b^a$.

Breslau, den 16. Dec. 1880.

M. Luxenberg, stud. math.

---

8.

**Ueber die Tangenten der hyperbolischen Spirale.**

Wenn der Punkt $P$ einer hyperbolischen Spirale und der Punkt $P'$ der Kreisevolvente, welche von einem beliebigen Punkte der

Polarachse beschrieben wird, demselben Polarwinkel, beziehungsweise Wälzungswinkel entsprechen: dann ist die Tangente von $P$ mit dem **Radiusvector** von $P'$ parallel.

Ist $t$ der Winkel, welchen die Tangente mit der Polarachse $OX$ bildet, so ist bekanntlich

$$\operatorname{tang} t = \frac{\frac{dr}{du}\sin u + r\cos u}{\frac{dr}{du}\cos u - r\sin u}$$

Für die hyperbolische Spirale hat man:

$$r = \frac{a}{u}, \quad \frac{dr}{du} = -\frac{a}{u^2}$$

also ist

$$\operatorname{tang} t = \frac{-\frac{a}{u^2}\sin u + \frac{a}{u}\cos u}{-\frac{a}{u^2}\cos u - \frac{a}{u}\sin u}$$

oder

$$\operatorname{tang} t = \frac{\operatorname{tang} u - u}{1 + u \operatorname{tang} u}$$

Nehmen wir nnn einen Kreis mit dem Mittelpnnkte $O$ (Pol) nnd dem beliebigen Halbmesser $b$ an, so beschreibt der in $OX$ gelegene Kreispunkt $A$ eine Kreisevolvente, deren Gleichnngen

$$x = b(\cos u + u\sin u), \quad y = b(\sin u - u\cos u)$$

sind, wenn der Wälznngswinkel $A'OA$ .. $u$ genannt wird. Der Polarwinkel $\Theta$ der Kreisevolvente ist bestimmt dnrch die Gleichnng:

$$\operatorname{tang}\Theta = \frac{y}{x}$$

d. i. hier gleich $\frac{\sin u - u\cos u}{\cos u + u\sin u}$. Es ist also

$$\operatorname{tang}\Theta = \frac{\operatorname{tang} u - u}{1 + u\operatorname{tang} u} = \operatorname{tang} t$$

oder Wkl. $\Theta$ = Wkl. $t$, womit der obige Satz bewiesen ist.

Da die Snbtangente $OQ$ der hyperbolischen Spirale den constanten Wert $-a$ hat, so lässt sich, auf obigen Satz gestützt, die hyperbolische Spirale mit ihren Tangenten leicht construiren. Anch lassen sich nnn einige andere Aufgaben einfach lösen, z. B. die Tan-

genten einer hyperbolischen Spirale zu ermitteln, welche einer gegebenen Geraden parallel sind, oder den Wert $a$ zu bestimmen, wenn ein Punkt $P$, der Pol und die Polarachse gegeben sind, etc.

Eisenstadt, im Jänner 1881.

Fr. Schiffner.

## XXIV.

# Erweiterung des Satzes von der Sichel des Archimedes und sein Zusammenhang mit dem Satze von den Möndchen des Hippokrates; Schwerpunkte der Flächen.

Von

**F. W. Fischer.**

1. Wenn man (wie in der Figur) über der Hypotenuse $AB$ eines rechtwinkeligen Dreiecks $ABC$ als Durchmesser und ebenso über den beiden Abschnitten $AD$ und $BD$, welche auf derselben durch die Höhe gebildet werden, als Durchmesser Halbkreise beschreibt, so ist die von den Umfängen dieser Halbkreise begrenzte sichelförmige Fläche $ACDBA$, die Sichel des Archimedes, an Flächeninhalt gleich der Fläche des Kreises, welcher über der Höhe des Dreiecks als Durchmesser beschrieben wird.

Bezeichnet man die den Winkeln $A$, $B$, $C$ gegenüber liegenden Seiten des Dreiecks bezüglich mit $a$, $b$, $c$, die Projection von $a$ auf $c$ mit $p$ und die von $b$ auf $c$ mit $q$, die Höhe des Dreiecks mit $h$, so ist diese Fläche des Halbkreises über $c$ gleich $\frac{c^2}{8}\pi$, die des Halbkreises über $p$ gleich $\frac{p^2}{8}\pi$ und die des Halbkreises über $q$ gleich $\frac{q^2}{8}\pi$; es ist also die Fläche der Sichel $ACDBA$

$$S = \frac{c^2}{8}\pi - \frac{p^2}{8}\pi - \frac{q^2}{8}\pi$$

oder

$$S = \frac{\pi}{8}(c^2 - p^2 - q^2),$$

oder

$$S = \frac{\pi}{8} \cdot [(p+q)^2 - (p^2 + q^2)]$$

$$S = \frac{\pi}{4} \cdot pq$$

oder, da

$$pq = h^2,$$

(1) $$S = h^2 \frac{\pi}{4};$$

womit der Satz des Archimedes erwiesen.

2. Wenn man den Halbkreis über der Hypotenuse, sowie die Halbkreise über *BD* und *AD* zu Kreisen vervollständigt und noch um jede der Katheten *AC* und *BC* Kreise beschreibt, welche die um *BD* und *AD* als Durchmesser beschriebenen Kreise in den Punkten *E* und *H* schneiden mögen, so entstehen die krummlinigen Dreiecke *BEDKAWB* und *AHDLBWA*, welche von denselben Kreislinien begrenzt werden wie die Sichel *ACDBA* und an Inhalt bezüglich den Flächen der Kreise um *BC* und *AC* gleich sind.

Es ist nämlich, wenn wir die Fläche des ersteren dieser Dreiecke mit $S_1$ und die des zweiten mit $S_2$ bezeichnen,

$$S_1 = \frac{p^2}{8}\pi + \frac{(p+q)^2}{8}\pi - \frac{q^2}{8}\pi$$

oder

$$S_1 = \frac{p^2}{8}\pi + \frac{p^2+q^2+2pq}{8}\pi - \frac{q^2}{8}\pi$$

$$S_1 = \frac{\pi}{4}(p^2+pq)$$

$$S_1 = \frac{\pi}{4}pc$$

oder, da

$$pc = a^2,$$

(2) $$S_1 = \frac{\pi}{4}a^2;$$

d. h. das Krummlinige Dreieck *BEDKAWB* ist an Inhalt gleich der Fläche des Kreises um *BC*.

Ebenso findet sich

(3) $$S_2 = \frac{\pi}{4}b^2;$$

d. h. das krummlinige Dreieck *AHDLBWA* ist an Inhalt gleich der Fläche des Kreises um *AC*.

3. Weiter ist

$$\frac{b^2}{4}\pi - \frac{q^2}{4}\pi = \frac{h^2}{4}\pi = S$$

oder

$$\frac{b^2}{4}\pi - \frac{q^2}{8}\pi = S + \frac{q^2}{8}\pi$$

und, wenn man auf beiden Seiten der Gleichung das krummlinige Viereck $ACEDHA$ subtrahirt, und das Möndchen $AFC$ mit $l'$, das Segment $APD$ mit $s'$ bezeichnet

$$(4)\qquad l' + s' + DED = CEB + \frac{q^2}{8}\pi.$$

Ebenso findet sich, wenn man das Möndchen $BGC$ mit $l$ und das Segment $BJD$ mit $s$ bezeichnet,

$$(5)\qquad l + s + DHD = CHA + \frac{p^2}{8}\pi.$$

Addirt man Gl. (4) und (5), so erhält man

$$l + l' + s + s' = (CHA + \frac{q^2}{8}\pi - DHD) + (CEB + \frac{p^2}{8}\pi - DED)$$

oder

$$l + l' + s + s' = CHDA + CEDB;$$

addirt man noch das biconvexe Stück $CD = d$ auf beiden Seiten der Gleichung, so wird

$$l + l' + s + s' + d = CHDA + CEDB + d = \frac{c^2}{8}\pi$$

oder

$$l + l' + d = \frac{c^2}{8}\pi - s - s'$$

oder

$$(6)\qquad l + l' + d = APDJBWA.$$

Gleichung (6) enthält den Satz, welcher im Archiv im 65. Teil S. 194. von Herrn G. Dostor angegeben ist.

4. Bezeichnet man das krummlinige Dreieck $APDJBWA$ mit $\Delta_0$ und die das biconvexe Segment $CD$ umgebenden mondförmigen Segmente mit $m$ und $m'$, so ist nach Gleichung (6)

$$d = \Delta_0 - l - l',$$

aber auch

$$d = \frac{h^2}{4}\pi - m - m'$$

oder

$$d = S - m - m';$$

daher

$$\varDelta_0 - l - l' = S - m - m'$$

oder

(7) $$S + l + l' = \varDelta_0 + m + m';$$

d. h. die Summe der Flächen der Sichel des Archimedes und der Möndchen des Hippokrates ist gleich dem sichelförmigen Dreiecke *APDJBWA*, vermehrt um die das biconvexe Segment begrenzenden mondförmigen Segmente; oder das krummlinige Viereck *AFCGBEDHA* ist gleich dem sichelförmigen Dreiecke *APDJBWA*, vermehrt um die genannten mondförmigen Segmente.

5. Um zunächst den Abstand des Schwerpunktes der Sichel *ACBDA* von der Hypotenuse *AB* zu bestimmen, sei $\alpha$ der Abstand des Schwerpunktes des Halbkreises über *BD* von der Hypotenuse *AB*, $\beta$ der des Schwerpunktes des Halbkreises über *BD* $\gamma$ der des Schwerpunktes des Halbkreises über *AB* und $y$ der Abstand des Schwerpunktes der Sichel *ACBDA* von *AB*. Der Inhalt der Sichel ist nun gleich dem Inhalte des Halbkreises über *AB*, vermindert um die Summe der Inhalte der Halbkreise über *AD* und *BD*, und man hat, wenn man die Momente dieser Flächen in Bezug auf *AB* als Axe nimmt, mit Beachtung, dass der Inhalt der Sichel gleich dem Inhalte des Kreises um *CD* ist, die Gleichung

$$\alpha \cdot \frac{p^2}{8}\pi + \beta \cdot \frac{q^2}{8}\pi + y \cdot \frac{h^2}{4}\pi = \gamma \cdot \frac{(p+q)^2}{8}\pi,$$

oder, da

$$\alpha = \frac{2p}{3\pi}, \quad \beta = \frac{2q}{3\pi}, \quad \gamma = \frac{2(p+q)}{3\pi},$$

indem man zugleich reducirt,

$$p^3 + q^3 + 3yh^2\pi = (p+q)^3$$

oder

$$3yh^2\pi = 3p^2q + 3pq^2$$

oder, da

$$h^2 = pq,$$

$$y \cdot pq \cdot \pi = pq(p+q),$$

woher

$$y = \frac{p+q}{\pi}$$

(8) $$y = \frac{1}{\pi} \cdot c.$$

Der Abstand des Schwerpunktes der Sichel von der Hypotenuse ist also nur von der Grösse der Hypotenuse abhängig und unabhängig von der Grösse der Katheten.

Für den Halbkreis über der Hypotenuse ist

$$\gamma = \frac{2c}{3\pi}$$

oder

$$\gamma = \frac{2}{3} \cdot \frac{c}{\pi} = \frac{2}{3} y;$$

der Schwerpunkt der Sichel liegt also um die Hälfte weiter von der Hypotenuse als der Schwerpunkt dieses Halbkreises. Da nun auch der Schwerpunkt der halben Kreisperipherie von dem Durchmesser um die Hälfte weiter von diesem liegt als der Schwerpunkt der halben Kreisfläche, so ergiebt sich daraus, dass der Schwerpunkt der Sichelfläche denselben Abstand von der Hypotenuse hat, wie der Schwerpunkt der über derselben beschriebenen Halbkreislinie.

6. Lässt man die Sichel um die Hypotenuse als Axe rotiren, so ist das Volumen des Rotationskörpers

$$V = S \,.\, 2y\pi$$

oder, wenn man die Werte für $S$ und $y$ aus (1) und (8) einsetzt und reducirt,

$$(9) \quad \begin{cases} V = \dfrac{h^2 c}{2}\pi \quad \text{oder} \\[2ex] V = \dfrac{pqc}{2}\pi; \end{cases}$$

d. h. das Volumen des Rotationskörpers ist gleich $\frac{3}{4}$ von dem Volumen eines Ellipsoids, dessen Halbaxen $p$, $q$ und $\frac{c}{2}$ sind, oder gleich dem dreifachen eines Ellipsoids, dessen Halbaxen $\frac{p}{2}$, $\frac{q}{2}$ und $\frac{c}{2}$ sind, da ja

$$3 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{p}{2} \cdot \frac{q}{2} \cdot \frac{c}{2} \cdot \pi = \frac{pqc}{2} \quad \text{ist.}$$

Dasselbe Resultat erhält man auch, wenn man zur Bestimmung dieses Rotationskörpers von dem Volumen der Kugel um $c$ als Durchmesser die Summe der Volumina der Kugeln um $p$ und $q$ subtrahirt. Es ist nämlich

$$V = \frac{4}{3} \cdot \frac{c^3}{8}\pi - \frac{4}{3} \cdot \frac{p^3}{8}\pi - \frac{4}{3} \cdot \frac{q^3}{8}\pi$$

oder

$$V = \frac{\pi}{6}(c^3 - p^3 - q^3)$$

oder

$$V = \frac{p^2q + pq^2}{2}$$

$$V = \frac{pq(p+q)}{2}\pi = \frac{pqc}{2}\pi.$$

7. Um den Abstand des Schwerpunktes der Sichel $ACBDA$ von der im Punkte $A$ auf $AB$ errichteten Senkrechten zu bestimmen, seien $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ die Abstände der Schwerpunkte der Halbkreise über $BD$, $AD$, $AB$ und $x$ der Abstand des Schwerpunktes der Sichel von der Senkrechten auf $AB$ im Punkte $A$. Man hat alsdann, wenn man die Momente dieser Flächen in Bezug auf die Senkrechte nimmt, die Gleichung

$$\alpha' . \frac{p^2}{8}\pi + \beta' . \frac{q^2}{8}\pi + x\frac{h^2}{4}\pi = \gamma' . \frac{c^2}{8}\pi$$

oder, da

$$\alpha' = q + \frac{p}{2}, \quad \beta' = \frac{q}{2}, \quad \gamma' = \frac{c}{2}$$

ist, wenn man einsetzt und reducirt

$$(2q+p)p^2 + q^3 + 4xh^2 = c^3$$

oder, da

$$h^2 = pq$$

und

$$c^3 = (p+q)^3,$$

$$2p^2q + p^3 + q^3 + 4xpq = p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3,$$

woher

(10) $$\begin{cases} x = \dfrac{p+3q}{4} \\ \text{oder, durch die Functionen der Winkel ausgedrückt,} \\ x = \dfrac{1}{4}(a . \sin A + 3b \sin B). \end{cases}$$

Will man den Wert von $x$ durch die Seiten ausdrücken, so wird, da

$$q = \frac{b^2}{c} \quad \text{und} \quad p = \frac{a^2}{c} \quad \text{ist,}$$

$$x = \frac{a^2 + 3b^2}{4c} = \frac{c^2 + 2b^2}{4c}.$$

Für den besonderen Fall, dass das rechtwinkelige Dreieck $ABC$ gleichschenklig ist, wird

$$x = \frac{a^2}{c} = \frac{c}{2}.$$

Um die zu $AB$ senkrechte Ordinate, auf welcher der Schwerpnnkt der Sichel liegt, leicht zn construiren, bestimme man ihren Abstand von der Mitte $O$ der Hypotennse. Der Abstand dieser Ordinate vom Pnnkte $A$ ist nach (10)

$$x = \frac{p+3q}{4};$$

also ist ihr Abstand von der Mitte $O$

$$u = \frac{c}{2} - x = \frac{p}{2} + \frac{q}{2} - \frac{p}{4} - \frac{3q}{4}$$

oder

$$u = \frac{p-q}{4}.$$

Da nun in der Figur

$$CD = \frac{c}{2} - q = \frac{q}{2} + \frac{p}{2} - \frac{2q}{2}$$

oder

$$OD = \frac{p-q}{2}$$

ist, so findet man die gesnchte Ordinate, indem man in der Mitte von $OD$ auf $OD$ eine Senkrechte errichtet.

Der Schwerpnnkt der Sichel $S$ liegt also in gleichem Abstande von der Hypotennse wie der Schwerpnnkt der Halbkreislinie über derselben und zwar anf der Senkrechten, welche den Abstand des Mittelpunktes der Hypotennse von dem Fnsse des Höhenperpendikels halbirt.

8. Bezeichnet man das Volumen des Rotationskörpers, welcher dnrch Umdrehnng der Sichel nm die Senkrechte auf $AB$ im Punkte $A$ entsteht, mit $V'$, so ist

$$V' = S \,.\, 2x\pi,$$

also, wenn man die Werte für $S$ und $x$ ans deu Gleichnngen (1) und (10) einsetzt,

$$V' = \frac{h^2}{4}\pi . 2 \cdot \frac{p+3q}{4}\pi$$

oder

$$V' = \frac{\pi^2}{8} . h^2(p^3+3q) = \frac{\pi^2}{8} pq(p+3q). \tag{11}$$

Dasselbe Resnltat erhält man anch, wenn man das Volmeu als Differenz der Rotationskörper ansieht, welche durch Umdrebnng des Halbkreises über $c$ einerseits und der Snmme der Halbkreise über $a$ und $b$ andrerseits entstehen. Man hat dann

$$V' = \frac{c^3}{8}\pi^2 - \frac{2p^2\pi^2}{8}\left(q+\frac{p}{2}\right) - \frac{q^3}{8}\pi^2$$

oder

$$V' = \frac{\pi^2}{8}(p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3 - 2p^2q - p^3 - q^3)$$

oder nach Reduction

$$V' = \frac{\pi^2}{8}\cdot pq(p+3q).$$

9. Gehen wir weiter zur Bestimmung des Schwerpunktes des krummlinigen Dreiecks *BEDKAWB*, so ist der Inhalt dieser Fläche gleich der Fläche des Halbkreises über *BD*, vermehrt um die des Halbkreises über *AB* und vermindert um die des Halbkreises über *AD*; oder in Zeichen ausgedrückt:

$$S_1 = \frac{p^2}{8}\pi + \frac{c^2}{8}\pi - \frac{q^2}{8}\pi,$$

oder, weil nach Gl. (2)

$$S_1 = \frac{\pi}{4}a^2,$$

$$\frac{\pi}{4}a^2 = \frac{p^2}{8}\pi + \frac{c^2}{8}\pi - \frac{q^2}{8}\pi.$$

Nimmt man die Momente dieser Flächen in Bezug auf die Hypotenuse *AB* und benennt die Abstände der Schwerpunkte der Halbkreisflächen von derselben wie vorhin bezüglich mit $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, und den Abstand des Schwerpunktes der Fläche $S_1$ mit $y_1$, so sind die Grössen $\alpha$ und $\beta$, da die Schwerpunkte der Halbkreisflächen über *AB* und *AD* unterhalb *AB* liegen, mit negativem Vorzeichen einzuführen, und man erhält die Gleichung

$$y_1\cdot\frac{\pi}{4}a^2 = \alpha\cdot\frac{p^2}{8}\pi - \gamma\cdot\frac{c^2}{8}\pi + \beta\cdot\frac{q^2}{8}\pi.$$

Da nun

$$\alpha = \frac{2p}{3\pi},\quad \gamma = \frac{2c}{3\pi},\quad \beta = \frac{2q}{3\pi}$$

ist, so wird

$$y_1\cdot\frac{\pi}{4}a^2 = \frac{2p}{3\pi}\,\frac{p^2}{8}\pi - \frac{2c}{3\pi}\cdot\frac{c^2}{8}\pi + \frac{2q}{3\pi}\cdot\frac{q^2}{8}\pi$$

oder, wenn man reducirt

$$y_1\pi a^2 = \tfrac{1}{3}(p^3 - c^3 + q^3),$$

oder

$$y_1\pi a^2 = \tfrac{1}{3}(p^3 - p^3 - 3p^2q - 3pq^2 - q^3 + q^3),$$

folglich

$$y_1 = -\frac{pq(p+q)}{\pi a^2}.$$

Da

$$(p+q)=c \quad \text{und} \quad a^2=pc$$

ist, so erhält man, dieses einsetzend

$$y_1=-\frac{pqc}{\pi pc}$$

und reducirend

(12)
$$y_1=-\frac{1}{\pi}.q.$$

Der Schwerpunkt der Fläche $S_1$ liegt also unterhalb der Hypotenuse $AB$, wie das negative Zeichen in (12) andeutet, und sein Abstand von der Hypotenuse ist nur abhängig von der Grösse $q$ oder dem Cosinus des nicht in der Fläche $S_1$ liegenden Dreieckswinkels, und ist gleich dem Abstande des Schwerpunktes der Halbkreislinie $AKD$ von der Hypotenuse. Ferner verhält sich dieser Abstand zu dem des Schwerpunktes der Sichel $S$ wie $q:c$. Setzt man in Gl. (12) $q=\frac{b^2}{c}=c\,\frac{b^2}{c^2}=c.\sin^2 B$, so wird

(13)
$$y_1=-\frac{1}{\pi}.c.\sin^2 B,$$

woraus ersichtlich, dass man den Abstand des Schwerpunktes der Fläche $S_1$ von der Hypotenuse findet, indem man die des Schwerpunktes der Sichel mit dem Quadrate des Sinus des spitzen Dreieckswinkels multiplicirt, dessen einer Schenkel den oberen Halbkreis schneidet.

Interessant ist es noch, die Abstände des Schwerpunktes der Fläche $S_1$ für gewisse bestimmte Werte des Winkels $B$ mit dem in Bezug auf die Grösse der Dreieckswinkel constanten Abstande des Schwerpunktes von der Hypotenuse der Sichel $S$ zu vergleichen, wozu die Gl. (13) Anlass giebt. Es ist nämlich für

$$B=30^0,\quad \sin^2 B=\tfrac{1}{4},$$
$$B=45^0,\quad \sin^2 B=\tfrac{2}{4},$$
$$B=60^0,\quad \sin^2 B=\tfrac{3}{4};$$

mithin ist der Abstand des Schwerpunktes der Fläche $S_1$ von der Hypotenuse ein Viertel oder zwei Viertel oder drei Viertel von dem des Schwerpunktes der Sichel $S$ von der Hypotenuse, je nachdem der Winkel $B$ die angegebene entsprechende Grösse hat. Ebenso lässt sich nach dem unter 5. Erwähnten ähnlich der Abstand des Schwerpunktes der Fläche $S_1$ von der Hypotenuse für gewisse bestimmte Werte des Winkels $B$ mit dem betreffenden Abstande des Schwerpunktes des Halbkreises über der Hypotenuse in Vergleich bringen.

10. Zur Bestimmung des Abstandes des Schwerpunktes der Fläche *BEDKAWB* von der in *A* auf *AB* errichteten Senkrechten ergiebt sich, wenn man den Abstand des Schwerpunktes dieser Fläche mit $x_1$ und die Abstände der Schwerpunkte der Halbkreise über *BD*, *AD*, *AB* (wie unter 7.) mit $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ bezeichnet und die Momente dieser Flächen in Bezug auf die Senkrechte in *A* nimmt, die Gleichung

$$S_1 . x_1 = \alpha' . \frac{p^2}{8} \pi + \gamma' \cdot \frac{c^2}{8} \pi - \beta' \cdot \frac{q^2}{8} \pi$$

oder, da nach Gl. (2)

$$S_1 = \frac{\pi}{4} a^2,$$

$$x_1 \cdot \frac{a^2}{4} \pi = \alpha' . \frac{p^2}{8} \pi + \gamma' \cdot \frac{c^2}{8} \pi - \beta' \cdot \frac{q^2}{8} \pi .$$

Da nun

$$\alpha' = q + \frac{p}{2}, \quad \beta' = \frac{q}{2}, \quad \gamma' = \frac{c}{2}$$

ist, so ergibt sich, wenn man substituirt und reducirt,

$$4x_1 . a^2 = 2p^2q + p^3 + c^3 - q^3$$

oder, wenn man die Werte

$$p = \frac{a^2}{c}, \quad q = \frac{b^2}{c}$$

einsetzt,

$$x_1 = \frac{2a^4b^2 + a^6 + c^6 - b^6}{4a^2c^3}.$$

Setzt man noch

$$c^6 = a^6 + 3a^4b^2 + 3a^2b^4 + b^6,$$

so wird

$$x_1 = \frac{2a^4 + 5a^2b^2 + 3b^4}{4c^3},$$

und weil

$$a^4 + 2a^2b^2 + b^4 = (a^2+b^2)^2 = c^4,$$

$$x_1 = \frac{2c^4 + b^2c^2}{4c^3}$$

(14) $$\left\{\begin{array}{l} x_1 = \frac{2c^2+b^2}{4c} = \frac{1}{4}(2c+q) = \frac{1}{4}(2p+3q) \\ \text{oder, durch die Functionen der Winkel ausgedrückt,} \\ x_1 = \frac{1}{4}(2a . \sin A + 3b . \sin B). \end{array}\right.$$

Zur Construction der zu *AB* senkrechten Ordinate, auf welcher der

Schwerpunkt der Fläche $S_1$ liegt, bestimme man ihren Abstand von der Mitte $O$ der Hypotenuse, indem man $\frac{p+q}{2}$ von dem Werte für $x_1 = \frac{1}{4}(2p+3q)$ subtrahirt. Es wird dann

$$u_1 = \frac{p}{2} + \frac{3q}{4} - \frac{p+q}{2},$$

$$u_1 = \frac{q}{4}.$$

Man findet daher die gesuchte Ordinate, indem man auf $OB$ in einer Entfernung gleich $\frac{q}{4}$ vom Punkte $O$ eine Senkrechte errichtet; der Schwerpunkt der Fläche $S_1$ liegt dann auf derselben gleich weit von der Hypetenuse wie der Schwerpunkt der Halbkreislinie über $q$.

11. Bezeichnet man das Volumen des Rotatioskörpers, welcher durch Umdrehung der Fläche $BEDKAWB$ um die Senkrechte auf $AB$ im Punkte $A$ entsteht, mit $V_1$, so ist

$$V_1 = S_1 . 2x_1 . \pi,$$

also, wenn man die Werte für $S_1$ und $x_1$ aus den Gl. (2) und (14) einsetzt

$$V_1 = \frac{\pi}{4} a^2 . 2 . \tfrac{1}{4}(2p+3q)\pi$$

(15) $$V_1 = \frac{\pi^2}{8} a^2 (2p+3q).$$

12. Die Bestimmungen des Abstandes des Schwerpunktes der Fläche $AHDLBWA = S_2$ von der Hypotenuse und von der im Punkte $B$ auf $AB$ errichteten Senkrechten ergeben sich ähnlich wie die entsprechenden bei der Fläche $S_1$ und man hat in den für diese Fläche erhaltenen Resultaten für $y_1$ und $x_1$ an Stelle der Grösse $q$ nur die Grösse $p$ zu setzen, um die entsprechenden Werte für die Fläche $S_2$ zu erhalten. Bezeichnet man den Abstand des Schwerpunktes der Fläche $S_2$ von der Hypotenuse mit $x_2$ und von der im Punkte $B$ auf $AB$ errichteten Senkrechten mit $x_2$, so wird daher

$$y_2 = -\frac{1}{\pi} p$$

$$x_2 = \tfrac{1}{4}(2q+3p).$$

Der Schwerpunkt der Fläche $S_2$ liegt, wie die Gleichung

$$y_2 = -\frac{1}{\pi} p$$

zeigt, unterhalb der Hypotenuse, und sein Abstand von derselben ist wieder **nur** abhängig von der Grösse $p$ und gleich dem Abstande des Schwerpunktes der Halbkreislinie über $p$.

Der Abstand der auf $AB$ senkrechten Ordinate, in welcher der Schwerpunkt der Fläche $S_2$ liegt, von der Mitte der Hypotenuse wird gefunden, indem man von dem Werte $x_2 = \frac{1}{4}(2q + 3p)$, welcher den Abstand vom Punkte $B$ angieht, $\frac{p+q}{2}$ subtrahirt. Es wird dann

$$u_2 = \tfrac{1}{4}(2q + 3p) - \frac{p+q}{2}$$

$$u_2 = \frac{p}{4};$$

d. h. diese Ordinate trifft $AO$ in einem Abstande gleich $\frac{p}{4}$ von der Mitte der Hypotenuse.

13. **Bestimmung des Abstandes des Schwerpunktes der sichelförmigen Fläche $AFCGBLDKA$ von der Hypotenuse $AB$.** Benennen wir diese Fläche, welche durch Addition der Sichel $S$ und der Möndchen $l$ und $l'$ entsteht, mit $\Sigma$ und den Abstand ihres Schwerpunktes von der Hypotenuse mit $y'$, so ist ihr Moment in Bezug auf $AB$ als Axe

$$y' . \Sigma = y'(S + l + l')$$

oder, da

$$S = \frac{\pi}{4} h^2 \quad \text{und} \quad l + l' = \frac{al}{2} \quad \text{ist,}$$

$$(16) \qquad y' . \Sigma = y' \left(\frac{\pi}{4} h^2 + \frac{al}{2}\right).$$

Nun ist auch die Fläche $\Sigma$ gleich der Fläche des Dreiecks $ABC$ vermehrt um die der Halbkreise über $BC$ und $AC$ und vermindert um die der Halbkreise über $BD$ und $AD$ oder in Zeichen

$$\Sigma = \frac{ab}{2} + \frac{a^2}{8}\pi + \frac{l^2}{8}\pi - \frac{p^2}{8}\pi - \frac{q^2}{8}\pi.$$

Bezeichnet man nun die Abstände der Schwerpunkte der Halbkreise über $BD$ und $AD$ von $AB$, wie früher, mit $\alpha$ und $\beta$, den Abstand des Schwerpunktes des Dreiecks mit $\delta$ und die der Halbkreise über $BC$ und $AC$ von $AB$ mit $v$ und $v'$ und nimmt die Momente dieser Flächen in Bezug auf $AB$, so wird

$$y' . \Sigma = \delta . \frac{ab}{2} + v . \frac{a^2}{8}\pi + v' . \frac{b^2}{8}\pi - \alpha . \frac{p^2}{8}\pi - \beta . \frac{q^2}{8}$$

oder, da

$$\delta = \frac{h}{3}, \quad \alpha = \frac{2p}{3\pi}, \quad \beta = \frac{2q}{3\pi},$$

$$y'.\Sigma = \frac{h}{3}\cdot\frac{ab}{2} + v\cdot\frac{a^2}{8}\pi + v'\cdot\frac{b^2}{8}\pi - \frac{2p}{3\pi}\cdot\frac{p^2}{8}\pi - \frac{2q}{3\pi}\cdot\frac{q^2}{8}\pi,$$

in welcher Gleichung $v$ und $v'$ durch bekannte Grössen auszudrücken sind. Ist in der Figur $Q$ der Schwerpunkt des Halbkreises über $BC$, $MN$ und $QS$ senkrecht $AB$ und $MB$ parallel $AB$, so ist

$$QS = QR + RS = QR + MN.$$

Nun ist $MN = \frac{h}{2}$ und $QR = QM.\cos B = QM.\frac{p}{a} = \frac{2a}{3\pi}\cdot\frac{p}{a} = \frac{2p}{3\pi}$; also

$$v = QS = \frac{h}{2} + \frac{2p}{3\pi}$$

oder

$$v = \frac{3h\pi + 4p}{6\pi};$$

ebenso findet sich

$$v' = \frac{3h\pi + 4q}{6\pi}$$

Setzt man diese Werte in die letzte Gleichung, so erhält man:

$$y'.\Sigma = \frac{h}{3}\cdot\frac{ab}{2} + \frac{3h\pi + 4p}{6\pi}\cdot\frac{a^2}{8}\pi + \frac{3h\pi + 4q}{6\pi}\cdot\frac{b^2}{8}\pi - \frac{2p}{3\pi}\cdot\frac{p^2}{8}\pi - \frac{2q}{3\pi}\cdot\frac{q^2}{8}\pi$$

oder, wenn man reducirt

$$y'\Sigma = \frac{abh}{6} + \frac{3h\pi c^2 + 4a^2p + 4b^2q}{48} - \frac{p^3}{12} - \frac{q^3}{12}$$

und, wenn man

$$h = \frac{ab}{c}, \quad p = \frac{a^2}{c}, \quad q = \frac{b^2}{c}$$

substituirt, nach einigen Umrechnungen

(17) $$y'\Sigma = \frac{abc\pi}{16} + \frac{a^2b^2}{4c}.$$

Durch Combination von Gl. (16) und (17) erhält man nun

$$y'\left(\frac{\pi}{4}h^2 + \frac{ab}{2}\right) = \frac{abc\pi}{16} + \frac{a^2b^2}{4c}$$

also

$$y' = \frac{abc\pi + \frac{4a^2b^2}{c}}{4\pi h^2 + 8ab}$$

oder, da

$$h^2 = \frac{a^2b^2}{c^2},$$

$$y' = \frac{abc^3\pi + 4a^2b^2c}{4\pi a^2b^2 + 8abc^2}$$

oder

$$y' = \frac{c^3\pi + 4abc}{4ab\pi + 8c^2}$$

(18)
$$\begin{cases} y' = \frac{c}{4}\,\frac{c^2\pi + 4ab}{ab\pi + 2c^2}, \\ y' = \frac{c}{4}\,\frac{c\pi + 4h}{h\pi + 2c}. \end{cases}$$

Aus der zuletzt erhaltenen Gleichung ergiebt sich

$$\frac{4y'}{c} = \frac{c\pi + 4h}{h\pi + 2c}$$

oder

$$\frac{y'}{c} = \frac{\frac{c}{4}\pi + h}{h\pi + 2c}$$

oder

$$y' : c = \left(\frac{c}{4} + \frac{h}{\pi}\right) : \left(h + \frac{2c}{\pi}\right)$$

oder

$$y' : \frac{c}{2} = \left(\frac{c}{4} + \frac{h}{\pi}\right) : \left(\frac{h}{2} + \frac{c}{\pi}\right),$$

d. h. der Abstand des Schwerpunktes der Fläche $\Sigma$ von der Hypotenuse verhält sich zur halben Hypotenuse, wie sich verhält der vierte Teil der letzteren vermehrt um den Abstand des Schwerpunktes der Halbkreislinie über der Höhe von dieser zur Summe der halben Höhe und des Abstandes des Schwerpunktes der Halbkreislinie über der Hypotenuse von dieser.

Der Abstand des Schwerpunktes der sichelförmigen Fläche $\Sigma$ von der Hypotenuse ist also nicht, wie dieses bei den Flächen $S$, $S_1$ und $S_2$ der Fall war, abhängig von einer Grösse, sondern von zweien, von der Hypotenuse und der Höhe des rechtwinkeligen Dreiecks.

14. Bestimmung des Volumens des Rotationskörpers, welcher durch Umdrehung der Fläche $\Sigma$ um die Hypotenuse entsteht. Bezeichnet man das Volumen dieses Rotationskörpers mit $V_6$, so ist nach den Gl. (16) und (18)

$$V_6 = 2 \cdot \frac{c}{4} \cdot \frac{c\pi + 4h}{4\pi + 2c} \cdot \pi \cdot \left(\frac{hc}{2} + \frac{h^2}{4}\pi\right),$$

$$V_6 = \frac{c^2 h\pi}{4} \frac{c\pi + 4h}{h\pi + 2c} + \frac{h^2 c\pi^2}{8} \cdot \frac{c\pi + 4h}{h\pi + 2c},$$

(19)
$$\left\{\begin{array}{l} V_6 = \dfrac{hc\pi}{8} \cdot \dfrac{2c^2\pi + 8hc + ch\pi^2 + 4h^2\pi}{h\pi + 2c} \\ \qquad \text{oder, da } \; hc = ab, \\ V_6 = \dfrac{abc\pi}{8(ab\pi + 2c^2)} \cdot \left(2c^2\pi + 8ab + ab\pi^2 + \dfrac{a^2b^2}{c^2}\pi\right). \end{array}\right.$$

Will man noch das Volumen des Rotationskörpers, welcher durch Umdrehung der Möndchen $l$ und $l'$ um die Hypotenuse entsteht, bestimmen, so hat man von dem Volumen $V_6$ das Volumen des Rotationskörpers, welcher durch Umdrehung der Sichel $S$ um die Hypotenuse entsteht, nämlich $V$, zu subtrahiren. Es ist alsdann, wenn man das fragliche Volumen mit $V_l$ bezeichnet

$$V_l = V_6 - V$$

oder, indem man die Werte für $V_6$ und $V$ aus den Gleichungen (19) und (9) einsetzt

$$V_l = \frac{hc\pi}{8} \cdot \frac{2c^2\pi + 8hc + ch\pi^2 + 4h^2\pi}{h\pi + 2b} - \frac{h^2 c\pi}{2}$$

oder

$$V_l = \frac{hc^2\pi^2}{8(h\pi + 2c)} + \frac{h^2c^2\pi}{h\pi + 2c} + \frac{hc^2\pi^3}{8(h\pi + 2c)} + \frac{h^3c\pi^2}{2(h\pi + 2c)} - \frac{h^3cx^2}{2(h\pi + 2c)} - \frac{h^2c^2\pi}{h\pi + 2c}$$

oder, wenn man reducirt,

$$V_l = \frac{2hc^3\pi^2 + h^2c^2\pi^3}{8(h\pi + 2c)} = \frac{hc^2\pi^2(h\pi + 2c)}{8(h\pi + 2c)},$$

oder

(20)
$$\left\{\begin{array}{l} V_l = \dfrac{hc^2\pi^2}{8}, \\ V_l = abc \cdot \dfrac{\pi^2}{8}. \end{array}\right.$$

Ist noch $y''$ die Ordinate des Schwerpunktes der Möndchen in Bezug auf die Hypotenuse, so ist

Digitized by Google

$$abc \cdot \frac{\pi^2}{8} = 2y'' \cdot \frac{ab}{2}\pi,$$

woher

$$y'' = \frac{c\pi}{8}.$$

wodurch noch der Abstand des Schwerpunktes der Möndchen von der Hypotenuse bestimmt wird.

Kempen a. Rh., den 20. September 1880.

## XXV.

# Einige Eigenschaften der Zahlen, welche zum Product der ersten $n$ Primzahlen prim und kleiner als dasselbe sind.

Von

Herrn Dr. **Franz Walla.**

---

### I.

Es bedeuten $p_1, p_2, \ldots p_n$ die ersten $n$ Primzahlen ($p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5, \ldots$); $P_n$ deren Product $p_1 p_2 \ldots p_n$; $\varphi_n = (p_1 - 1)(p_2 - 1) \ldots (p_n - 1)$ die Anzahl der im Titel benannten Zahlen und endlich

$$x_1, x_2, \ldots x_{\varphi_n} \tag{1}$$

selbst diese Zahlen.

Man überzeugt sich leicht, dass

$$P_n - x_k = x_{\varphi_n - k + 1}, \tag{2}$$

wobei $k = 1, 2, \ldots \varphi_n$, und man schliesst, dass die erste Hälfte der Reihe (1) zwischen 0 und $\frac{P_n}{2}$, die zweite Hälfte zwischen $\frac{P_n}{2}$ und $P_n$ liegt.

### II.

Indem wir wegen (2) nur die erste Hälfte der Reihe (1) betrachten, gelangen wir zum folgenden Satz:

Wenn $n > 2$, so ist die Hälfte der Glieder dieser Reihe

$$x_1, x_2, \ldots x_{\frac{1}{2}\varphi_n} \tag{3}$$

von der Form $4\mu+1$, die andere Hälfte dagegen von der Form $4\mu+3$.

Beweis. Nachdem wir nus hiervon im Falle $n = 3$ überzeugt haben, begründen wir unseren Satz durch Induction. Vorausgesetzt, dass der Satz beim Zeiger $n$ gültig ist, ist er auch beim Zeiger $n+1$ gültig. Beim Zeiger $n+1$ kommen folgende Grössen vor:

$$P_{n+1} = p_{n+1} P_n,$$
$$y_1, y_2, \ldots y_{\varphi_{n+1}}. \tag{4}$$

Bilden wir das Schema:

$$\begin{array}{llll} x_1, & x_2, \ldots & & x_{\varphi_n} \\ P_n + x_1, & P_n + x_2, \ldots & & P_n + x_{\varphi_n} \\ 2P_n + x_1, & 2P_n + x_2, \ldots & & 2P_n + x_{\varphi_n} \\ \ldots & & & \\ (p_{n+1}-1)P_n + x_1, & \ldots & \ldots & (p_{n+1}-1)P_n + x_{\varphi_n} \end{array} \tag{5}$$

so sind hier alle jene zu $P_n$ relativen Primzahlen anfgeschrieben, welche kleiner als $P_{n+1}$ sind. Wenn wir hiervon die Zahlen bekommen wollen, welche kleiner als $P_{n+1}$, aber zu $P_{n+1}$ prim sind, so brauchen wir nur die im Schema (5) enthaltene folgende Reihe wegzulassen:

$$p_{n+1} x_1, p_{n+1} x_2, \ldots p_{n+1} x_{\varphi_n}. \tag{6}$$

Aber in der ersten Reihe des Schema (5) sind nach der Voraussetzung ebenso viele Zahlen von der Form $4\mu+1$ wie von der Form $4\mu+3$ und in jeder andern Reihe ebenfalls. Denn wenn wir ein allgemeines Glied $(p_{n+1}-k)P_n + x_h$ des Schema (5) betrachten, so sehen wir leicht ein (indem $P_n = 4\mu+2$ und $p_{n+1}-k$ entweder gerade oder ungerade ist), dass

$$(p_{n+1}-k)P_n + x_h = \begin{array}{ll} \text{entweder} & 4\mu + x_h \\ \text{oder} & 4\mu+2+x_h. \end{array}$$

Im ersten Falle giebt jedes $4\mu+1$ und jedes $4\mu+3$ förmige Glied der ersten Reihe ein gleichförmiges Glied für die neue $(p_{n+1}-k+1)$te Reihe, im zweiten Falle bekommen wir bei $4\mu+1$ der ersten Reihe $4\mu+3$ in der neuen Reihe und umgekehrt. Also, da in jeder Reihe des Schema (5) die $4\mu+1$ und $4\mu+3$ förmigen Glieder in gleicher Anzahl vorkommen, gilt dasselbe vom ganzen Schema. Aber auch

für die Reihe (6) können wir dasselbe beweisen. Wenn $p_{n+1} = 4\mu + 1$, so stimmen die Glieder der Reihe (6) mit den Gliedern der ersten Reihe des Schema (5) nach der Form überein. Wenn $p_{n+1} = 4\mu + 3$, so entspricht jedem Gliede der ersten Reihe das Schema (5) von der Form $4\mu + 1$ ein $4\mu + 3$ förmiges in der Reihe (6) und umgekehrt. Also kommen in jedem Falle in der Reihe (6) die $4\mu + 1$ und $4\mu + 3$ förmigen Glieder in gleicher Anzahl vor. Da, wie wir soeben gesehen haben, dasselbe vom Schema (5) gültig ist, so bekommen wir, indem wir vom Schema (5) die Glieder der Reihe (6) weglassen, ein neues Schema, in welchem die $4\mu + 1$ und $4\mu + 3$ förmigen Glieder von gleicher Anzahl sind. Aber die gebliebenen Glieder sind nichts anderes, als die Glieder der Reihe (4). Betrachten wir nun die Relation (2) und vergessen nicht, dass $P_{n+1} = 4\mu + 2$, so sehen wir, dass jedem $4\mu + 1$ und $4\mu + 3$ förmigen $y$, welches kleiner als $\frac{P_{n+1}}{2}$ ist, ein gleichförmiges $y$ entspricht, welches aber grösser als $\frac{P_{n+1}}{2}$. Da es nun ebenso viele $4\mu + 1$ wie $4\mu + 3$ förmige $y$ giebt, so ist es notwendig, dass unter den $y$, welche kleiner als $\frac{P_{n+1}}{2}$ sind, die $4\mu + 1$ und $4\mu + 3$ förmigen Zahlen in gleicher Anzahl vorkommen. Hiermit ist der aufgestellte Satz bewiesen.

## III.

Schreiben wir

$$\frac{P_n}{2} - 2x_1 = x_{(1)}, \quad \frac{P_n}{2} - 2x_2 = x_{(2)}, \; \ldots \; \frac{P_n}{2} - 2x_{\frac{1}{2}\varphi_n} = x_{(\frac{1}{2}\varphi_n)}$$

so ist, abgesehen vom Vorzeichen die Reihe

$$x_{(1)}, \; x_{(2)}, \; \ldots \; x_{(\frac{1}{2}\varphi_n)}$$

eine Permutation der Reihe

$$x_1, \; x_2, \; \ldots \; x_{\frac{1}{2}\varphi_n}.$$

Untersuchen wir die allgemeine Formel

$$\frac{P_n}{2} - 2x_k = x_{(k)} \tag{7}$$

wobei $k \leqq \frac{1}{2}\varphi_n$. Da $x_k$ relative prim zu $P_n$ ist, so ist auch $\frac{P_n}{2} - 2x_k$ relative prim zu $P_n$. Da $x_k < \frac{P_n}{2}$ ist, so ist der absolute

Wert von $\frac{P_n}{2} - 2x_k < \frac{P_n}{2}$. Hiermit ist die Behauptung gerechtfertigt, dass $x_k$ ein Glied der Reihe $x_1, x_2, \ldots x_{\frac{1}{2}\varphi_n}$ sei. Es ist unmöglich, dass, wenn $h$ und $k$ verschieden sind, dann $\frac{P_n}{2} - 2x_k$ und $\frac{P_n}{2} - 2x_h$ entweder mit ungleichem oder mit gleichem Vorzeichen gleich seien. $\frac{P_n}{2} - 2x_k = -\left(\frac{P_n}{2} - 2x_h\right)$ ist unmöglich. Denn hieraus folgt $\frac{P_n}{2} = x_k + x_h$, was eine Unmöglichkeit, da $\frac{P_n}{2}$ ungerade, $x_k + x_h$ hingegen gerade ist. Die zwei Differenzen können auch mit gleichem Vorzeichen nicht gleich sein. Denn daraus würde die der Voraussetzung widersprechende Gleichung $x_k = x_h$ folgen. Also ist der absolute Wert von $\frac{P_n}{2} - 2x_k$ (wobei $k \leqq \frac{1}{2}\varphi_n$) bei verschiedenen $k$ verschieden. Hiermit ist der Satz bewiesen.

## IV.

Das erste Viertel der Reihe (1) liegt zwischen 0 und $\frac{P_n}{4}$, das zweite Viertel zwischen $\frac{P_n}{4}$ und $\frac{P_n}{2}$.

Im Ausdrucke $\frac{P_n}{2} - 2x_k = x_{(k)}$ hat $x_{(k)}$ immer die Form $4\mu + 3$, wenn $\frac{P_n}{2}$ von der Form $4\mu + 1$ ist, möge $x_k$ welche immer von den beiden Formen haben; wenn aber $\frac{P_n}{2}$ die Form $4\mu + 3$ hat, so ist diejenige von $x_{(k)}$ immer $4\mu + 1$. Also bei einem fixen Werte von $n$ sind sämmtliche $x_{(k)}$ congruent in Bezug auf den Modul 4. Da nun nach dem Satze III. die sämmtlichen absoluten Werte der $x_{(k)}$ die $x_i$ reproduciren; anderseits wir nach II. wissen, dass die Hälfte der $x_i$ von der Form $4\mu + 1$, die andere Hälfte hingegen von der Form $4\mu + 3$ ist; und indem wir auf die evidente Relation $4\mu + 1 = -(4\mu' + 3)$ erinnern: so ist klar, dass gerade die Hälfte der $x_{(k)}$ mit negativem Vorzeichen behaftet sein muss. Da nun $x_k$ eine mit $k$ wachsende positive Grösse ist, so ist $x_{(k)}$ eine mit $k$ anfangs abnehmende positive, später eine wachsende negative Grösse. Der Zeichenwechsel findet statt, wenn $k$ aus $\frac{\varphi_n}{4}$ in $\frac{\varphi_n}{4} + 1$ übergeht. So lange $k \leqq \frac{\varphi_n}{4}$, ist also $\frac{P_n}{2} - 2x_k = (+)$, oder $x_k = \frac{P_n}{4} - (+)$. Da nun $x_k$ nach der Voraussetzung positiv ist, schliesst man hieraus leicht auf den ersten Teil des Satzes. Der zweite Teil ist eine Folge des ersteren.

V.

$$\frac{P_n}{2} - 2x_t = (-1)^{\frac{p_1+p_2+\dots+p_n-n+1}{2}}$$

wobei $x_t$ diejenige relative Primzahl bedeutet, welche die Einheit liefert.

Da $x_1 = 1$ ist, so muss in der Reihe der $x_{(k)}$ jedenfalls entweder die positive oder die negative Einheit erscheinen. Man hat $\frac{P_n}{2} - 2x_t = -1$ oder $= +1$, je nachdem $\frac{P_n}{2}$ von der Form $4\mu+1$ oder $4\mu+3$ ist, da $2x_t$ unbedingt von der Form $4\mu+2$ ist. Wir brauchen hiernach nur die Form von $\frac{P_n}{2}$ zu untersuchen, und das hängt von deren Factoren $p_2, p_3, \dots p_n$ ab. Kommen unter diesen die $4\mu+3$förmigen Primzahlen in gerader Anzahl vor, so ist das Product von $p_2, p_3, \dots p_n = \frac{P_n}{2}$ jedenfalls $4\mu+1$ förmig, mögen die $4\mu+1$ förmigen Primzahlen in jedwelcher Anzahl vorkommen; ist hingegen die Anzahl der $4\mu+3$ förmigen Primzahlen ungerade, so ist das Product $\frac{P_n}{2}$ $4\mu+3$ förmig. Im ersten Falle bekommen wir die negative, im zweiten die positive Einheit. Die Summe

$$1 + \frac{p_2-1}{2} + \frac{p_3-1}{2} + \dots + \frac{p_n-1}{2}$$

ist ungerade, wenn die $4\mu+3$ förmigen Primzahlen in gerader, gerade, wenn selbe in ungerader Anzahl vorkommen. Die Formel

$$(-1)^{1+\frac{p_2-1}{2}+\frac{p_3-1}{2}+\dots+\frac{p_n-1}{2}}$$

liefert daher entsprechend die negative oder positive Einheit. In Betracht dessen, dass $p_1 = 2$, kann man den Exponenten in die im Satze aufgeschriebene Form umwandeln.

Zusatz. Man überzeugt sich leicht, dass

$$t = \frac{(p_1-1)(p_2-1)\dots(p_n-1)}{4} + \sin^2\left[\frac{p_1+p_2+\dots+p_n-n+1}{2}\,\frac{\pi}{2}\right].$$

Uebrigens bemerke ich, dass die Sätze I. III. V. respective auf jede ganze Zahl (I.), jede $4\mu+2$ förmige (III.) und jede ungerade Zahl (V.) gültig sind.

Budapest, am 18. Januar 1881.

XXVI.

# Ueber gewisse Systeme von Kegelschnitten, die mit einander projectivisch sind, und deren Erzeugniss.

Von

Herrn Dr. **Eduard Mahler.**

---

Es sei $K + \lambda K' = 0$ die Gleichnng eines Kegelschnittbüschels, so ist der Ort der Punkte, deren Tangentenpaar an irgend einem Elemente dieses Büschels harmonisch geteilt wird durch das Tangentenpaar an einem der Fundamentalelemente — etwa $K = 0$ — ein Kegelschnitt; für jeden andern Kegelschnitt des Büschels bekommen wir einen andern Kegelschnitt; wir haben somit ein ganzes System von unendlich vielen Kegelschnitten, von welchem jedes einzelne Element einem bestimmten Kegelschnitte des Büschels entspricht. Welches ist die Gleichnng dieses Systems von Kegelschnitten?

Der Einfachheit halber denken wir nns die beiden Kegelschnitte $K = 0$ nnd $K' = 0$ auf das gemeinsame sich selbst conjngirte Dreieck bezogen nnd zwar seien die beiden Gleichnngen von der Form:

$$K \equiv \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_3^2 = 0$$
$$K' = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$$

so ist die Gleichnng des dnrch sie bestimmten Büschels:

$$(\alpha_1 - \lambda)x_1^2 + (\alpha_2 - \lambda)x_2^2 + (\alpha_3 - \lambda)x_3^2 = 0 \qquad A)$$

Ist nun $x'$ ein Punkt der Ebene, so ist sein Tangentenpaar an den Kegelschnitt $K = 0$:

$$(\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_3^2)(\alpha_1 x_1'^2 + \alpha_2 x_2'^2 + \alpha_3 x_3'^2) \\ - (\alpha_1 x_1 x_1' + \alpha_2 x_2 x_2' + \alpha_3 x_3 x_3')^2 = 0$$

und das Tangentenpaar an $K - \lambda K' = 0$ ist gegeben durch:

$$\{(\alpha_1 - \lambda)x_1^2 + (\alpha_2 - \lambda)x_2^2 + (\alpha_3 - \lambda)x_3^2\} \times \\ \{(\alpha_1 - \lambda)x_1'^2 + (\alpha_2 - \lambda)x_2'^2 + (\alpha_3 - \lambda)x_3'^2\} \\ - \{(\alpha_1 - \lambda)x_1 x_1' + (\alpha_2 - \lambda)x_2 x_2' + (\alpha_3 - \lambda)x_3 x_3'\}^2 = 0$$

Soll dieses Tangentenpaar durch das erstere harmonisch geteilt werden, so müssen die Schnittpunkte einer beliebigen Geraden also auch die der Geraden $x_3 = 0$ mit diesen Geradenpaaren 4 harmonische Punkte sein, d. h. es muss das Punktepaar

$$\alpha_1 x_1^2(\alpha_2 x_2'^2 + \alpha_3 x_3'^2) + (\alpha_3 x_3'^2 + \alpha_1 x_1'^2)\alpha_2 x_2^2 - 2\alpha_1\alpha_2 x_1' x_2' x_1 x_2 = 0$$

harmonisch geteilt sein durch das Punktepaar:

$$(\alpha_1 - \lambda)x_1^2[(\alpha_2 - \lambda)x_2'^2 + (\alpha_3 - \lambda)x_3'^2] \\ + x_2^2(\alpha_2 - \lambda)[(\alpha_3 - \lambda)x_3'^2 + (\alpha_1 - \lambda)x_1'^2] \\ - 2(\alpha_1 - \lambda)(\alpha_2 - \lambda)x_1' x_2' x_1 x_2 = 0$$

Dann muss aber

$$\alpha_1[\alpha_2 x_2'^2 + \alpha_3 x_3'^2].(\alpha_2 - \lambda).[(\alpha_3 - \lambda)x_3'^2 + (\alpha_1 - \lambda)x_1'^2] \\ + \alpha_2[\alpha_3 x_3'^2 + \alpha_1 x_1'^2].(\alpha_1 - \lambda).[(\alpha_2 - \lambda)x_2'^2 + (\alpha_3 - \lambda)x_3'^2] = \\ 2\alpha_1\alpha_2(\alpha_1 - \lambda)(\alpha_2 - \lambda)x_1'^2 x_2'^2$$

sein, d. h. es muss

$$x_1'^2.[\alpha_2(\alpha_3 - \lambda) + \alpha_3(\alpha_2 - \lambda)](\alpha_1 - \lambda)\alpha_1 \\ + x_2'^2.[\alpha_3(\alpha_1 - \lambda) + \alpha_1(\alpha_3 - \lambda)](\alpha_2 - \lambda)\alpha_2 \qquad \text{B)} \\ + x_3'^2.[\alpha_1(\alpha_2 - \lambda) + \alpha_2(\alpha_1 - \lambda)](\alpha_3 - \lambda)\alpha_3 = 0$$

sein. Dies ist die Gleichung des obgenannten Systems von Kegelschnitten. Je nachdem man dem Parameter $\lambda$ einen andern Wert beilegt, so hat man es mit einem andern Kegelschnitte des Büschels A) und dementsprechend mit einem andern des Systems B) zu tun. Legt man dem $\lambda$ alle möglichen Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ bei, so bekommt man durch A) alle unendlich vielen Kegelschnitte des Büschels und durch B) die diesen Kegelschnitten entsprechenden Kegelschnitte des durch B) gegebenen Systems, indem die zu gleichen $\lambda$-Werten gehörigen Elemente als entsprechende bezeichnet werden sollen. Und zwar hat jeder Kegelschnitt des Systems B) die Eigen-

schaft, dass das von irgend einem seiner Punkte an den entsprechenden Kegelschnitt des Büschels A) gezogene Tangentenpaar durch das von diesem Punkte an das Fundamentalelement $K=0$ des Büschels gezogene Tangentenpaar harmonisch geteilt wird. Zwei merkwürdige Kegelschnitte des Systems B) sind die den Werten $\lambda=0$ und $\lambda=\infty$ entsprechenden Kegelschnitte.

Setzt man $\lambda=0$, so hat man:

$$2\alpha_1{}^2\alpha_2\alpha_3 x_1'^2+2\alpha_2{}^2\alpha_3\alpha_1 x_2'^2+2\alpha_3{}^2\alpha_1\alpha_2 x_3'^2=0$$

oder durch $2\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ dividirt:

$$\alpha_1 x_1'^2+\alpha_2 x_2'^2+\alpha_3 x_3'^2\equiv K=0.$$

Setzt man $\lambda=\infty$, so bekommt man:

$$\alpha_1(\alpha_2+\alpha_3)x_1'^2+\alpha_2(\alpha_3+\alpha_1)x_2'^2+\alpha_3(\alpha_1+\alpha_2)x_3'^2=0 \qquad \text{C)}$$

Nun ist der dem $\lambda=\infty$ entsprechende Kegelschnitt des Büschels A) der Kegelschnitt $K'=0$, somit C) der dem Kegelschnitte $K'=0$ entsprechende Kegelschnitt des Systems B), d. h. C) drückt die Bedingung aus, dass das von einem Punkte $x'$ an $K'=0$ gezogene Tangentenpaar durch das an $K=0$ gezogene Tangentenpaar harmonisch geteilt werde.

Es ist klar, dass es ebenso ein System von Kegelschnitten geben wird, dessen dem $\lambda=0$ entsprechender Kegelschnitt der durch C) gegebene, und dessen dem $\lambda=\infty$ entsprechender $K'=0$ ist.

Der durch C) gegebene Kegelschnitt gehört also 2 Kegelschnittsystemen an, einem Systeme, dessen dem $\lambda=0$ und $\lambda=\infty$ entsprechende Elemente resp. $K=0$ und der durch C) gegebene sind, und einem Systeme, in welchem Letzterer dem $\lambda=0$ und $K'$ dem $\lambda=\infty$ entspricht. Beide Systeme stehen aber zum gegebenen Büschel $K-\lambda K'=0$ in der innigen Verwandtschaft, dass jedem Elemente des Büschels ein bestimmtes Element des Systems entspricht. Das System B) ist also mit dem gegebenen Büschel projectivisch verwandt.

Wir fragen nun: Welches ist das Erzeugniss dieser projectivischen Gebilde?

Zu diesem Behufe müssen wir natürlich aus A) und B) $\lambda$ eliminiren.

Bevor wir dies tun, bringen wir B) auf eine nach Potenzen von $\lambda$ geordnete Form.

Nach Ausmultipliciren und gehörigem Reduciren geht B) über in *)

$$2K - \lambda\left(\frac{K}{\alpha_1} + \frac{K}{\alpha_2} + \frac{K}{\alpha_3}\right) - \lambda K' + \frac{\lambda^2}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}F' = 0 \qquad \text{D)}$$

wenn der linke Teil der Gl. C) gleich $F$ gesetzt wird.

Die Gleichung des gegebenen Büschels war:

$$K - \lambda K' = 0$$

daraus:

$$\lambda = \frac{K}{K'}$$

Setzt man dies in D) ein, so bekommt man die Gleichung des Erzeugnisses von A) und B). Man hat nämlich:

$$2K - \frac{K}{K'}\left[K\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_3}\right) + K'\right] + \frac{1}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}\frac{K^2}{K'^2}F = 0$$

oder

$$2KK'^2 - K^2K'\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_3}\right) - KK'^2 + \frac{K^2F}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} = 0$$

oder

---

*) Es mögen diese Operationen hier ausgeführt werden. Vor Allem geht B) über in

$$x_1'^2\{2\alpha_2\alpha_3 - \lambda(\alpha_2 + \alpha_3)\}.(\alpha_1^2 - \alpha_1\lambda)$$
$$+ x_2'^2\{2\alpha_3\alpha_1 - \lambda(\alpha_3 + \alpha_1)\}.(\alpha_2^2 - \alpha_2\lambda)$$
$$+ x_3'^2\{2\alpha_1\alpha_2 - \lambda(\alpha_1 + \alpha_2)\}.(\alpha_3^2 - \alpha_3\lambda) = 0$$

oder

$$2\alpha_1^2\alpha_2\alpha_3x_1'^2 + 2\alpha_2^2\alpha_3\alpha_1x_2'^2 + 2\alpha_3^2\alpha_1\alpha_2x_3'^2 - 2\alpha_1\alpha_2\alpha_3\lambda(x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2)$$
$$- \lambda\{(\alpha_1^2\alpha_2 + \alpha_1^2\alpha_3)x_1'^2 + (\alpha_2^2\alpha_3 + \alpha_2^2\alpha_1)x_2'^2 + (\alpha_3^2\alpha_1 + \alpha_3^2\alpha_2)x_3'^2\}$$
$$+ \lambda^2[\alpha_1(\alpha_2 + \alpha_3)x_1'^2 + \alpha_2(\alpha_3 + \alpha_1)x_2'^2 + \alpha_3(\alpha_1 + \alpha_2)x_3'^2] = 0$$

oder durch $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ dividirt:

$$2K - \lambda\left\{\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_3} + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} + \frac{\alpha_1}{\alpha_1}\right)x_1'^2 + \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_3} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_2}\right)x_2'^2\right.$$
$$\left. + \left(\frac{\alpha_3}{\alpha_1} + \frac{\alpha_3}{\alpha_2} + \frac{\alpha_3}{\alpha_3}\right)x_3'^2 - (x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2)\right\} - 2\lambda K' + \frac{\lambda^2F}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} = 0$$

oder

$$2K - \lambda\left\{\frac{K}{\alpha_1} + \frac{K}{\alpha_2} + \frac{K}{\alpha_3} - K'\right\} - 2\lambda K' + \frac{\lambda^2F}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} = 0$$

oder

$$2K - \lambda\left\{\frac{K}{\alpha_1} + \frac{K}{\alpha_2} + \frac{K}{\alpha_3} + K'\right\} + \frac{\lambda^2F}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} = 0$$

$$K'^2 - KK'\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\frac{1}{\alpha_3}\right)+\frac{KF}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}=0 \qquad \text{E)}$$

d. h. das Erzeugniss des Büschels A) und des Systems B) ist eine Curve 6ter Ordnung, die in den Kegelschnitt $K=0$ und die durch E) ausgedrückte Curve 4ter Ordnung degenerirt.

Wenn wir E) entwickeln, so haben wir:

$$(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^2-(\alpha_1x_1^2+\alpha_2x_2^2+\alpha_3x_3^2)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\frac{1}{\alpha_3}\right)$$
$$+\frac{1}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}(\alpha_1x_1^2+\alpha_2x_2^2+\alpha_3x_3^2).[\alpha_1x_1^2(\alpha_2+\alpha_3)+\alpha_2x_2^2(\alpha_3+\alpha_1)$$
$$+\alpha_3x_3^2(\alpha_1+\alpha_2)]=0$$

oder nach einigen Reductionen:

$$x_1^4\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}+\frac{\alpha_1}{\alpha_3}\right)+x_2^4\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_3}+\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)+x_3^4\left(\frac{\alpha_3}{\alpha_1}+\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)$$
$$-x_1^2x_2^2\left(2\frac{\alpha_1}{\alpha_2}+\frac{\alpha_1}{\alpha_3}+2\frac{\alpha_2}{\alpha_1}+\frac{\alpha_2}{\alpha_3}-2\right)-x_1^2x_3^2\left(2\frac{\alpha_1}{\alpha_3}+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right.$$
$$\left.+2\frac{\alpha_3}{\alpha_1}+\frac{\alpha_3}{\alpha_2}-2\right)-x_2^2x_3^2\left(2\frac{\alpha_2}{\alpha_3}+\frac{\alpha_2}{\alpha_1}+2\frac{\alpha_3}{\alpha_2}+\frac{\alpha_3}{\alpha_1}-2\right)=0$$

Sucht man nun die Schnittpunkte dieser Curve 4ter Ordnung mit den Seiten des Fundamentaldreiecks, so hat man bekanntlich die letzte Gleichung coexistirend zu betrachten mit resp. $x_3=0$, $x_2=0$, $x_1=0$.

Setzt man aber $x_3=0$, so erhält man folgende in $x_1$, $x_2$ biquadratische Gleichung:

$$x_1^4\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}+\frac{\alpha_1}{\alpha_3}\right)+x_2^4\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_3}+\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)-x_1^2x_2^2\left(2\frac{\alpha_1}{\alpha_2}+\frac{\alpha_1}{\alpha_3}+2\frac{\alpha_2}{\alpha_1}+\frac{\alpha_2}{\alpha_3}-2\right)=0$$

welche die 4 Schnittpunkte der Curve mit $x_3=0$ bestimmt.

Setzen wir

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2}+\frac{\alpha_1}{\alpha_3}=A,\qquad \frac{\alpha_2}{\alpha_3}+\frac{\alpha_2}{\alpha_1}=B,$$
$$2\frac{\alpha_1}{\alpha_2}+\frac{\alpha_1}{\alpha_3}+2\frac{\alpha_2}{\alpha_1}+\frac{\alpha_2}{\alpha_3}-2=C$$

so ist:

$$\frac{x_1}{x_2}=\pm\sqrt{\frac{C\pm\sqrt{C^2-4AB}}{2A}}$$

Nun gibt aber der letzte Ausdruck das Teilverhältniss der Schnittpunkte der Curve mit $x_3=0$ bezüglich der beiden auf $x_3=0$ gelegenen

Ecken des Fundamentaldreiecks. Wie wir aber sehen, teilen sich die 4 Schnittpnnkte in 2 Pnnktepaare, für deren einzelne Elemente $\frac{x_1}{x_2}$ sich nur dnrch das Vorzeichen nnterscheidet, so dass das Teilverhältniss des einen Elementes das negative des andern ist, jedes Punktepaar also durch die Ecken des Dreiecks harmonisch geteilt wird.

Wir haben somit den Satz:

„Wenn man bezüglich eines jeden Kegelschnitts eines Büschels den Ort der Punkte sncht, deren Tangentenpaar an ihn harmonisch geteilt wird durch das an ein Fnndamentalelement des Büschels gezogene Tangentenpaar, so bekommt man ein System von Kegelschnitten, welchem das den Elementen des Büschels gem. sich selbst conjng. Dreieck als sich selbst conjng. Dreieck entspricht, und das mit jenem gegebenen Büschel projectivisch verwandt ist. Das Erzengniss dieses Systems von Kegelschnitten mit jenem Büschel ist eine Cnrve 6ter Ordnnng, die in das hetreffende Fundamentalelement des Büschels und in eine Cnrve 4ter Ordnnng degenerirt, deren Schnittpnnktepaare mit den Seiten des genannten sich selbst conjng. Dreiecks durch die Ecken jenes Dreiecks harmonisch geteilt werden."

Ich erwähnte oben, dass es ebenso ein System von Kegelschnitten gebe, das dem gegebenen Büschel gegenüber bezügl. $K'=0$ dieselbe Rolle spielt, wie das Erstere bezügl. $K=0$ dem Büschel gegenüber. Es ist nnn klar, dass anch dieses System mit dem gegebenen Büschel ein Erzengniss liefert, das in $K'=0$ nnd in eine Cnrve 4ter Ordnnng degenerirt, die die Seiten des Fnndamentaldreiecks in Pnnktepaaren schneidet, die dnrch die Ecken jenes Dreiecks harmonisch geteilt werden.

Es mag nnn von Interesse sein, nach dem Orte zn fragen, welchen die beiden genannten Systeme, die doch mit einander projectivisch sind, hilden.

Die Gleichung des 1sten Systems war:

$$2K-\lambda\left[K\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\frac{1}{\alpha_3}\right)+K'\right]+\frac{\lambda^2}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}F=0$$

Die Gleichnng des 2ten Systems wird sein:

$$F-\lambda[K'(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)+K]+2\lambda^2K'=0$$

Die Gleichnng des verlangten Erzeugnisses ist also:

$$0=\begin{vmatrix} 2K, & -\left[K\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\frac{1}{\alpha_3}\right)+K'\right], & \frac{F}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}, & 0 \\ 0, & 2K, & -\left[K\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\frac{1}{\alpha_3}\right)+K'\right]. & \frac{F}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} \\ F, & -[K'(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)+K], & 2K', & 0 \\ 0, & F, & -[K'(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)+K], & 2K' \end{vmatrix}$$

Wie man sieht, ist dasselbe eine Curve 8ter Ordnnng; nachdem aber in der Gleichnng derselben nur gerade Potenzen von $x_1$, $x_2$, $x_3$ vorkommen (indem $K$, $K'$, $F$ solche Fnnctionen 2ten Grades sind, die keine ungrade Potenz von $x_1$, $x_2$, $x_3$ enthalten), so bekommen wir, indem wir $x_3 = 0$ setzen und somit die Schnittpunkte der Cnrve mit der betreffenden Seite des Fnndamentaldreiecks suchen, znr Bestimmung der Letzteren eine Gleichnng 4ten Grades in $\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2$; sind daher die Lösnngen dieser Gleichnng 4ten Grades $\alpha_1^2$, $\alpha_2^2$, $\alpha_3^2$, $\alpha_4^2$, so sind die 8 Schnittpunkte der obigen Curve mit $x_3 = 0$ gegeben durch:

$$\frac{x_1}{x_2} = \begin{cases} \pm\alpha_1, \\ \pm\alpha_2, \\ \pm\alpha_3, \\ \pm\alpha_4, \end{cases}$$

d. h. die 8 Schnittpnnkte gruppiren sich in 4 Punktepaare, von denen ein jedes durch die Ecken des Dreiecks harmonisch geteilt wird.

Wir haben somit den Satz:

„Wenn man das Erzeugniss jener 2 Systeme von Kegelschnitten sucht, von denen das eine so beschaffen ist, dass das von einem Punkte irgend eines Kegelschnitts dieses Systems an den entsprechenden Kegelschnitt des Büschels $K - \lambda K' = 0$ gezogene Tangentenpaar harmonisch geteilt wird durch das von diesem Punkte an $K = 0$ gezogene Tangentenpaar und das andere System dieselbe Eigenschaft gegenüber dem Büschel bezügl. $K' = 0$ hat, so bekommt man eine Curve 8ter Ordnung, die die Seiten des dem gegebenen Büschel sich selbst conjug. Dreiecks in 4 Pnnktepaaren einer Involntion schneidet, deren Doppelpunkte die Dreiecksecken sind."

Wien, den 26. Jannar 1881.

# XXVII.

# Zur allgemeinen Theorie der ebenen Curven.

Von

**Eduard Mahler.**

---

Bekanntlich ist durch $x = f(u, v)$, $y = \varphi(u, v)$, wobei $u$ nnd $v$ 2 unabhängige Variablen nnd $x$, $y$ die gewöhnlichen rechtwinkligen Coordinaten bedenten, das allgemeinste ebene Coordinatensystem ausgedrückt, indem jeder Pnnkt der Ebene als Schnittpunkt je zweier Curven zweier Cnrvensysteme (Cnrven, in denen überall $u =$ const., und Curven, in denen überall $v =$ const. ist) erscheint. Von diesem Gesichtspunkte ans wollen wir nun die allgemeine Theorie ebener Curven — ein Problem, das mit der Arbeit von Gauss *) im innigen Zusammenhange steht nnd meines Wissens bisher nicht behandelt wurde — bearbeiten.

## Einleitnng.

Denken wir nns dem $u$ nnd $v$ ein Wertesystem beigelegt, also einen Pnnkt $(x, y)$ der Ebene angenommen, so ist klar, dass sein unendlich naher Nachbarpunkt in der $u$-Linie (eine Cnrve, in deren sämmtlichen Pnnkten $v =$ const. ist; ebenso nennen wir eine Curve, in deren sämmtlichen Pnnkten $u =$ const. ist, eine $v$-Linie) die Coordinaten $u + du$, $v$, sein unendlich naher Nachbarpnnkt in der $v$-Linie die Coordinaten $u$, $v + dv$ nnd ein beliebiger nnendlich naher Nachbarpunkt die Coordinaten $u + du$, $v + dv$ hat.

Die rechtwinkligen Coordinaten der genannten Pnnkte sind dann unter Berücksichtigung der von Gauss eingeführten Bezeichnnngen, wonach:

---

*) „Disquisitiones generales circa superficies curvas.“

$$\frac{\partial x}{\partial u} = a, \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = a', \qquad \frac{\partial y}{\partial u} = b, \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = b'$$

$$a^2 + b^2 = E, \qquad aa' + bb' = F, \qquad a'^2 + b'^2 = G \text{ ist,}$$

$$\begin{array}{ll} x, & y, \\ x + adu, & y + bdu, \\ x + a'dv, & y + b'dv, \\ x + adu + a'dv, & y + bdu + b'dv. \end{array}$$

Ein Bogenelement einer $u$-Linie ist daher gegeben durch: $du\sqrt{a^2+b^2} = du\sqrt{E}$; ein Bogenelement einer $v$-Linie ist gegeben durch $dv\sqrt{G}$ nnd ein Bogenelement $ds$ einer beliebigen Curve ist gegeben durch:

$$ds^2 = (adu + a'dv)^2 + (bdu + b'dv)^2 \text{ oder}$$

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2. \qquad 1)$$

Die Richtungen der im Pnnkte $(x, y)$ der Ebene an die durch diesen Pnnkt gehenden $u$- nnd $v$-Linien gezogenen Tangenten sind ansgedrückt durch:

$$\cos(u, x) = \frac{adu}{du\sqrt{E}} = \frac{a}{\sqrt{E}}$$

$$\sin(u, x) = \frac{b}{\sqrt{E}}$$

und $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ 2)

$$\cos(v, x) = \frac{a'}{\sqrt{G}}, \qquad \sin(v, x) = \frac{b'}{\sqrt{G}}$$

oder durch:

$$\operatorname{tg}(u, x) = \frac{b}{a}, \qquad \operatorname{tg}(v, x) = \frac{b'}{a'}$$

Der Winkel $\Theta$, nnter welchem sich eine $u$-Linie und eine $v$-Linie im Punkte $(x, y)$ schneiden, ist somit gegeben durch:

$$\cos\Theta = \frac{aa' + bb'}{\sqrt{EG}} = \frac{F}{\sqrt{EG}}$$

$$\sin\Theta = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{EG}} \qquad 3)$$

oder:

$$\operatorname{tg}\Theta = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{F}$$

Ist für jeden Pnnkt der Ebene $F = 0$, so ist $\cos\Theta = 0$, oder $\operatorname{tg}\Theta = \infty$, d. h. $\Theta = \frac{\pi}{2}$; und ist umgekehrt $\Theta = \frac{\pi}{2}$, so mnss $F = 0$

sein (analog dem Gauss'schen Satze, wonach man sich eine Fläche mit 2 Systemen sich rechtwinklig durchschneidender Curven bedeckt denken kann).

So ist bei $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, wodurch jeder Punkt der Ebene als Schnittpunkt eines den Anfangspunkt zum Mittelpunkte habenden Kreises und einer durch den Anfangspunkt gehenden Geraden erscheint,

$$a = \cos v, \quad b = \sin v,$$
$$a' = -u\sin v, \quad b' = u\cos v,$$
$$E = 1, \quad G = u^2, \quad F = 0,$$

d. h. das System der durch den Mittelpunkt eines Systems concentrischer Kreise gehenden Geraden steht auf den genannten Kreisen senkrecht. (Ein bekannter Satz der Planimetrie.)

Die Richtung der in einem Punkte einer $u$-Linie an dieselbe gelegten Tangente war gegeben durch: $\operatorname{tg}(u, x) = \frac{b}{a}$, also ist die Gleichung dieser Tangente:

$$\eta - y = \frac{b}{a}(\xi - x)$$

oder:

$$\frac{\eta - y}{b} = \frac{\xi - x}{a} \tag{4}$$

ebenso findet man, dass:

$$\frac{\eta - y}{b'} = \frac{\xi - x}{a'} \tag{5}$$

die Gleichung der im Punkte $(x, y)$ an die zugehörige $v$-Linie gezogenen Tangente ist.

Wir wollen nun die Richtung der Tangente irgend einer durch den Punkt $(x, y)$ gehenden Curve der Ebene, die Gleichung derselben, sowie den Winkel finden, welchen diese Tangente mit der in diesem Punkte an die durch ihn hindurchgehenden $u$- oder $v$-Linie gezogenen Tangente bildet. Nach der Definition einer Tangente hat dieselbe mit der Curve ein Bogenelement $ds$ gemein; also ist:

$$\begin{aligned}
\cos(T, x) &= \cos(ds, x) = \frac{a\,du + a'\,dv}{[E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2]^{\frac{1}{2}}} \\
\sin(T, x) &= \frac{b\,du + b'\,dv}{[E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2]^{\frac{1}{2}}} \\
\operatorname{tg}(T, x) &= \frac{b\,du + b'\,dv}{a\,du + a'\,dv}
\end{aligned} \tag{6}$$

nnd die Gleichnng der Tangente ist daher:

$$\frac{\xi - x}{adu + a'dv} = \frac{\eta - y}{bdu + b'dv} \tag{7}$$

Was nnn den Winkel betrifft, den diese Tangente mit der an die znm $(x, y)$ Pnnkte gehörenden $u$-Linie gezogenen Tangente bildet, so ist derselbe gegeben durch:

$$\cos(T, u) = \cos(T, x)\cos(u, x) + \sin(T, x)\sin(u, x)$$

oder

$$\cos(T, u) = \frac{Edu + Fdv}{\sqrt{E}[Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\sin(T, u) = \frac{(ab' - a'b)dv}{\sqrt{E}[Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2]^{\frac{1}{2}}}$$

und

$$\operatorname{tg}(T, u) = \frac{(ab' - a'b)dv}{Edu + Fdv} \tag{8}$$

oder, weil $ab' - a'b = \pm\sqrt{EG - F^2} = \pm\Delta$ ist,

$$\operatorname{tg}(T, u) = \frac{\Delta dv}{Edu + Fdv}$$

ebenso ist:

$$\cos(T, v) = \frac{Fdu + Gdv}{\sqrt{G}[Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\sin(T, v) = \frac{\Delta du}{\sqrt{G}[Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2]^{\frac{1}{2}}} \tag{9}$$

$$\operatorname{tg}(T, v) = \frac{\Delta du}{Fdu + Gdv}$$

Stehen die $u$- und $v$-Linien anf einander senkrecht, so ist:

$$\operatorname{tg}(T, u) = \frac{dv\sqrt{G}}{du\sqrt{E}} \tag{10}$$

Die erste Frage, mit der wir uns hier beschäftigen wollen, sei die, den Winkel bestimmen, den irgend zwei durch einen Punkt $(u, v)$ gehenden Curven in diesem Pnnkte mit einander bilden.

Nennen wir diesen Winkel $w$, so ist klar, dass

$$\cos w = \cos(T_1, x)\cos(T_2, x) + \sin(T_1, x)\sin(T_2, x)$$

ist, wenn $T_1$ nnd $T_2$ die an den beiden Curven im Pnnkte $(u, v)$ gezogenen Tangenten bedenten. Setzen wir der Kürze halber $\frac{dv}{du} = t$, so ist nach 6):

$$\cos(T_1, x) = \frac{a + a't_1}{[E + 2Ft_1 + Gt_1^2]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\cos(T_2, x) = \frac{a + a't_2}{[E + 2Ft_2 + Gt_2^2]^{\frac{1}{2}}}$$

und

$$\sin(T_1, x) = \frac{b + b't_1}{[E + 2Ft_1 + Gt_1^2]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\sin(T_2, x) = \frac{b + b't_2}{[E + 2Ft_2 + Gt_2^2]^{\frac{1}{2}}}$$

somit:

$$\cos w = \frac{E + F(t_1 + t_2) + Gt_1t_2}{[E + 2Ft_1 + Gt_1^2]^{\frac{1}{2}}[E + 2Ft_2 + Gt_2^2]^{\frac{1}{2}}} \qquad 11)$$

Sollen sich die beiden Curven senkrecht durchschneiden, so mnss wegen $w = \frac{\pi}{2}$. $\cos w = 0$ sein, d. h. es muss dann:

$$E + F(t_1 + t_2) + Gt_1t_2 = 0 \text{ sein.} \qquad 12)$$

Nun ist dies aber anch die hinreichende Bedingung dafür, dass die beiden Curven sich senkrecht durchschneiden; denn ist für dieselben Gleichnng 12) erfüllt, so ist $\cos w = 0$, d. h. $w = \frac{\pi}{2}$

Wir haben somit die notwendige und hinreichende Bedingnng gefunden, unter welcher sich je 2 Cnrven der Ebene in einem Pnnkte $(u, v)$ rechtwinklig durchschneiden.

So werden sich z. B. die dnrch:

$$\begin{vmatrix} t^2, & -t, & 1 \\ E, & F, & G \\ \mathfrak{E}, & \mathfrak{F}, & \mathfrak{G} \end{vmatrix} = 0\ ^{*)} \qquad 13)$$

gegebenen Curven rechtwinklig dnrchschneiden.

---

*) Die Bedeutung von $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ ist folgende: Wenn wir den Richtnngscosinns der in einem Punkte der Curve errichteten Normale $\xi$ nennen und den Sinus des Winkels, welchen diese Normale mit der $x$-Achse bildet, $\eta$ nennen, und

$$\frac{\partial \xi}{\partial u} = \mathfrak{a}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial v} = \mathfrak{a}', \quad \frac{\partial \eta}{\partial u} = \mathfrak{b}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial v} = \mathfrak{b}'$$

setzen, so soll:

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2, \quad \mathfrak{F} = \mathfrak{a}\mathfrak{a}' + \mathfrak{b}\mathfrak{b}', \quad \mathfrak{G} = \text{[illegible]}$$

sein.

Denn vermöge dieser Gleichnng ist:

$$t_1 + t_2 = \frac{\mathfrak{E}G - E\mathfrak{G}}{F\mathfrak{G} - \mathfrak{F}G}$$

$$t_1 t_2 = \frac{E\mathfrak{F} - \mathfrak{E}F}{F\mathfrak{G} - \mathfrak{F}G}$$

Setzen wir diese Werte in die linke Seite von 12) ein, so bekommen wir:

$$E(F\mathfrak{G} - \mathfrak{F}G) + F(\mathfrak{E}G - E\mathfrak{G}) + G(E\mathfrak{F} - \mathfrak{E}F).$$

Nun ist dies aber gleich Null, daher sich die durch die Gleichung 13) gegebenen Curven rechtwinklig durchschneiden.

Die nächste Frage, die wir nns vorlegen, betrifft den Krümmungshalbmesser einer ebenen Curve.

Wenn wir in einem Punkte $(u, v)$ der Curve die Normale ziehen und dies auch in dem diesem Punkte unendlich nahen Nachbarpunkte der Curve tun, so schneidet diese bekanntlich die erstgenannte Normale in einem Punkte, dessen Abstand vom Punkte $(u, v)$ der Krümmungshalbmesser der Curve im Punkte $(u, v)$ ist. Nennen wir diesen $\varrho$, so ist:

$$\varrho = \frac{ds}{d\alpha}$$

wobei $d\alpha$ den Winkel bezeichnet, den die Normale in $(u, v)$ mit der Nachbarnormale bildet.

Denken wir uns nun den Kreis gezogen, dessen Gleichung

$$\xi^2 + \eta^2 = 1$$

ist, so ist dies ein Kreis, dessen Mittelpunkt der Anfangspunkt, dessen Radius = 1 ist, und dessen einzelne Punkte insoferne den einzelnen Curvenpunkten entsprechen, dass wenn wir in einem Punkte der Curve die Normale ziehen und durch den Anfangspunkt also Mittelpunkt des Einheitskreises eine Parallele zu jener Normale ziehen, diese die Peripherie des Kreises in dem jenem Curvenpunkte entsprechenden Punkte schneidet. Unter diesem Gesichtspunkte ist es klar, dass $d\alpha$ als das dem $ds$ der Curve entsprechende Bogenelement des Einheitskreises erscheint und $d\alpha$ somit gegeben ist durch:

$$d\alpha = [\mathfrak{E}du^2 + 2\mathfrak{F}dudv + \mathfrak{G}dv^2]^{\frac{1}{2}}$$

Es ist daher:

$$\varrho = \frac{[E + 2Ft + Gt^2]^{\frac{1}{2}}}{[\mathfrak{E} + 2\mathfrak{F}t + \mathfrak{G}t^2]^{\frac{1}{2}}} \qquad 14)$$

Wir wollen nun die Curvenpunkte betrachten, in denen $\varrho = \infty$ oder $\varrho = 0$ ist.

Ist für einen Curvenpunkt $\varrho = \infty$, so muss natürlich für diesen Punkt

$$\mathfrak{E}du^2 + 2\mathfrak{F}du dv + \mathfrak{G}dv^2 = 0$$

sein, d. h.

$$(\mathfrak{a}du + \mathfrak{a}'dv)^2 + (\mathfrak{b}du + \mathfrak{b}'dv)^2 = 0$$

und daher:

$$\mathfrak{a}du + \mathfrak{a}'dv = 0$$

und

$$\mathfrak{b}du + \mathfrak{b}'dv = 0$$

oder

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b}' - \mathfrak{a}'\mathfrak{b} = 0$$

d. h. die notwendige Bedingung für das Vorhandensein eines Punktes $\varrho = \infty$ d. h. eines Wendepunktes, ist die, dass für diesen Punkt

$$\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{a}'} = \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{b}'} \text{ sei.} \qquad 15)$$

Ebenso findet man, dass in einem Punkte der Curve $\varrho = 0$ sei, d. h. der betreffende Curvenpunkt ein Rückkehrpunkt sei, wenn

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \text{ ist.} \qquad 16)$$

Ist in sämmtlichen Punkten einer ebenen Curve $\varrho = \infty$, so ist dieselbe bekanntlich eine gerade Linie.

Die Differentialgleichung der geraden Linie im allgemeinsten Coordinatensystem lautet also:

$$\mathfrak{E}du^2 + 2\mathfrak{F}du dv + \mathfrak{G}dv^2 = 0 \qquad 17)$$

oder, weil aus dieser Gleichung — wie bereits oben gezeigt wurde — die Gleichungen:

$$\mathfrak{a}du + \mathfrak{a}'dv = 0$$
$$\mathfrak{b}du + \mathfrak{b}'dv = 0$$

folgen, so ist

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b}' - \mathfrak{a}'\mathfrak{b} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{a}'} = \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{b}'}$$

die Beziehung, welche zwischen den $u$ und $v$ einer Geraden stattfinden muss, d. h. alle Punkte der geraden Linie müssen der Bedingung

$$\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{a}'} = \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{b}'}$$

entsprechen, es ist dies also die Gleichung der Geraden in unserem allgemeinen Coordinatensysteme $(u, v)$.

Es ist dies übrigens auch aus dem Grunde klar, da $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{a}'} = \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{b}'}$ die Bedingung ist, welcher ein Curvenpunkt zu genügen hat, wenn er ein Wendepunkt sein soll; nun ist aber die Gerade eine Curve mit lauter Wendepunkten, daher sämmtliche Punkte derselben der Bedingung $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{a}'} = \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{b}'}$ genügen müssen.

Wir wollen jetzt die Curve betrachten, in deren sämmtlichen Punkten der Krümmungshalbmesser derselbe ist. Es ist dies der Kreis.

Soll in allen Curvenpunkten der Krümmungsradius gleich $\varrho$ sein, so müssen sämmtliche Curvenpunkte der Gleichung

$$\varrho^2 [\mathfrak{E} du^2 + 2\mathfrak{F} du dv + \mathfrak{G} dv^2] = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

genügen, d. h. es müssen alle Curvenpunkte der Gleichung

$$\varrho^2 [(\mathfrak{a} du + \mathfrak{a}' dv)^2 + (\mathfrak{b} du + \mathfrak{b}' dv)^2] = (a du + a' dv)^2 + (b du + b' dv)^2$$

Genüge leisten, es ist dies also die Differentialgleichung eines Kreises mit dem Radius $\varrho$.

Nun kann dieser Gleichung auf viele Arten genügt werden; im Allgemeinen aber kann sie nur bestehen, wenn

$$\varrho(\mathfrak{a} du + \mathfrak{a}' dv) = a du + a' dv$$

und

$$\varrho(\mathfrak{b} du + \mathfrak{b}' dv) = b du + b' dv$$

ist, d. h.

$$\begin{vmatrix} a - \mathfrak{a}\varrho, & a' - \mathfrak{a}'\varrho \\ b - \mathfrak{b}\varrho, & b' - \mathfrak{b}'\varrho \end{vmatrix} = 0$$

ist die Beziehung zwischen den Grössen $u$, $v$ eines Kreises, oder die Gleichung eines Kreises mit dem Radius $\varrho$ in unserem allgemeinen Coordinatensysteme.

Wien, den 2. Decbr. 1880.

XXVIII.

# Wälzung eines von einer Tangentenfläche begrenzten Körpers auf Horizontalebene.

Von

**R. Hoppe.**

Versteht man unter Wälzung eines Körpers diejenige Bewegung, bei welcher er eine Unterstützungsfläche, ohne daran zu gleiten, beständig längs einer Linie berührt, so kann sich ein Körper nur auf einer Fläche wälzen, auf welcher der zur Berührung gelangende Teil seiner Oberfläche abwickelbar ist. Im gegenwärtigen Falle ist die Unterstützungsfläche eine Horizontalebene, der zur Berührung gelangende Teil der Oberfläche als allgemeinste Form einer Abwickelbaren eine Tangentenfläche, und zwar ein solches Stück davon, welches sich nicht über die Gratlinie hinaus erstreckt. Dass die Convexität beständig nach aussen zu fällt, ist bloss zur materiellen Realisirung notwendig; hierzu wird erfordert, dass die Torsion der Gratlinie nie ihr Vorzeichen wechselt. Einzig wirkende Kraft sei die Schwere.

## §. 1. Bewegungsgleichung.

Wir denken die Oberfläche erzeugt von der Tangente einer gegebenen Curve $s$, deren laufende Coordinaten, bezüglich auf die Hauptträgheitsaxen des Körpers und angewandt auf die zur Zeit $t$ in die Grundebene fallenden Punkt $P$, $xyz$ seien. In Bezug auf dieselben Axen seien $x_1y_1z_1$ die Coordinaten von $P_1$, wo sich das Massenelement $\partial\mu$ befindet.

Ein zweites Axensystem der $x_2y_2z_2$ werde gebildet von der Tangente, Hauptnormale und Binormale der Curve $s$ im Punkte $P$, und $x_2y_2z_2$ seien die Coordinaten von $P_2$. Hinsichtlich der Fläche sind jene Axen die 2 Hauptkrümmungstangenten und die Normale. Ihre Richtungscosinus gegen die $x$, $y$, $z$ sind (gemäss der Curventheorie)

$$\begin{matrix} f, & g, & h \\ f', & g', & h' \\ l, & m, & n \end{matrix}$$

es bezeichnen $\tau$, $\vartheta$ den Krümmungs- und Torsionswinkel, der Accent die Differentiation nach $\tau$. Die Coordinatenrelationen sind dann:

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= f\,(x_1-x)+g\,(y_1-y)+h\,(z_1-z) \\ y_2 &= f'(x_1-x)+g'(y_1-y)+h'(z_1-z) \\ z_2 &= l\,(x_1-x)+m(y_1-y)+n\,(z_1-z) \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Ein drittes Axensystem der $x_3y_3z_3$ sei im Raume fest, die $x_3$, $y_3$ Axen horizontal in der Grundebene, die $z_3$ Axe vertical nach oben, $x_3y_3z_3$ Coordinaten von $P_1$, $x_4y_4z_4$ von $P$. Da sich bei der Wälzung der Krümmungswinkel $\tau$ auf der Grundebene abwickelt, so sind die Coordinatenrelationen:

$$\left.\begin{aligned} x_3 &= x_4+x_2\cos\tau-y_2\sin\tau \\ y_3 &= y_4+x_2\sin\tau+y_2\cos\tau \\ z_3 &= z_2 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Zur Bestimmung von $x_4$ und $y_4$ (da $z_4=0$) wenden wir die Gl. (2) auf den Nachbarpunkt der Gratlinie an, so dass $PP_1=\partial s$ wird. Dann wird

$$x_3=x_4+\partial x_4;\quad y_3=y_4+\partial y_4$$

$$x_2=\partial s;\quad y_2 \text{ (unendlich klein 2. Ordn.)} = 0$$

also

$$\partial x_4=\partial s\cos\tau;\quad \partial y_4=\partial s\sin\tau$$

Die Gl. (1) bei constanten $x_1y_1z_1$ differentiirt geben:

$$\begin{aligned} \partial x_2 &= y_2\,\partial\tau-\partial s \\ \partial y_2 &= z_2\,\partial\vartheta-x_2\,\partial\tau \\ \partial z_2 &= -\,y_2\,\partial\vartheta \end{aligned}$$

demzufolge die Gl. (2):

$$\begin{aligned} \partial x_3 &= -\,z_2\,\partial\vartheta\sin\tau \\ \partial y_3 &= \phantom{-\,}z_2\,\partial\vartheta\cos\tau \\ \partial z_3 &= -\,y_2\,\partial\vartheta \end{aligned}$$

Znr dynamischen Bestimmnng reicht die Gleichnng der lebendigen Kraft aus, der znfolge man, wenn $G$ die Schwere der Masseneinheit, $z_0$ die Schwerpnnktshöhe bezeichnet, hat:

$$\text{const.} = \frac{1}{\mu}\int\left(\frac{\partial x_3^2+\partial y_3^2+\partial z_3^2}{\partial t^2}+2Gz_3\right)\partial\mu$$

$$=\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial t}\right)^2\int(y_2^2+z_2^2)\,\partial\mu-2Gz_0$$

$$=\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial t}\right)^2\int\Big\{(f'x_1+g'y_1+h'z_1)^2+(lx_1+my_1+nz_1)^2$$
$$+(f'x+g'y+h'z)^2+(lx+my+nz)^4\Big\}\partial\mu-2Gz_0$$

$$=\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial t}\right)^2\int\Big\{(1+f^2)x_1^2+(1-g^2)y_1^2+(1-h^2)z_1^2$$
$$+(1-f^2)x^2+(1-g^2)y^2+(1-h^2)z^2$$
$$-2gh\,yz-2hf\,zx-2fg\,xy\Big\}\partial\mu-2Gz_0$$

$$=\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial t}\right)^2\int\Big\{(g^2+h^2)x_1^2+(h^2+f^2)y_1^2+(f'+g^2)z_1^2$$
$$+x^2+y^2+z^2-(fx+gy+hz)^2\Big\}\partial\mu-2G(lx+my+nz)$$

Sind also $A\mu$, $B\mu$, $C\mu$ die Hanptträgheitsmomente, $R$ der Normalabstand des Schwerpnnkts von der erzeugenden Geraden, welche zur Zeit $t$ in die Grundebene fällt, so wird die Gleichnng der lebendigen Kraft:

$$\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial t}\right)^2(Af^2+Bg^2+Ch^2+R^2)=2G(H+lx+my+nz) \qquad (3)$$

wo die Constante $H$ die Höhe des Schwerpnnkts über der Grnndebene bezeichnet, zur Zeit wo die lebendige Kraft nnll ist. Ansserdem ist bekanntlich

$$(Af^2+Bg^2+Ch^2+R^2)\mu$$

das Trägheitsmoment von $\mu$ in Bezug auf die Erzengende. So aufgefasst stellt sich das Resultat unabhängig von der Gratlinie $s$ dar, ist also leicht auf konische und cylindrische Oberflächen anzuwenden. Da $\partial\vartheta$ den Winkel zwischen 2 consecntiven Berührnngsebenen bezeichnet, so dass wir $\vartheta$ den Wälznngswinkel nennen können, so hat sich ergeben:

**Die lebendige Kraft der betrachteten Bewegnng ist gleich dem halben Prodnct des Trägheitsmoments in Bezng anf die momentan in die Grund[illegible] fallende**

Erzengende und des Qnadrats der Wälzungswinkelgeschwindigkeit.

Ans Gl. (3) geht nnn hervor:

$$t = \frac{1}{\sqrt{2G}} \int \partial\vartheta \sqrt{\frac{Af^2 + Bg^2 + Ch^2 + R^2}{H + lx + my + nz}} \tag{4}$$

## §. 2. Beispiele.

Der Ansdrnck der Zeit wird das Integral einer algebraischen Function, wenn die Gratlinie eine linear oder cyklisch tordirte Curve ist, nnd der Bogen so gewählt wird, dass $x$, $y$, $z$ in algebraischer Relation stehen, überdies im letztern Fall der Radius der Torsionslinie von der Form $\sqrt{\nu^2 - 1}$ ($\nu$ Rationalzahl) ist. Wir wählen die cyklisch tordirte Curve für den Radius $\sqrt{3}$, wo die Gleichnng der Torsionslinie lantet:

$$\tau^2 + \vartheta^2 = 3$$

nnd nehmen den Bogen proportional der Krümmungsbreite $\lambda$; dann wird

$$\tau = \sqrt{3}\sin\lambda; \quad \vartheta = -\sqrt{3}\cos\lambda; \quad s = e\lambda$$

Dieser Annahme entsprechen, in bequemster Lage der Curve zu den Hanpttrágheitsaxen, die Coordinatenwerte:

$$x = -\frac{\sqrt{3}}{2} e\cos\lambda; \quad y = \tfrac{1}{3} e(2 + \cos^2\lambda)\sin\lambda; \quad z = -e(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}\cos^2\lambda)\cos\lambda \tag{5}$$

wie sich auf bekannte Weise durch einige Differentiationen bestätigt Bei Ausführung dieser Rechnnng findet man znnächst die Werte:

$$\left.\begin{aligned} f &= \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\lambda; \quad g = \cos^3\lambda; \quad h = (\tfrac{1}{2} + \cos^2\lambda)\sin\lambda \\ l &= \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\lambda; \quad m = \sin^3\lambda; \quad n = -(\tfrac{3}{2} - \cos^2\lambda)\cos\lambda \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

worans:

$$\begin{aligned} &x^2 + y^2 + z^2 = e^2(\tfrac{4}{9} + \cos^2\lambda; \quad fx + gy + hz = -e\sin\lambda\cos\lambda \\ &lx + my + nz = e(\tfrac{2}{3} - \cos^2\lambda) \end{aligned} \tag{7}$$

also:

$$R^2 = e^2(\tfrac{4}{9} + \cos^4\lambda) \tag{8}$$

daher nach Einführnng in (4):

$$t = \sqrt{\frac{3}{2G}} \int \sin\lambda \, \partial\lambda \sqrt{\frac{\left\{\frac{3}{4}A + C\left(\frac{1}{2} + \cos^2\lambda\right)^2\right\}\sin^2\lambda + B\cos^6\lambda + e^2\left(\frac{4}{5} + \cos^4\lambda\right)}{H + e\left(\frac{2}{3} - \cos^2\lambda\right)}} \tag{9}$$

Dieses im allgemeinen hyperelliptische Integral wird znnächst elliptisch für $B = C$; man findet dann:

$$t = \sqrt{\frac{3}{2G}} \int \sin\lambda \, \partial\lambda \sqrt{\frac{\frac{3A+B}{4} + \frac{3}{4}(B-A)\cos^2\lambda + e^2\left(\frac{4}{5} + \cos^4\lambda\right)}{H + e\left(\frac{2}{3} - \cos^2\lambda\right)}} \tag{10}$$

Hierin lässt sich durch specielle Bestimmnng der Zähler zu einem Quadrat machen. Die Bedingung ist:

$$(B - A)^2 = \tfrac{16}{9} e^2 \left(3A + B + \tfrac{16}{9} e^2\right)$$

Setzt man

$$B - A = \tfrac{16}{9} b e^2$$

so erhält man:

$$A = \tfrac{4}{9} e^2 (b^2 - b - 1); \quad B = \tfrac{4}{9} e^2 (b^2 + 3b - 1) \tag{11}$$

also:

$$t = \sqrt{\frac{3e}{2G}} \int \frac{\left(\frac{2b}{3} + \cos^2\lambda\right)\sin\lambda\,\partial\lambda}{\sqrt{\frac{H}{e} + \frac{2}{3} - \cos^2\lambda}}$$

oder, wenn man statt $H$ die willkürliche Constante

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{H}{e} + \frac{2}{3}} \tag{12}$$

einführt:

$$t = \sqrt{\frac{3e}{2G}} \left\{ \left(\frac{2b}{3} + \frac{\varepsilon^2}{2}\right) \arccos\frac{\cos\lambda}{\varepsilon} + \tfrac{1}{2}\cos\lambda \sqrt{\varepsilon^2 - \cos^2\lambda} \right\} \tag{13}$$

Für $\varepsilon < 1$ erreicht $\lambda$ die Werte 0 und 2R nicht, daher oscillirt der Körper zwischen $\cos\lambda = -\varepsilon$ und $+\varepsilon$, in einer Zeit

$$= 2\text{R} \sqrt{\frac{3e}{G}} \left(\frac{2b}{3} + \frac{\varepsilon^2}{2}\right)$$

Für $\varepsilon = 1$ tritt bei $\lambda = 0$ und 2R labiler Zustand ein: die Wälzung kann zurück oder weiter gehen; letzernfalls hat man:

$$t = \sqrt{\frac{3e}{2G}} \left\{ \left(\frac{2b}{3} + \frac{1}{2}\right)\lambda + \tfrac{1}{2}\sin\lambda\cos\lambda \right\} \tag{14}$$

Für $\varepsilon > 1$ wird $\lambda$ zweiwertig in $t$; daher ist der Ausdruck von $t$ nur gültig von $\lambda = 0$ bis $\lambda = 2\text{R}$. An den Grenzen wechselt die Torsion

ihr Vorzeichen, mithin ist die Oberfläche darüber hinaus nicht convex. Untersucht man die Bahn des Schwerpunkts in der Nähe der Grenzen, so zeigt sich, dass sie hier Rückkehrpunkte hat, was mit einer endlichen Endgeschwindigkeit unvereinbar ist.

Die Bestimmung (11) ist indes an die Bedingungen geknüpft, dass

$$A > 0;\quad B > 0;\quad 2B - A > 0$$

sein muss; das giebt für $b$:

$$b^2 - b - 1 > 0;\quad b^2 + 7b - 1 > 0$$

Man kann beiden durch positive und durch negative $b$ genügen, nämlich:

$$1)\quad b > \frac{\sqrt{5}+1}{2};\quad 2)\quad -b > \frac{\sqrt{53}+7}{2}$$

An ersterer Grenze wird

$$A = 0;\quad B = \tfrac{8}{9}(\sqrt{5}+1)e^2$$

an letzterer

$$A = 2B = \tfrac{16}{9}(\sqrt{53}+7)e^2$$

## §. 3. Fernere Beispiele.

Der Fall der Gleichheit zweier Factoren unter der Quadratwurzel, welcher in §. 2. von der elliptischen Function zum Kreisbogen führte, führt unmittelbar das allgemeine hyperelliptische Integral zu einem elliptischen, und zwar einfacherer Form, über. Sei also in (9) identisch

$$\{\tfrac{3}{4}A + C(\tfrac{1}{2} + \cos^2\lambda)^2\}\sin^2\lambda + B\cos^6\lambda + e^2(\tfrac{4}{9} + \cos^4\lambda) =$$
$$(B - C)(\alpha + \cos^2\lambda^2)(\beta + \cos^2\lambda) \tag{15}$$

dann muss sein

$$\frac{3A + C}{4} + \tfrac{4}{9}e^2 = (B - C)\alpha^2\beta$$
$$\tfrac{3}{4}(C - A) \qquad = (B - C)\alpha(\alpha + 2\beta)$$
$$e^2 \qquad = (B - C)(2\alpha + \beta)$$

Setzt man zur Vereinfachung

$$\beta = \frac{1}{\gamma} - 2\alpha$$

so werden die Gleichungen:

$$B - C = e^2\gamma$$

$$3A + C = -\tfrac{16}{9}e^2 + 4e^2\alpha^2(1 - 2\alpha\gamma) \tag{16}$$

$$3(C - A) = 4e^2\alpha(2 - 3\alpha\gamma)$$

woraus:

$$\left.\begin{aligned} A &= e^2\{\alpha^2 - \tfrac{2}{3}\alpha - \tfrac{4}{9} - (2\alpha - 1)\alpha^2\gamma\} \\ B &= e^2\{\alpha^2 + 2\alpha - \tfrac{4}{9} - (2\alpha + 3)\alpha^2\gamma\} \\ C &= e^2\{\alpha^2 + 2\alpha - \tfrac{4}{9} - (2\alpha - 1)(\alpha + 1)^2\gamma\} \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} -A + B + C &= e^2\{\alpha^2 + \tfrac{14}{3}\alpha - \tfrac{4}{9} - (2\alpha^3 + 7\alpha^2 - 1)\gamma\} \\ A - B + C &= e^2\{\alpha^2 - \tfrac{2}{3}\alpha - \tfrac{4}{9} - (2\alpha^3 - \alpha^2 + 1)\gamma\} \\ A + B - C &= e^2\{\alpha^2 - \tfrac{2}{3}\alpha - \tfrac{4}{9} - (2\alpha^3 - \alpha^2 - 1)\gamma\} \end{aligned}$$

Diese 6 Grössen müssen positiv sein; sind es aber die 3 letzten, so sind es anch die 3 ersten; setzt man also

$$\begin{aligned} M_1 &= m_1 - n_1\gamma = \alpha^2 + \tfrac{14}{3}\alpha - \tfrac{4}{9} - (2\alpha^3 + 7\alpha^2 - 1)\gamma \\ M_2 &= m_2 - n_2\gamma = \alpha^2 - \tfrac{2}{3}\alpha - \tfrac{4}{9} - (2\alpha^3 - \alpha^2 + 1)\gamma \\ M_3 &= m_3 - n_3\gamma = \alpha^2 - \tfrac{2}{3}\alpha - \tfrac{4}{9} - (2\alpha^3 - \alpha^2 - 1)\gamma \end{aligned}$$

so sind nnr die Bedingungen zu erfüllen:

$$M_1 > 0; \quad M_2 > 0; \quad M_3 > 0$$

Zn besserer Uebersicht schreiben wir die reellen Wurzeln der Gleichnngen $m = 0$, $n = 0$ in Decimalen bis zn kenntlicher Grössenfolge; man findet:

$$\begin{aligned} M_1 &= (\alpha + 4,8)(\alpha - 0,1) - 2(\alpha - 0,36)(\alpha + 0,402)(\alpha + 3,5)\gamma \\ M_2 &= (\alpha + 0,409)(\alpha - 1,1) - 2(\alpha + 0,7)p^2\gamma \\ M_3 &= (\alpha + 0,409)(\alpha - 1,1) - 2(\alpha - 1)q^2\gamma \end{aligned}$$

wo $p$, $q$ nicht verschwinden können.

Von $\alpha = \infty$ bis $\alpha = 1,1$ sind alle $m$ nnd $n$ positiv, also für $\gamma < 0$ anch alle $M$.

Nun ist

$$M_3 - M_2 = 2\gamma; \qquad M_1 - M_2 = 2\{\tfrac{8}{3}\alpha - (4\alpha^2 - 1)\gamma\}$$

also, für positives $\gamma$, $M_2 < M_3$; daher kann $\gamma$ von 0 bis zum kleineren der 2 Werte

$$\frac{m_1}{n_1}, \quad \frac{m_2}{n_2}$$

wachsen. Man hat aber

$$\frac{m_1}{n_1} - \frac{m_2}{n_2} = \tfrac{2}{9}\,\frac{12\alpha^4 + 25\alpha^2 + 18\alpha - 4}{n_1 n_2} \tag{18}$$

im gegenwärtigen Intervall $>0$. Folglich sind alle $M$ positiv für

$$\alpha > \frac{\sqrt{5}+1}{3}; \quad \alpha < \frac{m_2}{n_2}$$

Für kleinere $\alpha$ bis $\alpha = -0,409$ ist $m_2 < 0$, $n_2 > 0$, also können nur negative $\gamma$ genügen. Solange $\alpha > 1$ muss, wegen $M_3 < M_2$,

$$\gamma < \frac{m_3}{n_3}$$

sein. Für kleinere $\alpha$, wo $n_2$, $n_3$ ungleiche Vorzeichen haben, genügt weder ein positives noch ein negatives $\gamma$. Was $M_1$ betrifft, so braucht für $\alpha > 1$ nur $\gamma < 0$ zu sein. Folglich sind alle $M$ positiv für

$$1 < \alpha < \frac{\sqrt{5}+1}{3}; \quad \gamma < \frac{m_3}{n_3}$$

Dagegen giebt es keine Lösung für

$$-\frac{\sqrt{5}-1}{3} < \alpha < 1$$

Für kleinere $\alpha$ bis $\alpha = -0,7$ muss rücksichtlich $M_2$ und $M_3$

$$\frac{m_3}{n_3} < \gamma < \frac{m_2}{n_2}$$

sein; dagegegen lässt $M_1$, weil $m_1 < 0$, $n_1 > 0$, nur negative $\gamma$ und zwar nur

$$\gamma < \frac{m_1}{n_1}$$

zu. Es muss also sein

$$\frac{m_3}{n_3} < \gamma < \frac{m_1}{n_1} \tag{19}$$

Nun hat man aber:

$$m_1 n_3 - m_3 n_1 = \tfrac{8}{9}(3\alpha^4 + 4\alpha^2 - 9\alpha)$$

für negative $\alpha$ stets $>0$

also, da $n_1$ positiv, $n_3$ negativ:

$$\frac{m_1}{n_1} < \frac{m_3}{n_3}$$

folglich genügt kein $\gamma$ der Bedingung (19), und es hat sich ergeben, dass auch dem Intervall

$$-0,7 < \alpha < -\frac{\sqrt{5}-1}{3}$$

keine Lösung entspricht.

Für kleinere $\alpha$ bis $\alpha = -3,5$ verlangt $M_1$ negative $\gamma$; für solche ist $M_3 < M_2$; beiden würde nur genügt durch (19); folglich giebt es auch hier keine Lösnng.

Für kleinere $\alpha$ bis $\alpha = -4,8$ verlangt $M_1$ positive $\gamma$; hier sind $M_2$ und $M_3$ durchweg positiv, also ist

$$\gamma > \frac{m_1}{n_1} \tag{20}$$

einzige Bedingung.

Für noch kleinere $\alpha$ sind alle $m$ positiv, alle $n$ negativ, daher genügt jedes positive $\gamma$. Aber auch negative $\gamma$ können befriedigen, wenn gleichzeitig

$$\gamma > \frac{m_1}{n_1} \text{ und } > \frac{m_2}{n_2}$$

ist. Da nach Gl. (18) erstere Grenze die grössere ist, so ist auch hier (20) ausreichend.

Zur Aufstellnng der Resultate wollen wir die reellen Factoren der kubischen Fnnctionen genauer angeben. Man hat:

$$\begin{aligned} n_1 &= 2\alpha^3+7\alpha^2-1 &&= 2(\alpha-\alpha_1)(\alpha+\alpha_2)(\alpha+\alpha_3) \\ n_2 &= 2\alpha^3-\alpha^2+1 &&= 2(\alpha-\alpha_4)p^2 \\ n_3 &= 2\alpha^3-\alpha^2-1 &&= (\alpha-1)(2\alpha^2+\alpha+1) \end{aligned}$$

$$\alpha_1 = 0,3599121 \qquad \alpha_4 = 0,6572982$$
$$\alpha_2 = 0,4017211$$
$$\alpha_3 = 3,458191$$

Die Grenzen, innerhalb deren die Ausdrücke (17) Hauptträgheitsmomente eines Körpers darstellen, sind dann folgende:

$$\text{I.} \quad \alpha > 1\,\frac{\sqrt{5}+1}{3}; \quad \gamma < \tfrac{1}{3}\,\frac{9\alpha^2-6\alpha-4}{2\alpha^3-\alpha^2+1}$$

$$\text{II.} \quad 1 < \alpha < \frac{\sqrt{5}+1}{3}; \quad \gamma < \tfrac{1}{3}\,\frac{9\alpha^2-6\alpha-4}{2\alpha^3-\alpha^2-1}$$

$$\text{III.} \quad \alpha < -\alpha_3; \quad \gamma > \tfrac{1}{3}\,\frac{9\alpha^2+42\alpha-4}{2\alpha^3+7\alpha-1}$$

Ausgeschlossen ist das Intnrvall

$$-\alpha_3 < \alpha < 1$$

Das Integral (9) wird nun, wenn $\varepsilon$ wie in (12) bestimmt ist:

$$t = \sqrt{\frac{3\varepsilon}{2G}}\int \sin\lambda\partial\lambda(\alpha+\cos^2\lambda)\sqrt{\frac{1-2\alpha\gamma+\gamma\cos^2\lambda}{\varepsilon^2-\cos^2\lambda}}$$

Aus Gl. (16) ist zu ersehen, dass $1-2\alpha\gamma$ stets positiv ist. Dagegen kann $\gamma$ positiv und negativ sein, und $\varepsilon$ alle Werte haben. Nur ist, wie aus Gl. (15) erhellt, $1-2\alpha\gamma+\gamma\cos^2\lambda$, mithin auch $\varepsilon^2-\cos^2\lambda$, stets positiv. Für das elliptische Integral ergeben sich also 3 Formen, begrenzt durch

$$\text{(A)}\quad \gamma > 0;\quad \text{(B)}\quad 0 > \gamma > -\frac{1-2\alpha\gamma}{\varepsilon^2};\quad \text{(C)}\quad \gamma < -\frac{1-2\alpha\gamma}{\varepsilon^2}$$

Im Falle (A) ist zu setzen *)

$$\cos\lambda = \varepsilon\,\mathrm{cn}u;\quad k = \sqrt{\frac{\gamma\varepsilon^2}{1-2\alpha\gamma+\gamma\varepsilon^2}}$$

dann wird

$$t = \sqrt{\frac{e(1-2\alpha\gamma+\gamma\varepsilon^2)}{6G}}\left\{\left(\frac{1}{\gamma}+\alpha+2\varepsilon^2\right)\mathrm{el}\,u-\left(\frac{1}{\gamma}-2\alpha\right)u \right.$$
$$\left. +\varepsilon^2\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,v\right\} \tag{21}$$

Ist $\varepsilon < 1$, so oscillirt der Körper, und die Dauer einer Schwingung ist

$$T = 4\sqrt{\frac{e(1-2\alpha\gamma+\gamma\varepsilon^2)}{6G}}\left\{\left(\frac{1}{\gamma}+\alpha+2\varepsilon^2\right)E-\left(\frac{1}{\gamma}-2\alpha\right)K\right\}$$

Für $\varepsilon > 1$ ist die Bewegung nur zwischen $\lambda = 0$ und 2R möglich, wie in §. 2.

Im Falle (B) ist zu setzen:

$$\cos\lambda = \frac{\varepsilon\,\mathrm{cn}u}{\mathrm{dn}u};\quad k = \sqrt{\frac{\gamma\varepsilon^2}{2\alpha\gamma-1}}$$

dann wird

$$t = \varepsilon\sqrt{\frac{e}{6G(1-2\alpha\gamma)}}\left\{\left(\alpha+2\varepsilon^2+\frac{1}{\gamma}\right)\left(\mathrm{el}u-\frac{\mathrm{sn}u\,\mathrm{cn}u}{\mathrm{dn}u}\right)\right.$$
$$\left.+\left(2\alpha-\varepsilon^2-\frac{1}{\gamma}\right)\left(u-\frac{k^2\mathrm{sn}u\,\mathrm{cn}u}{\mathrm{dn}^3u}\right)\right\} \tag{22}$$

Im Falle (C) ist zu setzen:

$$\cos\lambda = \sqrt{2\alpha-\frac{1}{\gamma}}\,\frac{\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{dn}u};\quad k = \sqrt{\frac{2\alpha\gamma-1}{\gamma\varepsilon^2}}$$

dann wird:

---

*) $\mathrm{sn}u = \sin\mathrm{am}u$; $\mathrm{cn}u = \cos\mathrm{am}u$; $\mathrm{dn}u = \sqrt{1-k^2\mathrm{sn}^2u}$
$\mathrm{el}u = \int_0 \mathrm{dn}^2u\,\partial u$; $k$ Modul; $K$, $E$ Quadranten 1. und 2. Gattung.

$$t = \varepsilon\sqrt{\frac{-\gamma\varepsilon}{6G}}\left\{\left(\alpha+2\varepsilon^2+\frac{1}{\gamma}\right)\left(\mathrm{el}u-\frac{k^2\,\mathrm{sn}u\,\mathrm{cn}u}{\mathrm{dn}u}-(3\alpha+2\varepsilon^2)k'^2u\right.\right.$$
$$\left.+\frac{k^2k'^2\varepsilon^2\,\mathrm{sn}u\,\mathrm{cn}u}{\mathrm{dn}^3u}\right\} \tag{23}$$

In den Fällen (B) (C) findet Oscillation statt bzhw. für $\varepsilon < 1$, $2\alpha - \frac{1}{\gamma} < 1$.

## §. 4. Anwendung auf konische Oberflächen.

Sind von der Gratlinie der Oberfläche nur $f$, $g$, $h$ in gegenseitiger Relation gegeben, so folgen daraus die Werte von $l$, $m$, $n$, $\tau$, $\vartheta$ als Functionen einer dieser Grössen, z. B. $\tau$. Zur Bestimmung der Curve und der Werte von $x$, $y$, $z$ muss aber noch $s$ als neue unabhängige Function gegeben sein, so dass man erhält:

$$x = \int f\partial s;\quad y = \int g\partial s;\quad z = \int h\partial s \tag{24}$$

Lässt man also die Relation der $f$, $g$, $h$ bestehen und verändert nur die Function $s$, so ändern sich im Ausdruck (4) von $t$ nur $x$, $y$, $z$, $R$. Dasselbe muss daher auch gelten, wenn man $s = 0$ (oder constant) setzt. Hier werden nach (24) auch $x$, $y$, $z$ constant, und die Oberfläche geht in die konische Fläche

$$X = x + fU;\quad Y = y + gU;\quad Z = z + hU$$

über. Die Erzeugende hört dann auf Tangente zu sein, bleibt aber eine Gerade von gleich variirender Richtung, wie sie als Tangente war.

Demnach gilt Gl. (4) auch als Lösung für den Fall der Wälzung eines Körpers von konischer Oberfläche; nur sind darin $x$, $y$, $z$ als Coordinaten der unbeweglichen Spitze in Bezug auf die Hauptträgheitsaxen, d. i. als beliebige Constante gegeben, während R seine Bedeutung bezüglich auf die Erzeugende, wiewol nicht seinen Wert behält.

Bei Anwendung auf cylindrische Oberfläche werden $f$, $g$, $h$ constant, $x$, $y$, $z$ im allgemeinen unendlich gross, doch bleiben dabei R Abstand des Schwerpunkts von der Erzeugenden, und $lx + ny + nz$, Schwerpunktshöhe, endlich und variabel.

## §. 5. Beispiele für konische Oberfläche.

Geht eine der Hauptträgheitsaxen, z. B. die $x$ Axe durch die Spitze, so wird

Digitized by Google

$$y = 0; \quad z = 0; \quad R^2 = x^2(1-f^2) = x^2(g^2+h^2)$$

also

$$t = \frac{1}{\sqrt{2G}} \int \partial\vartheta \sqrt{\frac{Af^2+(B+x^2)g^2+(C+x^2)h^2}{H+xl}} \tag{25}$$

Sei nun $B = C$, und $f$, $g$, $h$, $l$ bestimmt wie in §. 2. Gl. (6); dann kommt:

$$t = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{G}} \int \sin\lambda\partial\lambda \sqrt{\frac{3A^2+B^2+x^2-3(A^2-B^2-x^2)\cos^2\lambda}{2H+x\cos\lambda}}$$

Die Form dieses elliptischen Integrals ist zunächst davon abhängig, ob $A^2 >$ oder $< B^2+x^2$ ist.

Im ersten Falle kann man setzen

$$3\,\frac{A-B-x^2}{3A+B+x^2} = \varepsilon^2 < 1$$

Ist dann $0 < x < 2H\varepsilon$, so lautet die erforderliche Substitution:

$$\cos\lambda = \frac{1-2\,\mathrm{sn}^2 u}{\varepsilon}; \qquad k = \sqrt{\frac{2x}{2H\varepsilon+x}}$$

Diese ergiebt:

$$t = 2\,\frac{2H\varepsilon+x}{x}\sqrt{\frac{2(3A+B+x^2)}{3G\varepsilon x}}\left\{\frac{2H\varepsilon}{x}\,\mathrm{el}u - \frac{2H\varepsilon-x}{x}\,u - \mathrm{sn}u\,\mathrm{cn}u\,\mathrm{dn}u\right\} \tag{26}$$

Ist hingegen $x > 2H\varepsilon$, so ist zu setzen

$$\cos\lambda = \frac{1}{\varepsilon} - \frac{2H\varepsilon+x}{x\varepsilon}\,\mathrm{sn}^2 u; \quad k = \sqrt{\frac{2H\varepsilon+x}{2x}}$$

und man findet:

$$t = \left(\frac{2}{x}\right)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{3A+B+x^2}{3G\varepsilon}}\left\{2H\varepsilon\,\mathrm{el}u + \left(H\varepsilon-\frac{x}{2}\right)u - \left(H\varepsilon+\frac{x}{2}\right)\mathrm{sn}u\,\mathrm{cn}u\,\mathrm{dn}u\right\} \tag{27}$$

In beiden Fällen wird der Wert $\lambda = 0$ erreicht, es findet also keine Oscillation statt. Für $A < B^2+x^2$ wird die Reduction des Integrals weniger einfach.

Als zweites Beispiel betrachten wir die Wälzung eines Rotationskegels, dessen Axe Hauptträgheitsaxe ist, für beliebige $A$, $B$, $C$. Hier haben $f$, $g$, $h$ die Form

$$f = \cos\alpha; \quad g = \sin\alpha\cos\varphi; \quad h = \sin\alpha\sin\varphi$$

($\alpha$ constant), woraus:

$$l = \sin\alpha; \quad \vartheta = \varphi\cos\alpha; \quad \tau = \varphi\sin\alpha$$

Dies eingeführt in Gl. (25) giebt:

$$t = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{2G(H+x\sin\alpha)}} \int \partial\varphi \sqrt{A\cos^2 c + (B+x^2)\sin^2\alpha - (B-C)\sin^2\alpha\sin 2\varphi}$$

Hierbei ist jedoch zn bemerken, dass die Grösse

$$D = \sqrt{2G(H+x\sin\alpha)}$$

nicht von der Schwere $G$, sondern allein von der Anfangsgeschwindigkeit der Wälzung abhängt, mit welcher die Zeit, bei constanter Beschaffenheit des Kegels, nmgekehrt proportional variirt; denn $GH$ ist als Integrationsconstante eingeführt, als willkürliches Increment von $G(lx + \ldots)$, und $Gx\sin\alpha$ ist neben $GH$ im einzelnen Falle bedeutungslos.

Unter den Trägheitsmomenten $B$, $C$ kann man das grössere $B$ nennen. Dann ergiebt die Integration:

$$t = \frac{\cos\alpha}{D} \sqrt{A\cos^2\alpha + (B+x^2)\sin^2\alpha} \operatorname{el} u \tag{28}$$

für den Modnl

$$k = \sqrt{\frac{B-C}{A\cot^2\alpha + B + x^2}}$$

Hiernach ist die Zeit der Bogen einer Ellipse, deren Halbaxen sind

$$\frac{\cos\alpha}{D}\sqrt{A\cos^2\alpha + (B+x^2)\sin^2\alpha}. \quad \frac{\cos\alpha}{D}\sqrt{A\cos^2\alpha + (C+x^2)\sin^2\alpha}$$

Die Länge dieses Bogens ist bestimmt durch die Abscisse $= \sin\varphi$ auf der grossen Axe vom Mittelpnnkt an gerechnet.

Eigentümlich ist bei dieser Bewegung, dass die Geschwindigkeit variirt ohne beschleunigende Kraft — denn die Schwerpunktshöhe ist constant — bloss vermöge der Variation der Trägheit bezüglich auf die verticale Axe.

XXIX.

# Das Aoust'sche Problem in der Curventheorie.

Von

**R. Hoppe.**

In Darboux et Hoüel Bulletin des sc. math. et astr. VII. 143 stellt sich Aoust die Aufgabe, eine Curve derart zu finden, dass, wenn man von der Einhüllenden ihrer Krümmungsaxe wiederum die Einhüllende der Krümmungsaxe nimmt, letztere der Urcurve congruent ist. Von dieser Anfgabe sagt er, dass ihre vollständige Lösung die Kräfte der Analysis übersteige. Einesteils ist es diese Aeusserung, die mich zur Wiederaufnahme derselben Untersuchung veranlasst, andernteils glaube ich auch im folgenden eine einfachere und durchsichtigere Darstellung des Gegenstands geben zu können.

Bezeichnen $fgh$, $f'g'h'$, $lmn$ die Richtungscosinus der Tangente, Hauptnormale, Binormale der Urcurve $s$, $\tau$ und $\vartheta$ den Krümmungs- und Torsionswinkel ($\partial\tau$ und $\partial\vartheta$ die Contingenzwinkel der Tangente und Krümmungsaxe), die Accente Differentiation nach $\tau$, die Indices 1 und 2 die Zugehörigkeit zu den 2 oben genannten abgeleiteten Curven, so ist die Gleichung der Einhüllenden der Krümmungsaxe *)

$$x_1 = x + f's' + l\frac{\partial s'}{\partial \vartheta} \tag{1}$$

Die Relationen der Richtungscosinus, wo wir zugunsten der Einfachheit die positiven Richtungen der Haupt- und Binormale entgegengesetzt wählen:

*) Hoppe, anal. Curventherie. S. 80. — Arch. LX. S. 387.

$$f_1 = l;\quad l_1 = f;\quad f_1' = -f' \tag{2}$$

die der $\vartheta$, $\tau$ dadurch bedingt:

$$\vartheta_1 = \tau;\quad \tau_1 = \vartheta \tag{3}$$

die der Bogenelemente und Krümmungsradien:

$$s_1' = s' + \frac{\partial^2 s'}{\partial \vartheta^2} \tag{4}$$

In derselben Beziehung steht die Curve $s_2$ zur Curve $s_1$; es ist also

$$x_2 = x_1 + f_1' s_1' + l_1 \frac{\partial s_1'}{\partial \vartheta_1} \tag{5}$$

$$f_2 = l_1 = f;\quad l_2 = f_1 = l;\quad f_2' = -f_1' = f' \tag{6}$$

Aus der ersten Gl. (6) ersieht man zunächst, dass, wenn man nur $s_2 = s$ voraussetzt, auch

$$x_2 = \int f_2 \partial s_2 = \int f \partial s = x + \text{const.}$$

wird, dass also aus der Längengleichheit der Curven $s$ und $s_2$ ihre Congruenz und gleiche Stellung im Raume folgt. Aoust nennt in der Aufgabe die Bedingung „Gleichheit", wendet sie aber sogleich im Sinne der Congruenz an; beides deckt sich in der Tat, aber erst durch vorstehende Betrachtung.

Führt man in Gl. (5) die Werte (1) (2) (3) (4) ein, so kommt:

$$x_2 = x + f\frac{\partial}{\partial \tau}\left(s' + \frac{\partial^2 s'}{\partial \vartheta^2}\right) - f'\frac{\partial^2 s'}{\partial \vartheta^2} + l\frac{\partial s'}{\partial \vartheta} \tag{7}$$

Soll $x_2 = x$ sein, so müssen die Coefficienten von $f$, $f'$ und $l$ einzeln verschwinden. Hierzu ist notwendig und ausreichend, dass $s'$ constant sei. Es folgt dann daraus nach Gl. (4), dass auch $s_1'$ constant sein muss. Auch dies lässt sich umkehren; denn ist $s_1'$ constant, so ist es auch $s_2'$, also, wofern $s_2 = s$, auch $s'$. Es ergiebt sich der Satz:

Curven von constanter Krümmung, und nur solche, haben die Eigenschaft, dass sie mit der Einhüllenden der Krümmungsaxe der Einhüllenden ihrer Krümmungsaxe zusammenfallen. Auch die Einhüllende ihrer Krümmungsaxe hat constante Krümmung.

Nach Voraussnahme dieser Speciallösung führen wir jetzt die allgemeine Bedingung der Aufgabe $x_2 - x = \text{const.}$ ein, dann ergiebt sich durch Differentiation von (7) die Gleichung:

$$0 = f\left\{\frac{\partial^2 s'}{\partial\vartheta^2} + \frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\left(s' + \frac{\partial^2 s'}{\partial\vartheta^2}\right)\right\}$$

anwendbar auf jede Axe, so dass sie nicht durch $f = 0$, sondern nur durch Verschwinden der Klammer erfüllt werden kann. Ist umgekehrt diese null, so ist das Integral der rechten Seite, d. i. nach Gl. (7) $x_2 - x$, constant. Nach Entwickelung der Grösse in der Klammer erhält man demzufolge als notwendige und ausreichende Bedingung die lineare Differentialgleichung 4. Ordnung:

$$\frac{\partial^4 s'}{\partial\vartheta^4} + \left(1 + \frac{\partial\tau^2}{\partial\vartheta^2}\right)\frac{\partial^2 s'}{\partial\vartheta^2} - \frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}\frac{\partial^2\tau}{\partial\vartheta^2}\left(\frac{\partial^3 s'}{\partial\vartheta^3} + \frac{\partial s'}{\partial\vartheta}\right) = 0 \tag{8}$$

Dieselbe leitet Aoust durch Combination einiger Relationen her, wodurch sie jedoch nur als notwendige Bedingung nachgewiesen ist.

Zur Lösung führt uns der folgende, von Aoust erkannte, aber nicht zu diesem Zwecke benutzte Umstand. Setzt man

$$\frac{\partial s'}{\partial\vartheta} = l$$

so ergiebt sich durch Differentiation:

$$\frac{\partial^2 s'}{\partial\vartheta^2} = -f'; \quad \frac{\partial^3 s'}{\partial\vartheta^3} = f\frac{\partial\tau}{\partial\vartheta} - l; \quad \frac{\partial^4 s'}{\partial\vartheta^4} = f'\left(1 + \frac{\partial\tau^2}{\partial\vartheta^2}\right) + f\frac{\partial^2\tau}{\partial\vartheta^2}$$

wodurch Gl. (8) identisch erfüllt wird. Ebenso wie der Wert $l$, müssen aber auch die Werte $m$ und $n$ der Gleichung genügen, folglich ist

$$\frac{\partial s'}{\partial\vartheta} = al + bm + cn \tag{9}$$

ihr vollständiges Integral.

Dass die Gl. (9) kein Problem stellt, ist leicht zu erkennen. Die Grössen $l$, $m$, $n$, $\vartheta$, $\tau$ enthalten nämlich keine Bestimmung über das Bogenelement $\partial s$; die Curve, der sie angehören, ist daher willkürlich. Wie man sie auch gewählt haben mag, kann man für das Bogenelement den hier geforderten Wert

$$\partial s = \partial\tau\{k + \int(al + bm + cn)\partial\vartheta\}$$

substituiren und erhält, wenn man zur Abkürzung

$$p = k + \int(al + bm + cn)\partial\vartheta \tag{10}$$

setzt, folgende Gleichungen der gesuchten Curve:

$$x = \int fp\partial\tau; \quad y = \int gp\partial\tau; \quad z = \int hp\partial\tau$$

Die der Curve $s_1$ werden nach (1):

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x + f'p + l(al+bm+cn) \\ y_1 &= y + g'p + m(al+bm+cn) \\ z_1 &= z + h'p + n(al+bm+cn) \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

die der Curve $s_2$ nach (7):

$$x_2 = x + a; \quad y_2 = y + b; \quad z_2 = z + c$$

Untersucht man die Willkürlichen, welche in der Bestimmung der gesuchten Curve enthalten sind, so zeigt die Gl. (8), welche eine Relation zwischen 2 Functionen $s'$ und $\vartheta'$ ist ($\vartheta$ als Unabhängige betrachtet), dass eine Function willkürlich ist. Ist demnach z. B. $l$ willkürliche Function von $\vartheta$, so wird zunächst *)

$$f' = -\frac{\partial l}{\partial \vartheta}; \quad f = \sqrt{1 - l^2 - \left(\frac{\partial l}{\partial \vartheta}\right)^2}$$

$$\partial \tau = \left(l + \frac{\partial^2 l}{\partial \vartheta^2}\right)\frac{\partial \vartheta}{f}$$

dann

$$m = \sqrt{1-l^2}\cos\left(\alpha + \int \frac{f\partial\vartheta}{1-l^2}\right)$$

$$n = \sqrt{1-l^2}\sin\left(\alpha + \int \frac{f\partial\vartheta}{1-l^2}\right)$$

Alle übrigen Bestimmungsgrössen gehen hieraus ohne Integration hervor.

Demnach sind willkürlich die Function $l$ und die Constanten $a$, $b$, $c$, $k$, $\alpha$.

Wie Aoust bei einer so eingehenden, ausführlichen Behandlung der Aufgabe umhin konnte die vollständige Lösung zu entdecken, ist schwer zu verstehen. Er erklärt die Grösse $\vartheta'$ für unbestimmt und demzufolge die Integration der Gleichung 4. Ordnung für den notwendigen ersten Act der Lösung. In dieser Meinung bespricht er die möglichen Reductionen der Gleichung; das äusserste, was man erreicht hat, ist die Reduction auf eine lineare Gleichung 2. Ordnung, eine allgemeine Integration aber ist nicht gefunden. In der Tat würde also die vollständige Lösung der anfänglichen Aufgabe als unmöglich erscheinen, wenn dieselbe das Krümmungsverhältniss der gesuchten Curve als beliebig gegeben aufstellte, was nicht der Fall ist.

*) Curventh. S. 66. Aufg. 6. 4. — Arch. LVI. S. 59.

### 1. Beispiel.

Die Curve, von der wir ausgehen, die aber noch nicht das notwendige Bogenelement hat, und die wir, soweit dieses unterscheidend ist, mit dem Index 0 kenntlich machen, sei eine Schraubenlinie

$$x_0 = \cos\alpha\cos\varphi; \quad y_0 = \cos\alpha\sin\varphi; \quad z_0 = \varphi\sin\alpha$$

Hieraus findet man:

$$\begin{array}{lll} f = -\cos\alpha\sin\varphi; & g = \cos\alpha\cos\varphi; & h = \sin\alpha \\ f' = -\cos\varphi; & g' = -\sin\varphi; & h' = 0 \\ l = \sin\alpha\sin\varphi; & m = -\sin\alpha\cos\varphi; & n = \cos\alpha \end{array}$$

$$\tau = \varphi\cos\alpha; \quad \vartheta = \varphi\sin\alpha$$

daher nach (10):

$$p = k - \sin^2\alpha(a\cos\varphi + b\sin\varphi) + c\varphi\sin\alpha\cos\alpha$$

oder, mit Veränderung der willkürlichen Constanten:

$$p = \frac{k + a\cos\varphi + b\sin\varphi + c\varphi}{\cos\alpha}$$

Nach Einsetzung dieses Wertes werden die Gleichungen der Curve $s$:

$$x = \cos\alpha\left\{k\cos\varphi - \frac{a}{2}\sin^2\varphi - \frac{b}{2}(\varphi - \sin\varphi\cos\varphi) + c(\varphi\cos\varphi - \sin\varphi)\right\}$$

$$y = \cos\alpha\left\{k\sin\varphi - \frac{a}{2}(\varphi + \sin\varphi\cos\varphi) + \frac{b}{2}\sin^2\varphi + c(\varphi\sin\varphi + \cos\varphi)\right\}$$

$$z = \sin\alpha\left(k\varphi + a\sin\varphi - b\cos\varphi + \frac{c}{2}\varphi^2\right)$$

$$s = k\varphi + a\sin\varphi - b\cos\varphi - \frac{c}{2}\varphi^2$$

die der Curve $s_1$:

$$x_1 = -\frac{1}{\cos\alpha}\left\{k\sin^2\alpha\cos\varphi + a(1 + \tfrac{1}{2}\cos^2\alpha\sin^2\varphi) + \frac{b}{2}\cos^2\alpha(\varphi - \sin\varphi\cos\varphi)\right.$$
$$\left. + c\sin^2\alpha(\varphi\cos\varphi - \sin\varphi)\right\}$$

$$y_1 = -\frac{1}{\cos\alpha}\left\{k\sin^2\alpha\sin\varphi + \frac{a}{2}\cos^2\alpha(\varphi + \sin\varphi\cos\varphi) + b(1 - \tfrac{1}{2}\cos^2\alpha\sin^2\varphi)\right.$$
$$\left. + c\sin^2\alpha(\varphi\sin\varphi + \cos\varphi)\right\}$$

$$z_1 = \frac{1}{\sin\alpha}\left\{k\varphi\sin^2\alpha + \cos^2\alpha(-a\sin\varphi + b\cos\varphi) + c(1 + \tfrac{1}{2}\varphi^2\sin^2\alpha)\right\}$$

$$s_1 = \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}\left\{k\varphi\sin^2\alpha + \cos^2\alpha(-a\sin\varphi + b\cos\varphi) + \frac{c}{2}\varphi^2\sin^2\alpha\right\}$$

Die Curve $s$ nnd mit ihr die Cnrven $s_1$, $s_2$ setzen sich ans 4 einfachern Cnrven znsammen, die sich in beliebiger Combination einander superponiren lassen. Jede liegt anf einer algebraischen Fläche. Durch diese ausgedrückt lanten ihre Gleichnngen:

I. $x^2 + y^2 = k^2\sin^2\alpha;\quad \frac{y}{x} = \mathrm{tg}\frac{z}{k\sin\alpha}$

II. $2ax\sin^2\alpha + z^2\cos\alpha = 0$

$$z = -a\sin\alpha\sin\left(\frac{2y}{a\cos\alpha} + \frac{z}{a\sin\alpha}\sqrt{1 + \frac{2x}{a\cos\alpha}}\right)$$

III. $2by\sin^2\alpha = z^2\cos\alpha$

$$z = -b\sin\alpha\cos\left(\frac{2x}{b\cos\alpha} - \frac{z}{b\sin\alpha}\sqrt{1 - \frac{2y}{b\cos\alpha}}\right)$$

IV. $(x^2 + y^2)\sin\alpha = c(2z + c\sin\alpha)\cos^2\alpha$

$$y\sqrt{2z} - x\sqrt{c\sin\alpha} = (x\sqrt{2z} + y\sqrt{c\sin\alpha})\,\mathrm{tg}\sqrt{\frac{2z}{c\sin\alpha}}$$

Die erste liegt anf einem Rotationscylinder, die beiden folgenden, nnr durch Lage nnd Constantenwerte verschiedenen, anf parabolischen Cylindern, die letzte anf einem Rotationsparaboloid.

Die Einhüllenden der Krümmungsaxe sind sämmtlich Curven derselben Art wie ihre Urcnrven, nnr mit verschiedenen Constantenwerten. Die Snbstitution der letztern zweimal vollzogen muss offenbar auf den nrsprünglichen Wert znrückführen.

## 2. Beispiel.

Die Curve, von der wir ansgehen, sei der Schnitt der 2 knbischen Flächen:

$$3x^2 = 4z^3;\quad 3y^2 = 4(1-z)^3 \tag{12}$$

Derselbe liegt auf dem zweischaligen Rotationshyperboloid:

$$(2z-3)^2 - 3(x^2+y^2) = 5$$

Die Werte der 9 Richtnngscosinns sind:

$$f = \frac{\sqrt{3z}}{2};\quad g = -\frac{\sqrt{3(1-z)}}{2};\quad h = \tfrac{1}{2}$$

Digitized by Google

$$f' = \sqrt{1-z}; \quad g' = \sqrt{z}; \quad h' = 0$$

$$l = -\tfrac{1}{2}\sqrt{z}; \; m = \tfrac{1}{2}\sqrt{1-z}; \quad n = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Gleichzeitig findet man:

$$\vartheta' = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Vergleicht man das System der $l$, $m$, $n$ mit dem des vorigen Falles, so zeigt sich, dass es für

$$\alpha = \frac{1}{3}\mathrm{R}; \; \mathrm{tg}\varphi = \sqrt{\frac{z}{1-z}}$$

damit übereinstimmt, dass also auch die resultirende Curve dieselbe sein muss. Die Curve (12) unterscheidet sich von einer Schraubenlinie nur durch das Bogenelement, welches durch die Substitution des geforderten Wertes von $\partial s$ ausser Wirksamkeit kommt.

Handelt es sich nun darum, identische Lösungen schon in der anfänglichen Aufstellung auszuschliessen, so dass verschieden gewählten Gleichungen auch immer verschiedene Lösungen entsprechen, so können die Coordinatengleichungen der angenommenen Curve den Zweck nicht erfüllen: es ist stets eine Familie von Curven, welche ein und dasselbe Resultat giebt. Der Typus einer solchen Familie ist die Gleichung zwischen $\tau$ und $\vartheta$. Von dieser indes können wir nicht ausgehen, weil wir die erforderliche Integration nicht auszuführen vermögen. Dagegen vermeiden wir sowol die Identitäten als auch die Integration, wenn wir das System der Tangentialrichtungen als gegeben einführen, d. i. $f$, $g$, $h$ zu Functionen von einander machen. Freilich ist dieses abhängig von der Axenlage, doch lässt sich leicht erkennen, ob 2 Systeme $fgh$ durch Axenveränderung identisch werden oder nicht.

### 3. Beispiel.

Wir gehen von der Curve $s_0$ aus, in welcher das einschalige Rotationshyperboloid

$$2(x_0^2 + y_0^2) - z_0^2 = 1$$

den parabolischen Cylinder 3. Grades

$$y_0 = \frac{z_0}{\sqrt{3}}\left(1 + \tfrac{32}{27} z_0^2\right)$$

schneidet. Man findet das Bogenelement:

$$\partial s_0 = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\partial z_0}{\sqrt{1 - \frac{16}{9} z_0^2}}$$

nebst folgenden Werten der 9 Richtnngscosinns:

$$f = -\tfrac{64}{27}z_0^2; \quad g = (\tfrac{1}{2}+\tfrac{16}{9}z_0^2)\sqrt{1-\tfrac{16}{9}z_0^2}$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-\tfrac{16}{9}z_0^2}$$

$$f' = \frac{4}{\sqrt{3}}z_0\sqrt{1-\tfrac{16}{9}z_0^2}; \quad g' = \frac{\sqrt{3}}{2}(\tfrac{32}{9}z_0^2-1); \quad h' = \tfrac{1}{2}$$

$$l = (1-\tfrac{16}{9}z_0^2)^{1}; \quad m = 2z_0(1-\tfrac{32}{27}z_0^2); \quad n = -\frac{2z_0}{\sqrt{3}}$$

und des Krümmnngs- nnd Torsionswinkels:

$$\tau = \sqrt{3-\tfrac{16}{9}z_0^2}; \quad \vartheta = \frac{4}{\sqrt{3}}z_0$$

Da $z_0$ für die Curve $s$ keine Bedentnng hat, so ist es angemessen, dafür $\vartheta$ als Parameter einzuführen; nm jedoch zugleich die Irrationalen, die mit Doppelvorzeichen zu nehmen sein würden, zu beseitigen, setzen wir

$$\vartheta = \sqrt{3}\sin\lambda; \quad \tau = \sqrt{3}\cos\lambda$$

dann wird

$$f = -\sin^2\lambda; \quad g = (\tfrac{1}{2}(+\sin^2\lambda)\cos\lambda; \quad h = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\lambda$$

$$f' = \sqrt{3}\sin\lambda\cos\lambda; \quad g' = \sqrt{3}(\sin^2\lambda-\tfrac{1}{2}); \quad h' = \tfrac{1}{2}$$

$$, = \cos^2\lambda; \quad m = \sin\lambda(\tfrac{3}{2}-\sin^2\lambda); \quad n = -\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\lambda$$

Hieraus setzt sich zusammen:

$$\frac{\partial p}{\partial\vartheta} = \frac{8a}{3}l + \frac{4b}{3}(m+n\sqrt{3}) + \frac{4c}{3\sqrt{3}}n$$

$$= \frac{8a}{3}\cos^2\lambda - \frac{4b}{3}\sin^2\lambda - \frac{2c}{3}\sin\lambda$$

was nach Integration ergiebt:

$$p\sqrt{3} = a\{3\lambda+(3+2\cos^2\lambda)\sin\lambda\cos\lambda\} - b\sin^4\lambda - c\sin^2\lambda + k$$

Führt man dies in die Gleichungen $x = \int fp\partial\tau$ und die analogen ein, so findet man:

$$x = \frac{a}{4}\Big\{-\tfrac{9}{4}\lambda^2 + 3\lambda(\tfrac{3}{2}+\sin^2\lambda)\sin\lambda\cos\lambda$$

$$-(\tfrac{9}{4}+\tfrac{3}{4}\sin^2\lambda+\tfrac{10}{3}\sin^4\lambda-\sin^6\lambda)\sin^2\lambda\Big\}$$

$$+\frac{b}{8}\Big\{-\tfrac{15}{16}\lambda+(\tfrac{15}{16}+\tfrac{25}{24}\sin^2\lambda+\tfrac{7}{6}\sin^4\lambda+\sin^6\lambda)\sin\lambda\cos\lambda\Big\}$$

$$+\frac{c}{2}\Big\{-\tfrac{3}{8}\lambda+(\tfrac{3}{8}+\tfrac{5}{12}\sin^2\lambda+\tfrac{1}{3}\sin^4\lambda)\sin\lambda\cos\lambda\Big\}$$

$$+\frac{k}{8}\Big\{3\lambda-(3+2\sin^2\lambda)\sin\lambda\cos\lambda\Big\}$$

$$y = \frac{a}{4}\Big\{\lambda(\tfrac{11}{16} - 3\sin^2\lambda - 3\sin^4\lambda)$$
$$-(\tfrac{11}{16} + \tfrac{67}{24}\sin^2\lambda + \tfrac{17}{6}\sin^4\lambda + \sin^6\lambda)\sin\lambda\cos\lambda$$
$$+\frac{b}{4}(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2}\sin^2\lambda)\sin^6\lambda + \frac{c}{2}(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5}\sin^2\lambda)\sin^4\lambda - \frac{k}{4}(1 + \sin^2\lambda)\sin^2\lambda\Big\}$$

$$z = \frac{a\sqrt{3}}{2}\Big\{\frac{\lambda}{4}(1 - 6\sin^2\lambda) - (\tfrac{1}{4} + \tfrac{4}{3}\sin^2\lambda - \tfrac{1}{3}\sin^4\lambda)\sin\lambda\cos\lambda$$
$$+\frac{b}{4\sqrt{3}}\sin^6\lambda + \frac{c\sqrt{3}}{8}\sin^4\lambda - \frac{k\sqrt{3}}{4}\sin^2\lambda\Big\}$$

und die Gl. (7) geben:

$$x_2 = x + \frac{8a}{3}; \quad y_2 = y + \frac{4b}{3}; \quad z_2 = z + 2\frac{2b+c}{\sqrt{3}}$$

## 4. Beispiel.

Die Curve $s_0$ sei eine Krümmungslinie der centralen Fläche 2. Grades:

$$\frac{x_0^2}{a} + \frac{y_0^2}{b} + \frac{z_0^2}{c} = 1$$

In Parametern der Krümmungslinien $u$, $v$ dargestellt lauten die Gleichungen der Fläche:

$$x_0^2 = a\frac{c-b}{d}(u-a)(v-a); \quad \text{etc.}$$

wo zur Abkürzung

$$d = (b-c)(c-a)(a-b)$$

gesetzt ist, und die analogen Gleichungen für $y_0$ und $z_0$ durch cyklische Vertauschung von $a$, $b$, $c$ erhalten werden. Ein constantes $v$ giebt die beliebige Krümmungslinie $s_0$.

Es sei ferner zur Abkürzung:

$$U = (u-a)(u-b)(u-c); \quad V = (v-a)(v-b)(v-c)$$
$$\alpha = a+b+c; \quad \beta = bc+ca+ab; \quad \gamma = abc$$

Durch Differentiation und Bildung der Quadratsumme findet man zuerst:

$$f = \sqrt{\frac{a(b-c)(v-a)(u-b)(u-c)}{du(u-v)}}; \quad \text{etc.}$$

$$\frac{\partial s_0}{\partial u} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{u(v-u)}{U}}$$

Eine neue Differentiation giebt:

$$2\frac{\partial f}{\partial u} = \left(\frac{1}{u-b} + \frac{1}{u-c} - \frac{1}{u} - \frac{1}{u-v}\right) f; \quad \text{etc.}$$

Hieraus geht durch Determinantenbildung sehr einfach, weil 3 Terme der Klammer sich heben, hervor:

$$l\frac{\partial \tau}{\partial u} = \begin{vmatrix} g & g' \\ h & h' \end{vmatrix} \frac{\partial \tau}{\partial u} = \frac{(b-c)gh}{2(u-b)(u-c)}$$

$$= \frac{1}{2u(u-v)} \sqrt{\frac{bc(b-c)(u-a)(v-b)(v-c)}{d(u-b)(u-c)}}; \quad \text{etc.}$$

Die Quadratwurzel aus der Quadratsumme der analogen nimmt folgende einfache Gestalt an:

$$\frac{\partial \tau}{\partial u} = \frac{1}{2u(u-v)} \sqrt{\frac{\gamma(v-u)^3 - Vu^3}{vU}}$$

Demzufolge wird

$$l = \sqrt{\frac{bc(b-c)v(v-b)(v-c)(u-a)^3}{d[\gamma(u-v)^3 - Vu^3]}}; \quad \text{etc.}$$

woraus:

$$f' = \begin{vmatrix} m & g \\ n & h \end{vmatrix} = \left\{(b+c-v)u^2 + bc(v-2u)\right\} \sqrt{\frac{a(b-c)v(v-a)(u-a)}{du(u-v)[\gamma(v-u)^3 - Vu^3]}}$$

Die Vorzeichen der Quadratwurzeln sind stets doppelt, doch sind sie für die vorliegende Aufgabe gleichgültig. Die vorige Gleichung differentiirt giebt:

$$-f'\frac{\partial \vartheta}{\partial u} = 3\left\{(b+c-v)u^2 + bc(v-2u)\right\} \sqrt{\frac{\gamma a(b-c)Vv^3(v-a)(u-a)}{d[\gamma(v-u)^3 - Vu^3]}}$$

also nach Division durch den Wert von $f'$:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial u} = \pm \frac{3v\sqrt{\gamma Vu(u-v)}}{\gamma(v-u)^3 - Vu^3}$$

Es bleibt nun bloss die Einführung der gefundenen Werte in die Gleichungen

$$x = \int f \partial \tau \int (Al + Bm + Cn) \partial \vartheta; \quad \text{etc.} \tag{13}$$

übrig. Hier kann man in $f$, $g$, $h$ die gemeinsamen, in $l$, $m$, $n$, $\tau$, $\vartheta$ alle constanten Factoren weglassen. Dann erhält man:

$$x = \int \left\{ \partial u \sqrt{\frac{a(b-c)(v-a)}{u^3(u-v)^3(u-a)}} \int \partial u \sqrt{u(u-v)} \times \frac{A(u-a)^{\frac{3}{2}} + B(u-b)^{\frac{3}{2}} + C(u-c)^{\frac{3}{2}}}{[\gamma(v-u)^3 - Vu^3]^{\frac{3}{2}}} \right\}$$

wo $A$, $B$, $C$ constante, einzeln entweder reelle oder rein imaginäre Grössen sind.

Die 9 Doppelintegrale, aus denen $x$, $y$, $z$ bestehen, reduciren sich durch folgende Betrachtung auf 3 von gleicher Form. Es ist nämlich

$$f\partial\tau = l\partial\vartheta - \partial f'$$

daher transformirt sich Gl. (13) in

$$\begin{aligned} x &= \int \{ l\partial\vartheta \int (Al + Bm + Cn)\partial\vartheta \} - \int \{ \partial f' \int (Al + Bm + Cn)\partial\vartheta \} \\ &= \tfrac{1}{2}A\left(\int l\partial\vartheta\right)^2 + B\int\left(l\partial\vartheta \int m\partial\vartheta\right) + C\int l\partial\vartheta \int n\partial\vartheta) \\ &\quad - f' \int (Al + Bm + Cn)\partial\vartheta + \int (Al + Bm + Cn) f'\partial\vartheta \end{aligned}$$

Hiernach bleiben in $x$ zwei, im ganzen 6 Doppelintegrale, die jedoch parweise in Relationen der Form stehen:

$$\int\left(m\partial\vartheta \int n\partial\vartheta\right) + \int\left(n\partial\vartheta \int m\partial\vartheta\right) = \left(\int m\partial\vartheta\right)\left(\int n\partial\vartheta\right)$$

Von den hinzugekommenen Integralen

$$\int l f'\partial\vartheta, \quad \int m f'\partial\vartheta, \quad \int n f'\partial\vartheta$$

ist das erste logarithmisch, die beiden andern elliptisch.

# XXX.

# Bewegungen des Aethers im freien Raume, welche ein continuirliches Farbenspectrum verursachen.

Von

Herrn Dr. **Eduard Maiss**

in Prag.

---

§. 1.

Indem man nach der Fresnel-Cauchy'schen Theorie sich vorstellt, dass der Aether im freien Raume ein Punktsystem repräsentirt, welches, vollkommen homogen und isotrop, lediglich mit Kräften begabt ist, die in der Richtung der Verbindungslinie je zweier Aethermolekeln und gemäss der Entfernung derselben wirken; indem man ferner die genannten Kräfte nur auf eine sehr geringe Entfernung hin merklich wirksam und das Punktsystem eines bestimmten Gleichgewichtszustandes fähig sich denkt: wird man durch die Analysis zu dem Schlusse geführt, dass eine kleine Verschiebung eines Punktes unseres Systems eine Bewegung desselben zur Folge haben müsse, welche ausgedrückt werden kann durch die partiellen Differentialgleichungen: (1)

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=(G+3R)\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+(G+R)\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}+(G+R)\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}+2R\frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial y}+2R\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial z}$$

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}=(G+R)\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}+(G+3R)\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}+(G+R)\frac{\partial^2\eta}{\partial z^2}+2R\frac{\partial^2\zeta}{\partial y\partial z}+2R\frac{\partial^2\xi}{\partial y\partial x}$$

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}=(G+R)\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+(G+R)\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}+(G+3R)\frac{\partial^2\zeta}{\partial z^2}+2R\frac{\partial^2\xi}{\partial z\partial x}+2R\frac{\partial^2\eta}{\partial z\partial y}$$

Die Gleichungen sind allbekannt; es sei nur erinnert, dass $G$ und $R$

die Grössen sind, welche die Massen der Aethermolekeln und die Entfernungen zwischen je zweien derselben enthalten, ferner dass diese Grössen $G$ und $R$ unseren Annahmen über die Constitution des Aethers im freien Raume zufolge constante Grössen für die Differentialgleichungen sind.

An die Stelle des obigen Systems von Differentialgleichungen kann bekanntlich eine grosse Anzahl von Systemen sog. endlicher Bewegungsgleichungen gesetzt werden; jedes davon gibt für eine bestimmte Erregungsweise des Punktsystems — oder, wie man zu sagen pflegt, für ein bestimmtes System von Anfangsbedingungen — das Gesetz der Bewegung der einzelnen Punkte in der Form von Gleichungen zwischen den Verschiebungscomponenten des betreffenden Punktes, seiner Coordinaten und der Zeit.

Für das Folgende genügt es, zu bemerken, dass eines von den eben erwähnten Systemen endlicher Bewegungsgleichungen aus der Lehre von den linearen partiellen Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten sich darbietet; es ist das particuläre Integralsystem der Gleichungen (1):

$$\left.\begin{aligned} \xi &= A.e^{u'x+v'y+w'z-s't} \\ \eta &= B.e^{u'x+v'y+w'z-s't} \\ \zeta &= C.e^{u'x+v'y+w'z-s't} \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

worin $A$, $B$, $C$; $u'$, $v'$, $w'$; $s'$ constante Grössen sind — reelle, oder allgemeiner complexe — welche den Gleichungen genügen müssen:

$$(3)$$

$$A[(G+3R)u'^2+(G+R)v'^2+(G+R)w'^2-s'^2]+2BRu'v'+2CRu'w'=0$$
$$B[(G+R)u'^2+(G+3R)v'^2+(G+R)w'^2-s'^2]+2CRv'w'+2ARv'u'=0$$
$$C[(G+R)u'^2+(G+R)v'^2+(G+3R)w'^2-s'^2]+2ARw'u'+2BRw'v'=0$$

Diese Constanten haben im Allgemeinen eine von den Formen complexer Zahlen; es ist also:

$$u' = U+ui \qquad A = ae^{\alpha i}$$
$$v' = V+vi \qquad B = be^{\beta i}$$
$$w' = W+wi \qquad C = ce^{\gamma i}$$
$$s' = S+si$$

so dass aus den Gleichungen (2) wird:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= ae^{K\varrho_1-St}.[\cos(k\varrho-st+\alpha)+i\sin(k\varrho-st+\alpha)] \\ \eta &= be^{K\varrho_1-St}.[\cos(k\varrho-st+\beta)+i\sin(k\varrho-st+\beta)] \\ \zeta &= ce^{K\varrho_1-St}.[\cos(k\varrho-st+\gamma)+i\sin(k\varrho-st+\gamma)] \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

worin zur Abkürznng gesetzt worden ist:

$$K\varrho_1 = Ux + Vy + Wz \qquad k\varrho = ux + vy + wz$$
$$K = \pm\sqrt{U^2+V^2+W^2} \qquad k = \pm\sqrt{u^2+v^2+w^2}$$

$U$, $V$, $W$; $S$; $u$, $v$, $w$; $s$ sind jedenfalls reelle Constanten, wie auch $a$, $b$, $c$; $\alpha$, $\beta$, $\gamma$.

Man weiss, dass, wenn (4) ein particuläres Integralsystem von (1) ist, auch:

$$\left.\begin{aligned}\xi &= ae^{K\varrho_1 - St}.\cos(k\varrho - st + \alpha)\\ \eta &= be^{K\varrho_1 - St}.\cos(k\varrho - st + \beta)\\ \zeta &= ce^{K\varrho_1 - St}.\cos(k\varrho - st + \gamma)\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

ein solches repräsentirt, worin $K$, $S$, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ beliebige reelle Zahlen bedeuten.

§. 2.

Die Gleichnngen (5) können also nnter Umständen an die Stelle der eingangs anfgczeichneten Differentialgleichungen treten; ihnen gemäss kann nnter Umständcn die Bewegung jedes Systempunktes vor sich gehen.

Bisher sind jedoch, soviel uns bekannt, im Znsammenhange mit Canchy's Analyse stets nur die specielleren Glcichnngen:

$$\left.\begin{aligned}\xi &= a\cos(k\varrho - st + \alpha)\\ \eta &= b\cos(k\varrho - st + \alpha)\\ c &= c\cos(k\varrho - st + \alpha)\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

einer Discnssion nnterzogen worden, die sich ergeben, wcnn dic Specialisirnng soweit getrieben wird, dass in dcm ohnedies nur particulären Integralsysteme (5) anch noch

$$K = 0 \quad \text{nnd} \quad S = 0$$

gesetzt wird. (Dass dann $\beta = \gamma = \alpha$ sein mnss, ist eine nnmittelbare Folge der Gleichnngen (3)).

Die Gleichnngen (6) stellen sog. einfache Schwingungen odcr Sinnsschwingnngen*) dar, die dnrch das Pnnktsystem hindnrch sich in ebenen Wellen verbreiten. Die durch (6) dargestellten Bewegnngen jedes Systempnnktes sind nämlich diesen Gleichnngen zufolge

*) Die Geschwindigkeitscomponenten $\frac{\partial\xi}{\partial t}$, $\frac{\partial\eta}{\partial t}$, $\frac{\partial\zeta}{\partial t}$ ändern sich nämlich mit der Zeit nach dem Sinnsgesetze.

geradlinige ($\beta = \gamma = \alpha$), isochrone ($s =$ const.) Schwingungen von der Dauer

$$T = \frac{2\pi}{s};$$

alle in demselben Augenblicke in demselben Schwingungszustande befindlichen Teilchen liegen in einer Ebene (Wellenebene), die der festen Ebene:

$$ux + vy + wz = 0$$

parallel ist; die Entfernung zweier Ebenen desselben Schwingungszustandes (Wellenlänge genannt)

$$l = \frac{2\pi}{k}$$

und somit die Geschwindigkeit des Fortschreitens einer Wellenebene:

$$\omega = \frac{s}{k}$$

Endlich zeigt sich mit Rücksicht auf das soeben Gesagte und auf die Gleichungen (3), dass $\omega$ eine reelle, für ein- und dasselbe Punktsystem constante Grösse sei (für transversale Schwingungen nämlich: $\omega = G + R$).

§. 3.

Es entsteht die Frage, ob nicht auch die Gleichungen (5), die doch auch eine denkbare Bewegungsweise unseres Punktsystems ausdrücken, physikalisch interpretirt werden können? Oder, da wir später sehen werden, dass für den Aether im freien Raume jedenfalls $K = 0$ zu setzen ist, ob nicht wenigstens die dann übrig bleibenden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= ae^{-St}.\cos(k\varrho - st + \alpha) \\ \eta &= be^{-St}.\cos(k\varrho - st + \beta) \\ \zeta &= ce^{-St}.\cos(k\varrho - st + \gamma) \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

eine physikalische Bedeutung haben?

Zum Zwecke der Beantwortung der letzteren Frage wollen wir vorerst daran erinnern, dass in der Akustik durch Gleichungen von der Form (6) diejenigen Bewegungen der Luftmolekeln dargestellt werden, welche sog. einfache Töne hervorrufen. Wird hingegen eine Luftmolekel zu zwei oder mehreren solchen Bewegungen gleichzeitig angeregt, so macht sie eine Bewegung, welche von den genannten verschieden ist, und welche im einfachsten Falle mathematisch be-

Digitized by Google

schrieben werden kann, durch einfache Summirung der Ausdrücke für die Bestimmungsstücke der componirenden Bewegungen. Eine solche „zusammengesetzte“ Bewegung der Luftmolekeln verursacht einen Klang, der aus einfachen Tönen der obigen Art zusammengesetzt genannt werden muss, da er durch geeignete Mittel (Resonanz) in seine Bestandtöne tatsächlich zerlegt werden kann.

Wenn wir nun mit Lommel *) auch in der Optik die einfachen durch (6) charakterisirten Bewegungen der Aetherteilchen als Ursache des einfachfarbigen (monochromatischen) Lichtes ansehen, so werden wir analog sagen können: sobald ein Aetherteilchen zu zwei oder mehreren derartigen Bewegungen angeregt wird, macht es eine von den componirenden verschiedene Bewegung, welche nach demselben Grundsatze der Superposition kleiner Bewegungen, der in der Akustik angewendet wird, mathematisch zu beschreiben ist; und diese zusammengesetzte Bewegung der Aetherteilchen verursacht Licht von zusammengesetzter Farbe. Auch letzteres lässt sich durch entsprechende Mittel (Dispersion) in seine Bestandteile zerlegen.

Dem Gesagten zufolge muss nun der analytische Ausdruck für Bewegungen der Aetherteilchen, welche zusammengesetztes Licht hervorrufen, das in ebenen Wellen sich verbreitet, im Allgemeinen sein:

$$\xi = \Sigma P_i . \cos(p\varrho - q_i t + r_i)$$
$$\eta = \Sigma Q_i . \cos(p\varrho - q_i t + r_i')$$
$$\zeta = \Sigma R_i . \cos(p\varrho - q_i t + r_i'')$$

worin $P$, $Q$, $R$; $p$, $q$, $r$; etc. von den Coordinaten des bewegten Punktes und von der Zeit unabhängig sind.

## §. 4.

Nun lässt sich aber zeigen, dass die Ausdrücke rechts von den Gleichheitszeichen in den Gleichungen (7) in diese allgemeine Form gebracht werden können. Es ist nämlich nach Fourier:

$$e^{-St} = \tfrac{1}{2}A_0 + A_1 \cos\frac{\pi}{h}t + A_2 \cos\frac{2\pi}{h}t + A_3 \cos\frac{3\pi}{h}t + \ldots \begin{cases} t = 0 \\ t = h \end{cases}$$

wobei

*) Wiedemann's Ann. III. (1878).

$$A_n = \frac{2}{h}\int_0^h e^{-St}.\cos\frac{n\pi}{h}t.dt = \frac{2}{h}\cdot\frac{S}{S^2+\left(\frac{n\pi}{h}\right)^2}\left[1-\cos n\pi.e^{-Sh}\right] \text{ *)}$$

ferner

$$e^{-St}.\cos(k\varrho - st + \alpha) = \tfrac{1}{2}A_0\cos(k\varrho - st + \alpha)$$

$$+\tfrac{1}{2}A_1\cos\left[k\varrho - \left(s + \frac{\pi}{h}\right)t + \alpha\right] + \tfrac{1}{2}A_2\cos\left[k\varrho - \left(s + \frac{2\pi}{h}\right)t + \alpha\right] + \dots$$

$$+\tfrac{1}{2}A_1\cos\left[k\varrho - \left(s - \frac{\pi}{h}\right)t + \alpha\right] + \tfrac{1}{2}A_2\cos\left[k\varrho - \left(s - \frac{2\pi}{h}\right)t + \alpha\right] + \dots$$

$$= \tfrac{1}{2}A_0\cos(k\varrho - st + \alpha) + \tfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{n=\infty} A_n\cos\left[k\varrho - \left(s \pm \frac{n\pi}{h}\right)t + \alpha\right]$$

und

$$\xi = \frac{aA_0}{2}\cos(k\varrho - st + \alpha) + \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{aA_n}{2}\cos\left[k\varrho - \left(s \pm \frac{n\pi}{h}\right)t + \alpha\right]$$

$$\eta = \frac{bA_0}{2}\cos(k\varrho - st + \beta) + \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{bA_n}{2}\cos\left[k\varrho - \left(s \pm \frac{n\pi}{h}\right)t + \beta\right]$$

$$\zeta = \frac{cA_0}{2}\cos(k\varrho - st + \gamma) + \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{cA_n}{2}\cos\left[k\varrho - \left(s \pm \frac{n\pi}{h}\right)t + \gamma\right]$$

$\xi$, $\eta$, $\zeta$ **sind also von der angegebenen Form; das Integralsystem (7) der Differentialgleichungen (1) ist also der analytische Ausdruck für Bewegungen der Aetherteilchen, welche zusammengesetzt-farbiges Licht verursachen.**

## §. 5.

Die Bewegungen sind nach dem Superpositionsprincipe zusammengesetzt aus einfachen Schwingungen von den Perioden

---

*) Der Wert dieses Integrals wird am leichtesten folgendermassen gefunden:

$$\int_0^h e^{-St}.\cos\frac{n\pi}{h}t.dt = J, \qquad \int_0^h e^{-St}.\sin\frac{n\pi}{h}t.dt = J',$$

$$J + iJ' = \int_0^h e^{-St}.e^{\frac{n\pi}{h}ti}\,dt = \int_0^h e^{\left(\frac{n\pi}{h}i - S\right)t}\,dt$$

u. s. f.

$$T = \ldots \frac{2\pi}{s-\frac{2\pi}{h}}, \quad \frac{2\pi}{s-\frac{\pi}{h}}, \quad \frac{2\pi}{s}, \quad \frac{2\pi}{s+\frac{\pi}{h}}, \quad \frac{2\pi}{s+\frac{2\pi}{h}}, \ldots$$

welche, wie man sieht, abhängig sind von den Grössen $s$ und $h$. $s$ ist durch die Anfangsbedingungen bestimmt, wie aus Früherem hervorgeht (S. 398); über $h$ ist nunmehr etwas Näheres zu sagen. Wir hatten:

$$e^{-St} = \tfrac{1}{2}A_0 + A_1 \cos\frac{\pi}{h}t + A_2 \cos\frac{2\pi}{h}t + A_3 \cos\frac{3\pi}{h}t + \ldots$$

nach einem bekannten (Cauchy'schen) Satze aus der Functionenlehre convergirt die Reihe rechts vom Gleichheitszeichen für das ganze Wertecontinuum von $t$, für welches die Function $e^{-St}$ eindeutig, endlich und stetig bleibt; obige Gleichung ist also richtig für alle positiven Werte von $t$. Als obere Grenze von $t$ muss somit

$$h = +\infty$$

sein. Daraus folgt:

$$\frac{\pi}{h} = \delta$$

wo $\delta$ eine unendlich kleine Grösse bezeichnet.

Die Bewegung, welche durch die Gleichungen (7) repräsentirt wird, ist also zusammengesetzt aus einfachen Schwingungen, deren Perioden der Reihe nach nur unendlich wenig von einander verschieden sind. Sie verursacht Licht, welches zusammengesetzt ist aus momochromatischen Lichtsorten von Nüancen, welche der Reihe nach ebenfalls nur unendlich wenig von einander verschieden sind, welche also, durch die geeigneten Mittel physikalisch geschieden, ein continuirliches Farbenspectrum bilden.

## §. 6.

Man könnte nun noch nach der Grösse $\omega$ fragen, nach der Geschwindigkeit, mit welcher unsere zusammengesetzten Schwingungszustände im freien Aether vorschreiten. In unserem Falle ist

$$\omega = \frac{s'}{k} = \frac{S+si}{k}$$

Diese Geschwindigkeit soll also, da $k = \sqrt{u^2+v^2+w^2}$ eine in sich reelle Zahl ist, eine complexe Grösse sein, was auf einen Widerspruch hindeutet. Der Widersinn liegt aber schon in der Forderung, für die zusammengesetzte Bewegung eine Fortpflanzungsgeschwindigkeit anzugeben. Diese Wellenbewegung ist nämlich gar kein stabiler Be-

wegungszustand des Punktsystems; es gibt daher auch gar nicht zwei Ebenen gleichen Schwingungszustandes, welche fortwährend dieselbe Entfernung von einander behielten, und ebensowenig eine Schwingungsdauer schlechtweg.

Nun erübrigt noch, die Bedeutung der Grösse $S$ zu erörtern. Dieselbe kommt nur in den Coefficienten $A_0$, $A_1$, $A_2$, ... vor und hängt demnach mit der absoluten und relativen Intensität der einfachen Lichtsorten zusammen, welche jenes zusammengesetzte Licht geben, das durch die den Gleichungen (7) gemässen Bewegungen hervorgerufen wird. Je nach dem Werte von $S$ repräsentiren also jene Gleichungen verschiedene Bewegungen, welche Licht von verschiedener tatsächlich wahrnehmbarer Farbe (nicht etwa blos Weiss) verursachen.

Es mag bei dieser Gelegenheit bemerkt werden, dass es für die Molekeln des Aethers im freien Raume keinen rechten Sinn hat, den Factor $e^{-St}$ zur Amplitude zu ziehen und damit $S$ als einen Exstinctionscoefficienten d. h. als ein Mass für den Betrag der Dämpfung der Schwingungen anzusehen; denn woher die Dämpfung? Dem Integralsysteme (7) lässt sich eben nur im obigen Sinne eine physikalische Deutung geben.

Der in den Gleichungen (5) auftretende Factor $e^{K\varrho_1}$ hat, solange man vom Aether im freien Raume und von Schwingungszuständen, die in ebenen Wellen vorschreiten, spricht, keine physikalische Bedeutung. Eine äquivalente periodische Reihe würde eine Superposition von Schwingungen verschiedener Fortpflanzungsrichtung in jedem Systempunkte bedeuten, die tatsächlich nicht vorkommen kann; ein Zusammenziehen obigen Factors mit der constanten Amplitude würde einer Absorption entsprechen, deren Annahme für einen ebenen Wellenzug im freien Aether keine Berechtigung hat.

Für den Aether im freien Raume bleibt also das particuläre Integralsystem (5) mit der Specialisirung $K = 0$, d. i. das System (7) die allgemeinste Lösung der Differentialgleichungen (1).

Prag, im Jänner 1881.

## XXXI.

# Construction der Cardinalpunkte eines Linsensystems.

Von

**M. Koppe.**

---

Irgend einen Punkt $A$ auf der Axe $XY$ eines centrirten Systems brechender sphärischer Flächen kann man als reellen oder virtuellen Vereinigungspunkt von Strahlen ansehn, welche innerhalb des ersten — links gelegenen — Mediums unter geringer Neigung gegen die Axe verlaufen. Nach sämmtlichen Brechungen nehmen die Strahlen im letzten Medium eine solche Richtung an, dass ein Punkt $a$ auf der Axe ihr reeller oder virtueller Vereinigungspunkt ist. In derselben Art entspricht einem in der Nähe der Axe gelegenen Punkte $B$ des ersten ein Punkt $b$ des letzten Mediums. Liegen mehrere Punkte $B$, $C$, ... in einer Ebene, die in $A$ auf der Axe senkrecht steht, so liegen die Bildpunkte $b$, $c$, ... in einer parallelen Ebene durch $a$, und zwar so, dass die Bildfigur der ursprünglichen ähnlich ist. Ist dieser Satz für eine einzige brechende Fläche bewiesen, so hat man, um seine allgemeine Gültigkeit zu erkennen, ihn auf die einzelnen Flächen der Reihe nach anzuwenden.

Das Bild des unendlich fernen Axenpunktes des ersten Mediums im letzten Medium sei $f$. Verschiebt man die zur Axe senkrechte Gerade $AB$ so, dass $B$ eine Parallele zur Axe beschreibt, so kann man diese Parallele beständig als einen dem Punkte $B$ zugehörigen Strahl ansehn, aber auch als Strahl des unendlich fernen Punktes. Aus letzterem Grunde muss er sich nach allen Brechungen in eine durch $f$ gehende Gerade verwandeln, auf der sich das Bild $b$ ver-

schieben muss. Es wird sich daher eine Lage des zur Axe senkrechten Bildes *ab* construiren lassen, in der es gleich *AB* und gleich gerichtet, eine andere, in der es gleich *AB*, aber entgegengesetzt gerichtet ist. Die diesen ausgezeichneten Lagen entsprechenden Axenpunkte *A* und *a* seien für den ersten Fall ($ab = + AB$) *H* und *h*, für den zweiten ($ab = - AB$) *H'* und *h'*. Die ersteren heissen eigentliche, die letzteren uneigentliche Hauptpunkte, die in ihnen zur Axe senkrechten Ebenen Hauptebenen. Die Punkte *h* und *h'* befinden sich in gleicher Entfernung zu beiden Seiten des Punktes *f*; der Mittelpunkt von *HH'* sei *F*. Eine in einer Hauptebene gelegene Figur wird in der entsprechenden congruent abgebildet.

Um nun das Bild des Gegenstandes *AB* zu finden, ziehe man von *B* die Strahlen nach den Hauptpunkten *H* und *H'*, welche die Hauptebenen *H'* und *H* in *C* und *D* treffen. Nach den Eigenschaften der Hauptebenen ergiebt sich das Bild von *C* durch $H'C = - h'c$, das von *D* durch $HD = + hd$. Der Strahl *CH* muss in *ch*, *H'D* in *h'd* übergehen, deren Schnittpunkt das Bild *b* von *B* und damit auch das Bild *ba* von *BA* bestimmt.

Nun sei

$$HH' = 2\eta, \quad hh' = 2\varkappa, \quad FA = x, \quad fa = y.$$

Dann ist

$$CH' : DH = BC : BH = x - \eta : x + \eta$$

und

$$ch' : dh = cb : bh = \varkappa - y : \varkappa + y,$$

folglich

$$x - \eta : x + \eta = \varkappa - y : \varkappa + y,$$

oder

$$x : \eta = \varkappa : y, \quad xy = \varkappa\eta.$$

Verschiebt sich ein leuchtender Punkt auf der Axe, so bewegt sich, wenn nur eine brechende Fläche vorhanden ist, der Bildpunkt, so lange er stetig seine Lage ändert, nach gleicher Richtung. Diese Eigenschaft überträgt sich auf beliebig viel brechende Flächen. Die Formel $xy = \varkappa\eta$ ist damit in Uebereinstimmung, wenn $\varkappa$ und $\eta$ gleiches Zeichen haben. Wäre aber etwa $\varkappa$ negativ, d. h. vertauschten *h* und *h'* ihre Lagen, so würde aus $xy = \varkappa\eta$ folgen, dass *A* und *a* nach entgegengesetzten Richtungen sich bewegen. Finden daher nur Brechungen statt, so wird, wie in der Figur angenommen, die Richtung *HH'* der Richtung *hh'* entgegengesetzt sein. Dies bleibt bestehn, wenn ausser den brechenden noch eine gerade Anzahl reflectirender Flächen vorhanden ist; ist letztere aber ungerade, so ist $\varkappa\eta$ negativ, Gegenstand und Bild haben entgegengesetzt gerichtete stetige Bewegung.

Die obige Construction des Bildpnnktes durch zwei in ihm sich schneidende Strahlen ist nicht geeignet, eino klare, leicht festzuhaltende Anschauung von der Abhängigkeit der Pnnkte $A$ und $a$ von einander zn geben. Durch folgende Constrnction wird dies geloistet. Man errichte in $F$ und $f$ auf der Axo Lote $FG$ und $fg$, gleich der mittleren Proportionalen von $FH = \eta$ nnd $FK = fh = \varkappa$, und lasso einen Punkt $P$ dio Peripherie des znm Durchmesser $Gg$ gehörenden Kreises durchlaufen. Die Strahlen $PG$ nnd $Pg$, die um $G$ und $g$ sich drehen, schneiden dann auf der Axe die znsammengehörigen Pnnkte $A$, $a$ ans. Denn ans Dreieck $AGF$ ähnlich Dreieck $gaf$ folgt $AF.af = FG.fg = FH.FK$, oder $xy = \eta\varkappa$. Nimmt man $P$ nahe bei $G$ an, so ergiebt sich als Bildpunkt zn $F$ der nnendlich ferno Punkt des letzten Medinms. Es sind also $F$, $f$ die beidon Hanptbrennpnnkte. Diese Constrnction löst auch die Frago, ob oin Pnukt mit seinem Bildpunkt znsammenfallen kann. Dies findet dann und nnr dann statt, wenn der von $P$ zn dnrchlaufende Kreis die Axe schneidet. Befindet sich $P$ in dem Schuittpunkt, so fallen auch $A$, $a$ in denselben.

In Fig. 1. ist $a$ das Bild von $A$, $d$ von $D$, also geht der Strahl $AD$ in $ad$ oder mit Rücksicht auf seine Richtung in $da$ über. Betrachten wir die Abweichung des Strahlos $AD$ von der Axe $XY$ als positiv, so ist

$$\operatorname{tg} DAH = \frac{DH}{HA}, \quad \operatorname{tg} dah = -\frac{dh}{ha}.$$

Soll der gebrochene dem nrsprünglichen Strahl parallel sein, so muss $HA = -ha$, $x + \eta = -\varkappa - y$, also (wegen $x : \varkappa = \eta : y$) $x = -\varkappa$ nnd $y = -\eta$ sein. Diese beiden in Fig. 2. mit $K$ nnd $k$ bezeichneten Pnnkte heissen Kuotenpunkte. Sollen die Strahlen vor uud nach der Brechnng um gleich viel nach entgegengesetzten Seiten von der Axe abweichen, so mnss $HA = ha$ sein, $x + \eta = \varkappa + y$, woraus $x = \varkappa$, $y = \eta$. Diese mit $K'$ uud $k'$ bezeichneten Punkte mögen nneigentliche Knotenpnnkte heissen.

In Fig. 2. sei der Gegenstand $AB = L$, sein Bild $ab = l$. Dann sind $BK$ nnd $bk$ entsprechende Strahlen, und, weil sie dnrch dio Knotenpunkte gehen, parallel, folglich Dreieck $ABK$ ähnlich Dreieck $abk$, $AB : ab = AK : -ak$, wenn man die Richtungen von $AB$ nnd $ab$ im Verhältniss mit ansdrückt. Hieraus folgt $L : l = (\varkappa + x) : (-y - \eta)$ nnd, da $\varkappa : y = x : \eta$, so wird

$$\frac{L}{l} = -\frac{\varkappa}{y} = -\frac{x}{\eta}$$

Legt man dem Gegenstande in $A$ die constante Grösse $-\varkappa = -FK$

bei, so wird, wenn $A$ sich auf der Axe verschiebt, die Grösse des Bildes in $a$ stets durch $y = fa$ ausgedrückt. Die Richtung des Bildes ändert sich, wenn $a$ durch $f$ hindurchgeht.

Ein System brechender Flächen bestehe aus zwei Teilen, I und II, für welche einzeln die Lage der eigentlichen und uneigentlichen Hauptpunkte bekannt seien. Die auf beide Systeme bezüglichen Grössen mögen durch die Indices (1) und (2) unterschieden werden. Der Abstand der Brennpunkte $f_1$ und $F_2$ sei $c$. Um die optischen Wirkungen des zusammengesetzten Systems einfach darzustellen, muss man dessen Hauptpunkte kennen. Die auf letztere bezüglichen Grössen mögen durch die entsprechenden Buchstaben in Klammern bezeichnet werden. Es ist:

$$\frac{L_1}{l_1} = -\frac{\varkappa_1}{y_1}, \quad \frac{L_2}{l_2} = -\frac{x_2}{\eta_2}$$

Für das zusammengesetzte System ist $(L) = L_1$, $(l) = l_2$, $l_1 = L_2$, also

$$\frac{(L)}{(l)} = \frac{\varkappa_1 x_2}{y_1 \eta_2}$$

Da $y_1 + x_2 = c$, so hat man für die Hauptpunkte, für die $(L) = (l)$ sein muss:

$$\frac{y_1}{\varkappa_1} = \frac{x_2}{\eta_2} = \frac{c}{\eta_2 + \varkappa_1}$$

folglich auch

$$\frac{\eta_1}{x_1} = \frac{\varkappa_2}{y_2} = \frac{c}{\eta_2 + \varkappa_1}$$

Für die uneigentlichen Hauptpunkte ist $(L) = -(l)$, also:

$$\frac{y_1}{\varkappa_1} = -\frac{x_2}{\eta_2} = \frac{c}{\varkappa_1 - \eta_2}$$

und

$$\frac{\eta_1}{x_1} = -\frac{\varkappa_2}{y_2} = \frac{c}{\varkappa_1 - \eta_2}$$

Teilt man also den Abstand $f_1 F_2 = c$ im Verhältniss $y_1 : x_2 = \varkappa_1 : \eta_2$ und betrachtet den Teilpunkt als leuchtenden Punkt des zwischen I und II befindlichen Mediums, so ist sein durch (I) erzeugtes Bild im ersten Medium der Hauptpunkt $(H)$, sein durch (II) erzeugtes Bild im letzten Medium ist $(h)$. Für die uneigentlichen Hauptpunkte hat man $c$ im Verhältniss $\varkappa_1 : -\eta_2$ zu teilen. Mittelst der über den Durchmessern $G_1 g_1$ und $G_2 g_2$ beschriebenen Kreise, die von den Punkten $P_1$, $P_2$ durchlaufen werden, sind also die Hauptpunkte leicht zu erhalten.

Digitized by Google

Für $(H)$ ist $x_1 = \frac{\eta_1(\eta_2+\varkappa_1)}{c}$, für $(H')$ ist $x_1 = \frac{\eta_1(\varkappa_1-\eta_2)}{c}$, also, da $2(\eta)$ den Abstand von $(H)$ und $(H')$, d. h. $F_1(H')-F_1(H)$ bezeichnet:

$$2(\eta) = \frac{\eta_1(\varkappa_1-\eta_2)}{c} - \frac{\eta_1(\eta_2+\varkappa_1)}{c}$$

$$(\eta) = -\frac{\eta_1\eta_2}{c}$$

Für $(h)$ ist $y_2 = \frac{\varkappa_2(\eta_2+\varkappa_1)}{c}$ und für $(h')$: $y_2 = -\frac{\varkappa_2(\varkappa_1-\eta_2)}{c}$, also, da $(h)(h') = f_2(h') - f_2(h)$ mit $2(\varkappa)$ zu bezeichnen ist:

$$2(\varkappa) = -\frac{\varkappa_2(\varkappa_1-\eta_2)}{c} - \frac{\varkappa_2(\eta_2+\varkappa_1)}{c}$$

$$(\varkappa) = -\frac{\varkappa_1\varkappa_2}{c}$$

Demnach ist

$$\frac{(\eta)}{(\varkappa)} = \frac{\eta_1}{\varkappa_1}\cdot\frac{\eta_2}{\varkappa_2}$$

Man ist jetzt im Stande, die Hauptpunkte für ein beliebiges System zu finden, wenn man sie für eine einzige brechende Fläche construiren kann. Denn man kann die erste Fläche mit der zweiten, ihr System mit der dritten etc. combiniren. Es sei daher $H$ der Scheitelpunkt, $K$ der Krümmungsmittelpunkt einer brechenden Fläche. Das erste Medium habe den Brechungsexponenten $n_1$, das zweite $n_2$. Da die von $K$ ausgehenden Strahlen bei der Brechung nicht abgelenkt werden, so fallen in $K$ die beiden früher mit $K$ und $k$ bezeichneten Knotenpunkte zusammen. Die nach einem Punkt der sphärischen Fläche in der Nähe von $H$ gerichteten Strahlen des einen Mediums gehen auch nach der Brechung von diesem aus, es fallen also in $H$ die früher mit $H$ und $h$ bezeichneten Hauptpunkte zusammen. Da in $K$ und in $H$ der Gegenstand mit dem Bilde zusammentrifft, so muss der Constructionskreis über $Gg$, wie früher bemerkt, durch $K$ und $K$ hindurchgehn, woraus $FH = fK$ folgt. Es ist $FH = fK = \eta$, $FK = fH = \varkappa$. Der der Axe parallele Strahl $CD$ wird, weil $D$ in der Hauptebene liegt, in $Df$ übergehn. Der Einfallswinkel ist $EDC$ gleich dem Supplement von $DKf$, der Brechungswinkel $fDK$. Folglich

$$n_1 \sin DKf = n_2 \sin fDK$$
$$n_1 . Df = n_2 . fK$$

Da $D$ sehr nahe bei $H$, so ist $Df = Hf = \varkappa$, also

$$n_1\varkappa = n_2\eta$$

Man findet also die Brennpunkte, wenn man den Radius in der Verlängerung sowohl über $H$ als über $K$ hinaus im Verhältniss $n_1 : n_2$ teilt.

Hat man nun eine Reihe brechender Medien, $n_1, n_2, \ldots n\lambda$, so wird:

$$\frac{\eta_1}{\varkappa_1} = \frac{n_2}{n_1}, \quad \frac{\eta_2}{\varkappa_2} = \frac{n_3}{n_2}, \quad \ldots \quad \frac{\eta\lambda-1}{\varkappa\lambda-1} = \frac{n\lambda}{n\lambda-1}$$

Für das ganze System wird durch Erweiterung der oben gefundenen Relation:

$$\frac{(\eta)}{(\varkappa)} = \frac{\eta_1}{\varkappa_1} \cdot \frac{\eta_2}{\varkappa_2} \cdots \frac{\eta\lambda-1}{\varkappa\lambda-1} = \frac{n\lambda}{n_1}$$

$$n_1(\eta) = n\lambda(\varkappa)$$

Hat das erste mit dem letzten Medium gleichen Brechungsexponenten, so wird $(\eta) = (\varkappa)$, die Hauptpunkte fallen mit den Knotenpunkten zusammen, die Lote $FG$, $fg$, welche den Durchmesser des Constructionskreises tragen, werden auch $= (\eta) = (\varkappa)$.

Für dünne Linsen ergiebt sich eine weitere Vereinfachung. Denken wir uns in dem oben betrachteten System unter I eine nach $X$, unter II eine nach $Y$ hin convexe Fläche, deren Radien $r_1, r_2$ seien, und die das eingeschlossene Medium gegen dasselbe äussere Medium begrenzen. Dann ist offenbar $\eta_1 : \varkappa_2 = \varkappa_1 : \eta_2 = r_1 : r_2$. Um nun die Hauptpunkte zu construiren, hat man $f_1F_2$ im Verhältniss $\varkappa_1 : \eta_2 = r_1 : r_2$ zu teilen. Da aber $f_1$ und $F_2$ zu den beiden Kugelflächen ähnliche Lage haben, so wird der Teilpunkt der Aehnlichkeitspunkt der beiden Flächen sein, und auch die Dicke im Verhältniss der Radien teilen. Der Teilpunkt liegt innerhalb der Linse, wenn die Radien gleiches Zeichen haben, also bei biconvexen und biconcaven Linsen, in andern Fällen ausserhalb, jedoch im allgemeinen bei dünnen Linsen in geringer Entfernung. Die von dem Teilpunkt durch jede der sphärischen Flächen erzeugten Bilder, also die Hauptpunkte der Linse, liegen diesem und damit der Linse sehr nahe, weil im Scheitelpunkt einer brechenden Fläche Bild und Gegenstand zusammenfallen. Bei dünnen Linsen fallen also $H$ und $h$ fast zusammen. Eine Ausnahme machen convex-concave Linsen, die auf beiden Seiten fast gleiche Krümmung haben, bei denen der erwähnte Teilpunkt weit ausserhalb der Linse liegen kann. Haben z. B. die beiden Flächen denselben Krümmungsmittelpunkt, so fallen in diesem $H$ und $h$ zusammen.

In den folgenden Figuren sind für eine convexe Linse, für eine concave, und für eine gläserne Vollkugel die Hauptpunkte und der Constructionskreis gezeichnet. Es kann bei Linsen von beträchtlicher

Dicke der Fall eintreten, dass $F$ mit $f$ zusammenfällt, also derselbe Punkt der Axe, als Punkt des ersten Mediums Strahlen aussendet, die im letzten Medinm der Axe parallel werden, und, als Punkt des letzten, solche, die im ersten der Axe parallel werden. Dann fällt auch $G$ auf $g$, nnd die obige Construction wird unbrauchbar. Nimmt man aber an, dass der Punkt $G$ der Scheitelpunkt eines sich drehenden rechten Winkels ist, so schneiden dessen Schenkel auf der Axe immer zwei zusammengehörige Punkte $A$, $a$ aus. Eine derartige Linse könnte nach der Lage ihrer Brennpunkte weder als convex noch als concav bezeichnet werden. Will man diese Namen auf Linsen von beträchtlicher Dicke ausdehnen, so kann man dazu die Eigenschaft als wesentliche ansehn, dass bei convexen $\varkappa$ und $\eta$ positiv, bei concaven negativ sind.

Wir hatten oben den Fall ausgeschlossen, dass eine ungerade Zahl spiegelnder Flächen vorhanden ist, in welchem die Grössen $\varkappa$, $\eta$ entgegengesetzte Zeichen haben. Es sei z. B. $\varkappa$ negativ. Verwandeln wir $\varkappa$ in $-\varkappa$ und $y$ in $-y$, rechnen also die Abscissen $y$ von $f$ aus wie $x$ von $F$ aus nach links, so wird

$$xy = \varkappa\eta$$

$$\frac{L}{l} = -\frac{\varkappa}{y} = -\frac{x}{\eta}$$

Errichtet man in $F$ und $f$ nach entgegengesetzten Richtungen Lote $FG$, $fg$ gleich der mittleren Proportionalen zu $\varkappa$ und $\eta$, und beschreibt über $Gg$ als Durchmesser einen Kreis, so zeigt ein auf diesem sich bewegender Punkt $P$ mittelst der Strahlen $PG$, $Pg$ zwei zusammengehörige Punkte des ersten und letzten Mediums an. Denn aus Dreieck $AFG$ ähnlich Dreieck $gfa$ folgt $AF.af = FG.fg$ oder $xy = \varkappa\eta$. Nimmt man an, dass der Gegenstand in $A$ die Grösse $-\varkappa$ habe, so ist die Grösse des Bildes durch $af$ dargestellt.

Es giebt stets zwei Punkte, die Schnittpunkte des Constructionskreises mit der Axe, in denen das Bild mit dem Gegenstande zusammenfällt.

Hat das erste Medium denselben Brechungsexponenten wie das letzte, so ist $\varkappa = \eta$.

Diese Construction bleibt brauchbar, wenn $F$ auf $f$ fällt, was z. B. immer der Fall ist, wenn das ganze System nur aus einer spiegelnden Fläche besteht. Noch übersichtlicher ist dann jedoch die folgende. Man schlage um $F$, den Mittelpunkt des Radius $r$, einen Kreis, der die convexe oder concave spiegelnde Fläche berührt. Fällt man von irgend einem Punkte der Peripherie ein Lot auf die

Axe und zieht in demselben Pnnkt eine Tangente, so treffen diese die Axe in zusammengehörigen Punkten. Ist die Grösse des Gegenstandes $= \eta = \frac{r}{2}$, so wird die des Bildes durch die Entfernung des Bildpnnktes vom Brennpnnkt angegeben. Ort und Grösse des Bildes sind dieselben, ob die Fläche anf der convexen oder concaven Seite spiegelt, die Richtung des Bildes ist entgegengesetzt, weil im ersten Fall $\eta$ positiv, im andern negativ ist.

XXXII.

# Ueber magische Rechtecke mit ungeraden Seitenzahlen.

Von

**Th. Harmuth.**

---

Die Aufgabe, das magische Rechteck mit den Seitenzahlen oder Argumenten $p$ und $q$ zu bilden, d. h. die Zahlen

$$1, 2, 3 \ldots pq$$

(worin $p$ und $q$ ungerade sind) so auf $q$ Reihen mit je $p$ Gliedern zu verteilen, dass alle Verticalreihen unter sich gleiche Summen und alle Horizontalreihen unter sich gleiche Summen haben, würde, wie leicht ersichtlich, allgemein lösbar sein, sobald es gelänge, das System:

$$\begin{array}{lllll}
a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \ldots & a_{1,p} \\
a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \ldots & a_{2,p} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_{p-1,1} & a_{p-1,2} & a_{p-1,3} & \ldots & a_{p-1,p} \\
a_{p,1} & a_{p,2} & a_{p,3} & \ldots & a_{p,p} \\
a_{p+1,1} & a_{p+1,2} & a_{p+1,3} & \ldots & a_{p+1,p} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_{q,1} & a_{q,2} & a_{q,3} & \ldots & a_{q,p},
\end{array}$$

worin $p < q$ und $a_{r,s} = (r-1)p + s$ angenommen ist, so umzuformen, dass

in jeder Verticalreihe die Summe der vorderen Indices $= \frac{q(q+1)}{2}$,

„ „ „ „ „ „ hinteren „ $= \frac{q(p+1)}{2}$,

„ „ Horizontalreihe „ „ „ vorderen „ $= \frac{p(q+1)}{2}$,

„ „ „ „ „ „ hinteren „ $= \frac{p(p+1)}{2}$

wäre. Noch symmetrischer wäre folgende Anordnung als specieller Fall der eben genannten. Jede Verticalreihe enthält die vorderen Indices 1, 2, 3 ... $q$, jeden einmal und die hinteren wie oben; jede Horizontalreihe enthält die vorderen Indices wie oben und die hinteren 1, 2, 3 ... $p$, jeden einmal. Diesen Bedingungen entsprechen beispielsweise die Lösungen:

$$R(3, 5) = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{41} & a_{43} \\ a_{22} & a_{53} & a_{21} \\ a_{33} & a_{11} & a_{52} \\ a_{42} & a_{23} & a_{31} \\ a_{51} & a_{32} & a_{13} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 10 & 12 \\ 5 & 15 & 4 \\ 9 & 1 & 14 \\ 11 & 6 & 7 \\ 13 & 8 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{und:}$$

$$R(3, 7) = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{41} & a_{73} \\ a_{23} & a_{61} & a_{42} \\ a_{31} & a_{32} & a_{63} \\ a_{43} & a_{72} & a_{11} \\ a_{52} & a_{53} & a_{21} \\ a_{62} & a_{13} & a_{51} \\ a_{71} & a_{22} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 10 & 21 \\ 6 & 16 & 11 \\ 7 & 8 & 18 \\ 12 & 20 & 1 \\ 14 & 15 & 4 \\ 17 & 3 & 13 \\ 19 & 5 & 9 \end{vmatrix}$$

Ob ein allgemeines Gesetz, nach dem eine solche Anordnung immer ausführbar wäre, vorhanden ist, möge dahingestellt bleiben.

Die folgenden Ausführungen beziehen sich darauf, eine Reihe von Speciallösungen, die sich aus den magischen Quadraten ableiten lassen, anzugeben, sowie eine allgemeine Lösung auf einem andern, von diesen Bedingungen unabhängigen Wege herzuleiten.

---

§. 1. In § 14. meiner Arbeit „über magische Quadrate und ähnliche Zahlenfiguren“ habe ich nachgewiesen, dass sich $R(n, n^2)$ aus $Q(n)$ d. h. aus dem magischen Quadrat, welches aus den Zahlen 1 bis $n^2$ gebildet ist, ableiten lässt. Dieser Ausspruch lässt sich dahin verallgemeinern, dass $R(n^x, n^\lambda)$ allgemein lösbar ist, sobald $n$ ungerade

ist und $\varkappa$ und $\lambda$ beliebige ganze positive Zahlen sind, welche der Bedingung $\varkappa \leqq \lambda$ genügen.

Ist zunächst $\varkappa = \lambda$, so hat man, wenn unter $Q(\alpha)$ allgemein das aus den Zahlen $1, 2 \ldots \alpha^2$ gebildete Quadrat bedeutet, direct:

$$\begin{aligned} R(n, n) &= Q(n) \\ R(n^2, n^2) &= Q(n^2) \\ &\ldots\ldots \\ R(n^\varkappa, n^\varkappa) &= Q(n^\varkappa); \end{aligned}$$

bezeichnet ferner

| | | | |
|---|---|---|---|
| $R_1(n, n^2)$ | die a. a. O. gefundene Lösung aus den Zahlen | $1$ | bis $n^3$ |
| $R_2(n, n^2)$ | die entsprechende „ „ „ „ | $n^3+1$ | „ $2n^3$ |
| $R_3(n, n^2)$ | „ „ „ „ „ „ | $2n^3+1$ | „ $3n^3$ |
| . . . . . | . . . . . . . . . . . | . . . . | . . . |
| $R_n(n, n^2)$ | „ „ „ „ „ „ | $(n-1)n^3+1$ | „ $n^4$ |

und benennt man die Verticalreihen dieser $n$ Rechtecke der Reihe nach mit

$$\begin{matrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \ldots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \ldots & A_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \ldots & A_{n,n} \end{matrix}$$

so bringe man diese in die a. a. O. gegebene Anordnung:

$$\begin{matrix} A_{1,1} & A_{2,2} & A_{3,3} & \ldots & A_{n,n} \\ A_{2,1} & A_{3,2} & A_{4,3} & \ldots & A_{1,n} \\ A_{3,1} & A_{4,2} & A_{5,3} & \ldots & A_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n-1,1} & A_{n,2} & A_{1,3} & \ldots & A_{n-2,n} \\ A_{n,1} & A_{1,2} & A_{2,3} & \ldots & A_{n-1,n} \end{matrix}$$

um direct $R(n, n^3)$ zu erhalten. — Analog ergibt sich $R(n, n^4)$ aus $R(n, n^3)$, $R(n, n^5)$ aus $R(n, n^4)$ u. s. w.

Bildet man ferner nach §. 3. der erwähnten Arbeit durch die Zerlegung $n^2 = nn$

$$Q(n^2) = R_1(n^2, n^2) \quad \text{aus den Zahlen } 1 \text{ bis } n^4$$

und bezeichnet die $n$ Gruppen von je $n$ Verticalreihen mit

$$B_{1,1} \quad B_{1,2} \quad \ldots \quad B_{1,n};$$

bildet dann weiter, dem vorigen analog:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $R_2(n^2, n^2)$ | aus den Zahlen | $n^4+1$ | bis $2n^4$ |
| $R_3(n^2, n^2)$ | „ „ „ | $2n^4+1$ | „ $3n^4$ |
| . . . . . | . . . . . . | . . . . | . . . |
| $R_n(n^2, n^2)$ | „ „ „ | $(n-1)n^4+1$ | „ $n^5$ |

mit den respectiven Verticalgruppen:

$$\begin{matrix} B_{2,1} & B_{2,2} & \dots & B_{2,n} \\ B_{3,1} & B_{3,2} & \dots & B_{3,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{n,1} & B_{n,2} & \dots & B_{n,n} \end{matrix}$$

so sind diese Grössen $B$ wieder in der oben aufgestellten Weise zu ordnen, um $R(n^2, n^3)$ zu ergeben. Analog lässt sich dann aus diesem $R(n^2, n^4)$, $R(n^2, n^5)$ ... ableiten.

Ferner stelle man sich $R(n^3, n^3) = Q(n^3)$ nach dem citirten Paragraphen durch die Zerlegung $n^3 = n \, . \, n^2$ her, und bestimme, indem man $n$ Gruppen von je $n^2$ Verticalreihen annimmt, auf analoge Weise

$$R(n^3, n^4), \quad R(n^3, n^5) \dots,$$

sodann $R(n^4, n^4) = Q(n^4)$ durch die Zerlegung $n^4 = n \, . \, n^3$ u. s. w. Die allgemeine Gültigkeit der Lösung ist danach leicht ersichtlich.

§. 2. Allgemein lösbar sind auch die Rechtecke von der Form

$$R(n, (2k+1)n),$$

d. h. diejenigen, in denen das zweite Argument ein ungerades Vielfaches des ersten ist.

Man setze zunächst $n = 3$ und bilde die $2k+1$ Quadrate, welche zusammen das Rechteck ausmachen müssen, nämlich die Quadrate aus den Zahlen:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 bis 9 | mit den Verticalreihen | $a_{1,1}$ | $a_{1,2}$ | $a_{1,3}$ |
| 10 — 18 | „ „ „ | $a_{2,1}$ | $a_{2,2}$ | $a_{2,3}$ |
| 19 — 27 | „ „ „ | $a_{3,1}$ | $a_{3,2}$ | $a_{3,3}$ |
| . . . . . | . . . . . | . . . | . . . | . . . |
| $2k.9+1$ bis $(2k+1)9$ | „ „ „ | $a_{2k+1,1}$ | $a_{2k+1,2}$ | $a_{2k+1,3}$ |

Stehen die Verticalreihen in dieser Weise direct untereinander, so ist leicht ersichtlich, dass die Gesammtverticalsummen sofort gleich sind; in den horizontalen Gruppen steigt sie mit jeder Gruppe um $n^3 = 27$. Demnach hat die mittelste, $(k+1)$ste Gruppe die verlangte Summe, in welchen die vorderen Indices

$$k+1, \quad k+1, \quad k+1 \text{ die Summe } 3k+3 \text{ haben.}$$

Da die Anfangsglieder der Colonnen in einer und derselben Verticalen sich nur um ein Vielfaches von $n^2$ unterscheiden, so wird die Lösung gefunden sein, wenn man obige Glieder, ohne die Verticalen untereinander zu vertauschen, so umstellen kann, dass die Summe der vorderen Indices in jeder Horizontalreihe $3k+3$ ist. Das geschieht aber durch die Anordnung:

$$\begin{matrix} a_{1,1} & a_{k+1,2} & a_{2k+1,3} \\ a_{2,1} & a_{k+2,2} & a_{2k-1,3} \\ a_{3,1} & a_{k+3,2} & a_{2k-3,3} \\ \dots & \dots & \dots \end{matrix}$$

$$\begin{array}{lll}
a_{k+1,1} & a_{2k+1,2} & a_{1,3} \\
a_{k+2,1} & a_{1,2} & a_{2k,3} \\
a_{k+3,1} & a_{2,2} & a_{2k-2,3} \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
a_{2k,1} & a_{k-1,2} & a_{4,3} \\
a_{2k+1,1} & a_{k,2} & a_{2,3}
\end{array}$$

Aus diesem Fall $n=3$ sind nun die Lösnngen für die folgenden ungeraden Zahlen leicht zu entnehmen.

Haben nämlich

$$\begin{array}{llll}
a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,5} \\
a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,5} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{2k+1,1} & a_{2k+1,2} & \ldots & a_{2k+1,5}
\end{array}$$

eine analoge Bedeutung, wie vorher, so findet man überall die erforderliche Snmme $5k+5$ für jede Horizontalreihe, wenn man an das für $n=3$ gebildete Schema die beiden Verticalreihen

$$\begin{array}{ll}
a_{1,4} & a_{2k+1,5} \\
a_{2,4} & a_{3k,5} \\
\cdots & \cdots \\
a_{2k,4} & a_{2,5} \\
a_{2k+1,4} & a_{1,5}
\end{array}$$

ansetzt. Dieser neu hinzutretende Teil ist dann unter entsprechender Aenderung der zweiten Indices für

$n = 7, 9, 11 \ldots$

noch $\quad 1, 2, 3 \ldots$ mal zu wiederholen.

Für die speciellen Fälle $n = 9, 15, 21 \ldots$ kann man auch das für $n=3$ gegebene Schema 3, 5, 7 ... mal verwenden, indem man die vorderen Indices von je 3 auf einander folgenden Verticalreihen in der dort angegebenen Weise umstellt, die hinteren Indices dieser 3 auf einander folgenden Verticalen aber unverändert lässt.

Für $n=5$ und ein ungerades $k$ findet man das gewünschte Resultat auch durch folgende Auordnung:

$$\begin{array}{lllll}
a_{1,1} & a_{2k+1,2} & a_{k+1,3} & a_{2k+1,4} & a_{1,5} \\
a_{2,1} & a_{2k-1,2} & a_{k+3,3} & a_{2k-1,4} & a_{2,5} \\
a_{3,1} & a_{2k-3,2} & a_{k+5,3} & a_{2k-3,4} & a_{3,5} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{\frac{k+1}{2},1} & a_{k+2,2} & a_{2k,3} & a_{k+2,4} & a_{\frac{k+1}{2},5} \\
a_{\frac{k+3}{2},2} & a_{2k,2} & a_{2,3} & a_{2k,4} & a_{\frac{k+3}{2},5} \\
a_{\frac{k+5}{2},1} & a_{2k-2,2} & a_{4,3} & a_{2k-2,4} & a_{\frac{k+5}{2},5} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{k,1} & a_{k+3,2} & a_{k-1,3} & a_{k+3,4} & a_{k,5}
\end{array}$$

$R(p, mp)$ [illegible]
und analog die [illegible]

[illegible]

Jedes dieser [illegible] Horizontalreihen, lässt sich [illegible] zusammenfasst, in [illegible] für dasselbe Rechteck [illegible] Verticalsumme haben. [illegible]

des ersten [illegible]
„ zweiten [illegible]
. . . . .
„ $n$ten [illegible]

so ist ersichtlich, dass [illegible] gleichsummig sind, [illegible] summen der betreffenden [illegible] Verschiedenheit wird [illegible] gebenen Anordnung [illegible] der Ausführung zu [illegible] in ein Quadrat [illegible]

Es ist [illegible] Argumente nicht [illegible] ungische Quadrat [illegible] grösste gemeinschaftliche Factor [illegible] eckes ist.

---

§. 5. [illegible] verschiedene [illegible] funden worden, [illegible]

Bezeichnet [illegible]

[illegible]

$$\begin{array}{cccc} V_{1,1} & V_{1,2} & \ldots & V_{1,p} \\ V_{2,1} & V_{2,2} & \ldots & V_{2,p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ V_{r,1} & V_{r,2} & \ldots & V_{r,p} \end{array}$$

gleiche Verticalsummen, während die Horizontalsummen zwar ich sind, aber unter sich durch das in §. 2. gelehrte Verfahren glichen werden. Mithin ist $R(p, rq)$ aus $R(p,q)$ abzuleiten.

§. 6. Bezeichnet man ferner die Horizontalreihen des auf irgend n Wege gefundenen Rechteckes $R(p,q)$ mit

$$H_{1,1} \quad H_{1,2} \quad \ldots \quad H_{1,q},$$

die Horizontalreihen der Rechtecke aus den Zahlen:

$$\begin{array}{llllllll} pq+1 & \text{bis } 2pq & \text{mit} & H_{2,1} & H_{2,2} & \ldots & H_{2,q} & \\ 2pq+1 & \text{„ } 3pq & \text{„} & H_{3,1} & H_{3,2} & \ldots & H_{3,q} & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ -1)pq+1 & \text{„ } tpq & \text{„} & H_{t,1} & H_{t,2} & \ldots & H_{t,q} & t = 2k'+1 \end{array}$$

stelle man das Schema:

$$\begin{array}{cccc} H_{1,1} & H_{2,1} & \ldots & H_{t,1} \\ H_{1,2} & H_{2,2} & \ldots & H_{t,2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ H_{1,q} & H_{2,q} & \ldots & H_{t,q} \end{array}$$

f und ordne dasselbe nach §. 2. und 4. so, dass die Gesammtrizontalreihen dieselben bleiben, die Verticalen sich aber so ernzen, dass die Summe der vorderen Indices durchweg gleich ist.

Danach ist auch $R(tp,q)$ aus $R(p,q)$ abzuleiten.

Für den Fall, dass $q > t$, empfiehlt sich eine Anordnung, welche n dem System der $H$ einen quadratischen Teil absondert und die brigen Reihen je zwei und zwei sich ergänzen lässt. Diese ist:

$$\begin{array}{cccccc} H_{1,1} & H_{2,1} & H_{3,1} & \ldots & H_{t-1,1} & H_{t,1} \\ H_{2,2} & H_{3,2} & H_{4,2} & \ldots & H_{t,2} & H_{1,2} \\ H_{3,3} & H_{4,3} & H_{5,3} & \ldots & H_{1,3} & H_{2,3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ H_{t,t} & H_{1,t} & H_{2,t} & \ldots & H_{t-2,t} & H_{t-1,t} \\ \hline H_{1,t+1} & H_{2,t+1} & H_{3,t+1} & \ldots & H_{t-1,t+1} & H_{t,t+1} \\ H_{t,t+2} & H_{t-1,t+2} & H_{t-2,t+2} & \ldots & H_{2,t+2} & H_{1,t+2} \\ H_{1,t+3} & H_{2,t+3} & H_{3,t+3} & \ldots & H_{t-1,t+3} & H_{t,t+3} \\ H_{t,t+4} & H_{t-1,t+4} & H_{t-2,t+4} & \ldots & H_{2,t+4} & H_{1,t+4} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

asst man die Resultate dieses und des vorigen Paragraphen

dass $R(tp, rq)$, worin $r$, $t$, $p$, $q$ ungerade

führbar ist. Es genügt

diejenigen Rechtecke

zahlen sind.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $a_{k+1,1}$ | $a_{1,2}$ | $a_{2k+1,3}$ | $a_{k+1,4}$ | $a_{k+1,5}$ |
| $a_{k+2,1}$ | $a_{k+1,2}$ | $a_{2k-1,3}$ | $a_{1,4}$ | $a_{k+2,5}$ |
| . . . | . . . | . . . | . . . | . . . |
| $a_{2k-2,1}$ | $a_{\frac{k-1}{2},2}$ | $a_{7,3}$ | $a_{\frac{k+5}{2},4}$ | $a_{2k-2,5}$ |
| $a_{2k-1,1}$ | $a_{\frac{k+5}{2},2}$ | $a_{5,3}$ | $a_{\frac{k-1}{2},4}$ | $a_{2k-1,5}$ |
| $a_{2k,1}$ | $a_{\frac{k+1}{2},2}$ | $a_{3,3}$ | $a_{\frac{k+3}{2},4}$ | $a_{2k,5}$ |
| $a_{2k+1,1}$ | $a_{\frac{k+3}{2},2}$ | $a_{1,3}$ | $a_{\frac{k+1}{2},4}$ | $a_{2k+1,5}$ |

Der erste Teil dieses Systems ist vollständig symmetrisch nac beiden Seiten von der Mitte aus gebaut, der zweite Teil ist in de äusseren Reihen ganz, in der zweiten und vierten alternirend syn metrisch.

Dass sich hieraus ebenfalls eine Speciallösung für $n = 15$, 2 35 ... ergibt, wird nach dem Vorigen nur der Erwähnung bedürfe

§. 3. Weiter ergibt sich, dass auch die Formen

$$R(n, (2n-1)n), \quad R(n, (3n-2)n), \quad \ldots \quad R(n[(k+1)n-k]n)$$

sich auf $Q(n)$ reduciren lassen.

Man stelle die $2n-1$ Quadrate, welche gebildet sind aus de Zahlen:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | bis | $n^2$ | mit den Verticalreihen | $a_{1,1}$ | $a_{1,2}$ | $\ldots a_{1,n}$ |
| $n^2+1$ | „ | $2n^2$ | „ „ „ | $a_{2,1}$ | $a_{2,2}$ | $\ldots a_{2,n}$ |
| . . . | . . . | . . . | . . . | . . . | . . . | . . . |
| $(2n-2)n^2+1)$ | „ | $(2n-1)n^2$ | „ „ „ | $a_{2n-1,1}$ | $a_{2n-1,2}$ | $\ldots a_{2n-1}$ |

direct unter einander, so haben die Gesammtverticalen wieder di selbe Summe. Die Anordnung der einzelnen $a$ muss also so geschehe dass auch in den Horizontalreihen die Summe der vorderen Indic gleich wird, und zwar:

$$= \frac{1}{2n-1}((n+2n+3n+\ldots(2n-1)n) = n^2$$

Das erreicht man, wie leicht ersichtlich, durch folgende, auf die Ge sammtverticalen ohne Einfluss bleibende Anordnung:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_{1,1}$ | $a_{3,2}$ | $a_{5,3}$ | . . . | $a_{2n-5,n-2}$ | $a_{2n-3,n-1}$ | $a_{2n-1,n}$ |
| $a_{2,1}$ | $a_{4,2}$ | $a_{6,3}$ | . . . | $a_{2n-4,n-2}$ | $a_{2n-2,n-1}$ | $a_{n,n}$ |
| $a_{3,1}$ | $a_{5,2}$ | $a_{7,3}$ | . . . | $a_{2n-3,n-2}$ | $a_{2n-1,n-1}$ | $a_{1,n}$ |
| $a_{4,1}$ | $a_{6,2}$ | $a_{8,3}$ | . . . | $a_{2n-2,n-2}$ | $a_{1,n-1}$ | $a_{n+1,n}$ |
| $a_{5,1}$ | $a_{7,2}$ | $a_{9,3}$ | . . . | $a_{2n-1,n-2}$ | $a_{2,n-1}$ | $a_{2,n}$ |
| $a_{6,1}$ | $a_{8,2}$ | $a_{10,3}$ | . . . | $a_{1,n-2}$ | $a_{3,n-1}$ | $a_{n+2,n}$ |
| . . . | . . . | . . . | . . . | . . . | . . . | . . . |

$$\begin{array}{llllll} a_{2n-3,1} & a_{2n-1,2} & a_{2,3} & \ldots & a_{2n-8,n-2} & a_{2n-6,n-1} & a_{n-2,n} \\ a_{2n-2,1} & a_{1,2} & a_{3,3} & \ldots & a_{2n-7,n-2} & a_{2n-5,n-1} & a_{2n-2,n} \\ a_{2n-1,1} & a_{2,2} & a_{4,3} & \ldots & a_{2n-6,n-2} & a_{2n-4,n-1} & a_{n-1,n}, \end{array}$$

welche direct $R(n,(2n-1)n)$ ergibt. Die Richtigkeit der Anorduung ergibt sich leicht dadurch, dass die erste Reihe genügt, und in den folgenden gegen die vorhergehende entweder $n-1$ vordere Indices um 1 zunehmen, während einer um $n-1$ abnimmt, oder $n-2$ vordere Indices um 1 wachsen, einer um $n$ wächst und einer um $2n-2$ abnimmt. In beiden Fällen wird die Summe der vorderen Indices nicht geändert. Zur Bestimmung von $R(n,(3n-2)n)$ hat man den obigen $(2n-1)$ Quadraten noch diejenigen $n-1$ zuzufügen, welche gebildet sind aus den Zahlen:

$(2n-1)n^2+1$ bis $2n.n^2$ mit den Verticalreihen $a_{2n,1} \quad a_{2n,2} \ldots a_{2n,n}$
$2n.n^2+1$ „ $(2n+1)n^2$ „ „ „ $a_{2n+1,1} \quad a_{2n+1,2} \ldots a_{2n+1,n}$
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
$(3n-3)n^2+1)$ „ $(3n-2)n^2$ „ „ „ $a_{3n-2,1} \quad a_{3n-2,2} \ldots a_{3n-2,n}$

Dies System mit dem obigen zusammengestellt, gibt wieder dieselbe Summe der Gesammtverticalen. Als Summe der einzelnen Horizontalreihen findet man analog wie oben:

$$\frac{1}{3n-2}(n+2n+3n+\ldots\ (3n-2)n) = \frac{n(3n-1)}{2},$$

welche leicht durch folgende, der obigen analoge Umstellung der Grössen $a$ zu erreichen ist:

$$\begin{array}{lllllll} a_{1,1} & a_{4,2} & a_{7,3} & \ldots & a_{3n-8,n-2} & a_{3n-5,n-1} & a_{3n-2,n} \\ a_{2,1} & a_{5,2} & a_{8,3} & \ldots & a_{3n-7,n-2} & a_{3n-4,n-1} & a_{2n-1,n} \\ a_{3,1} & a_{6,2} & a_{9,3} & \ldots & a_{3n-6,n-2} & a_{3n-3,n-1} & a_{n,n} \\ a_{4,1} & a_{7,2} & a_{10,3} & \ldots & a_{3n-5,n-2} & a_{3n-2,n-1} & a_{1,n} \\ a_{5,1} & a_{8,2} & a_{11,3} & \ldots & a_{3n-4,n-2} & a_{1,n-1} & a_{2n,n} \\ a_{6,1} & a_{9,2} & a_{12,3} & \ldots & a_{3n-3,n-2} & a_{2,n-1} & a_{n+1,n} \\ a_{7,1} & a_{10,2} & a_{13,3} & \ldots & a_{3n-2,n-2} & a_{3,n-1} & a_{2,n} \\ a_{8,1} & a_{11,2} & a_{14,3} & \ldots & a_{1,n-2} & a_{4,n-1} & a_{2n+1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{3n-3,1} & a_{2,2} & a_{5,3} & \ldots & a_{3n-10,n-2} & a_{3n-7,n-1} & a_{2n-2,n} \\ a_{3n-2,1} & a_{3,2} & a_{6,3} & \ldots & a_{3n-9,n-2} & a_{3n-6,n-1} & a_{n-1,n}. \end{array}$$

In ähnlicher Weise lassen sich die übrigen hierher gehörigen Rechtecke ableiten.

§. 4. Endlich ist auch die Aufstellung von $R(mp,np)$, worin ausser $p$ auch $n$ und $m$ beliebige von 1 verschiedene positive ungerade Zahlen sind, auf die Lösung eines Quadrates zurückzuführen.

Sei zunächst $n > m$, so bilde man, von $Q(p)$ ausgehend, nach §. 2. das Rechteck

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $R(p, mp)$ | aus den Zahlen | | | $1$ | bis | $mp^2$ |
| und analog die Rechtecke | „ | „ | „ | $mp^2+1$ | „ | $2mp^2$ |
| | „ | „ | „ | $2mp^2+1$ | „ | $3mp^2$ |
| . . . . . | . . . | . . . | . . . | . . . . | . . . | . . . |
| | „ | „ | „ | $(n-1)mp^2+1$ | „ | $nmp^2$. |

Jedes dieser Rechtecke hat dann $p$ Verticalreihen und $mp$ Horizontalreihen, lässt sich aber dadurch, dass man je $p$ Horizontalreihen zusammenfasst, in $m$ Bestandteile von Quadratform zerlegen, welche für dasselbe Rechteck unter sich gleiche Horizontalsumme und gleiche Verticalsumme haben. Bezeichnet man diese Teilquadrate

| | | | |
|---|---|---|---|
| des ersten Rechteckes mit | $Q_{1,1}$ | $Q_{1,2}$ . . . | $Q_{1,m}$ |
| „ zweiten „ „ | $Q_{2,1}$ | $Q_{2,2}$ . . . | $Q_{2,m}$ |
| . . . . . . . . . | . . . | . . . | . . . |
| „ $n$ten „ „ | $Q_{n,1}$ | $Q_{n,2}$ . . . | $Q_{n,m}$ |

so ist ersichtlich, dass in dieser Anordnung alle Verticalen sofort gleichsummig sind, die Horizontalsummen aber noch den Verticalsummen der betreffenden Rechtecke entsprechen. Doch auch diese Verschiedenheit wird offenbar durch Anwendung der in §. 2. gegebenen Anordnung beseitigt. Für $n < m$ hat man nur $n$ und $m$ in der Ausführung zu vertauschen, während für $n = m$ das Rechteck in ein Quadrat übergeht.

Es ist somit nachgewiesen, dass ein magisches Rechteck, dessen Argumente nicht relativ prim zu einander sind, immer auf dasjenige magische Quadrat zurückgeführt werden kann, dessen Grundzahl der grösste gemeinschaftliche Factor der beiden Argumente des Rechteckes ist.

---

§. 5. Sei ferner $R(p,q)$, worin $p$ und $q$ beliebige von einander verschiedene ungerade Primzahlen sind, auf irgend einem Wege gefunden worden, und enthalte dieses Rechteck die Verticalreihen:

$$V_{1,1} \quad V_{1,2} \quad \ldots \quad V_{1,p}.$$

Bezeichnet man dann entsprechend mit:

$$\begin{array}{llll} V_{2,1} & V_{2,2} & \ldots & V_{2,p} \\ V_{3,1} & V_{3,2} & \ldots & V_{3,p} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ V_{r,1} & V_{r,2} & \ldots & V_{r,p} \quad r = 2k+1 \end{array}$$

die Verticalreihen der analogen Rechtecke aus den Zahlen:

$$\begin{array}{rcl} p.q+1 & \text{bis} & 2p.q \\ 2p.q+1 & „ & 3p.q \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ (r-1)p.q+1 & „ & r.p.q, \end{array}$$

so ergibt die Anordnung:

$$\begin{array}{llll} V_{1,1} & V_{1,2} & \ldots & V_{1,p} \\ V_{2,1} & V_{2,2} & \ldots & V_{2,p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ V_{r,1} & V_{r,2} & \ldots & V_{r,p} \end{array}$$

direct gleiche Verticalsummen, während die Horizontalsnmmen zwar ungleich sind, aber nnter sich dnrch das in §. 2. gelebrte Verfahren ausgeglichen werden. Mithin ist $R(p, rq)$ aus $R(p,q)$ abzuleiten.

§. 6. Bezeichnet man ferner die Horizontalreihen des auf irgend einem Wege gefundenen Rechteckes $R(p,q)$ mit

$$H_{1,1} \quad H_{1,2} \quad \ldots \quad H_{1,q},$$

und die Horizontalreihen der Rechtecke aus den Zahlen:

$$\begin{array}{lllllll} pq+1 & \text{bis } 2pq & \text{mit} & H_{2,1} & H_{2,2} & \ldots & H_{2,q} \\ 2pq+1 & \text{„} \quad 3pq & \text{„} & H_{3,1} & H_{3,2} & \ldots & H_{3,q} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (t-1)pq+1 & \text{„} \quad tpq & \text{„} & H_{t,1} & H_{t,2} & \ldots & H_{t,q} \quad t = 2k'+1 \end{array}$$

so stelle man das Schema:

$$\begin{array}{llll} H_{1,1} & H_{2,1} & \ldots & H_{t,1} \\ H_{1,2} & H_{2,2} & \ldots & H_{t,2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ H_{1,q} & H_{2,q} & \ldots & H_{t,q} \end{array}$$

auf und ordne dasselbe nach §. 2. und 4. so, dass die Gesammthorizontalreihen dieselbeu bleiben, die Verticalen sich aber so ergänzen, dass die Summe der vorderen Indices durchweg gleich ist.

Danach ist auch $R(tp,q)$ aus $R(p,q)$ abzuleiten.

Für den Fall, dass $q > t$, empfiehlt sich eine Anordnuug, welche von dem System der $H$ einen quadratischen Teil absondert und die übrigen Reihen je zwei nnd zwei sich ergänzen lässt. Diese ist:

$$\begin{array}{llllll} H_{1,1} & H_{2,1} & H_{3,1} & \ldots & H_{t-1,1} & H_{t,1} \\ H_{2,2} & H_{3,2} & H_{4,2} & \ldots & H_{t,2} & H_{1,2} \\ H_{3,3} & H_{4,3} & H_{5,3} & \ldots & H_{1,3} & H_{2,3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ H_{t,t} & H_{1,t} & H_{2,t} & \ldots & H_{t-2,t} & H_{t-1,t} \\ \hline H_{1,t+1} & H_{2,t+1} & H_{3,t+1} & \ldots & H_{t-1,t+1} & H_{t,t+1} \\ H_{t,t+2} & H_{t-1,t+2} & H_{t-2,t+2} & \ldots & H_{2,t+2} & H_{1,t+2} \\ H_{1,t+3} & H_{2,t+3} & H_{3,t+3} & \ldots & H_{t-1,t+3} & H_{t,t+3} \\ H_{t,t+4} & H_{t-1,t+4} & H_{t-2,t+4} & \ldots & H_{2,t+4} & H_{1,t+4} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

Fasst man die Resnltate dieses nnd des vorigen Paragraphen zusammen, so findet man, dass $R(tp, rq)$, worin $r$, $t$, $p$, $q$ ungerade Zahlen sind, allgemein auf $R(p,q)$ zurückführbar ist. Es genügt demnach, den Nachweis zu führen, dass alle diejeuigen Rechtecke sich darstellen lassen, deren Argnmente absolnte Primzahlen sind.

§. 7. Geht man von dem kleinstmöglichen Rechtecke $R(3,5)$ aus, so findet man eine einfache Lösung auf folgendem Wege:

Man wende auf die natürliche Anordnung:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 4 | 5 | 6 |
| 7 | 8 | 9 |
| 10 | 11 | 12 |
| 13 | 14 | 15 |

die in §. 2. hergeleitete Umstellung an, so erhält man:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 8 | 15 |
| 4 | 11 | 9 |
| 7 | 14 | 3 |
| 10 | 2 | 12 |
| 13 | 5 | 6. |

Darin entsprechen, wie leicht ersichtlich, alle Horizontalreihen und die mittelste Verticalreihe den zu stellenden Anforderungen; die erste Verticalreihe hat in Folge der Anordnung eine um 5, resp. im allgemeinen Falle ($R(3,q)$) eine um $q$ zu kleine, die letzte eine um ebensoviel zu grosse Summe.

Bezeichnet man nun mit $\Delta(5)$ die Zahlenreihe, welche angibt, um wieviel die einzelnen Glieder der dritten Verticalreihe grösser sind als die entsprechenden der ersten, so findet man:

$$\Delta(5) = 14,\ 5,\ -4;\ \ 2,\ -7.$$

Also ist durch Vertauschung der betreffenden Glieder 4 und 9 in der zweiten Horizontalreihe der gewünschte Ausgleich zu bewerkstelligen. Demnach erhält man:

$$R(3,5) = \left|\begin{array}{rrr} 1 & 8 & 15 \\ 9 & 11 & 4 \\ 7 & 14 & 3 \\ 10 & 2 & 12 \\ 13 & 5 & 6 \end{array}\right|$$

Ebenso findet man für $R(3,7)$ u. s. w. bei analoger Aufstellung der Differenzenreihen $\Delta(7)$ u. s. w. den erforderlichen Ausgleich, wenn die durch die folgenden Identitäten angedeuteten Gliederpaare der ersten und dritten Verticalreihe mit einander vertauscht werden. Es ist für

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\Delta(7)$ | ein Ausgleich | | $7 = 5+2$ |
| $\Delta(9)$ | " | " | 9 nicht darstellbar |
| $\Delta(11)$ | " | " | $11 = 11$ |
| $\Delta(13)$ | " | " | $13 = 11+2$ |
| $\Delta(15)$ | " | " | $15 = 17-1-1$ |
| $\Delta(17)$ | " | " | $17 = 23+11-4-13$ |
| $\Delta(19)$ | " | " | $19 = 14+5$ |

$\Delta(21)$ ein Ausgleich $21 = 26-19+17-10+8-1$

$\Delta(23)$ „ „ $23 = 23$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

wobei zu bemerken ist, dass der Ausgleich teilweise auch durch andere Zahlencombinationen bewerkstelligt werden kann.

Man überzeugt sich leicht, dass nur drei verschiedene Differenzreihen auftreten, welche den Fällen

$$q \equiv 1,\ \ 3,\ \ 5,\ \ \text{mod. } 6$$

entsprechen und nach beiden Seiten an Gliederzahl wachsen. Jede vollständige Differenzreihe besteht aus zwei Teilen, von denen der erste, dem oberen Teile des Rechteckes entsprechende ein Glied mehr als der zweite enthält. Für $q \equiv 3$, mod. 6 sind die Glieder beider Reihen teilweise identisch. Das erste Glied der oberen Reihe wächst um 6, das erste der unteren um 3, sobald $q$ um 2 wächst. Die constante Differenz je zweier auf einander folgender Glieder ist in beiden Teilen 9. Es ist demnach

$$\Delta(a) \text{ conform mit } \Delta(b),$$
$$\text{sobald } a \equiv b, \text{ mod. } 6 \text{ ist.}$$

Ferner braucht nur die Darstellbarkeit von 9 auf einander folgenden ungeraden Zahlen nachgewiesen werden, weil die zehnte der ersten mod. 18 congruent ist. Also ist bei der um 18 vergrösserten Zahl nur statt der grössten positiven, welche aus der Differenzreihe für den Ausgleich verwendet worden ist, die um 18 grössere aus derselben Reihe einzusetzen. Da nun

$$23 \equiv 5, \text{ mod. } 18,$$

und ausserdem für $q = 27$ auch der Ausgleich:

$$27 = 35+44-46+26-28+17-19+8-10$$

und folglich auch der Ausgleich für

$$q = 45,\ \ 63,\ \ 81,\ \ 99\ \ \ldots$$

darzustellen ist, so ergibt sich das Resultat:

Es ist $R(3, q)$ für jedes ungerade $q$ mit Ausnahme des Falles $q = 9$ auf diesem Wege darstellbar. Aber $R(3, 9)$ ist auf anderem Wege hergeleitet worden.

§. 8. Wenn man eine ähnliche Lösung für $R(5, n)$ aufstellen will, so gehe man für $R(5, 7)$ wieder von der Anordnung

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & . & . \\ . & . & . & . & .\,.\,35 \end{matrix}$$

aus. In dieser hat, wenn man, wie künftig allgemein, mit $V_\alpha$ die $\alpha$te Verticalreihe bezeichnet, $V_3$ sofort die verlangte Summe,

$V_2$ und $V_4$ eine um 7, resp. allgemein um $q$,

$V_1$ „ $V_5$ „ „ 14 „ „ „ $2q$ abweichende Summe;

die erste ist jedesmal um die betreffende Zahl zu klein, die zweite zu gross. Ordnet man nun die drei inneren Reihen wie im vorigen Paragraphen, lässt $V_1$ unverändert und schreibt $V_5$ in entgegengesetzter Richtung, so erhält man wieder, wie leicht nachzuweisen, ein Schema, in dem alle Horizontalreihen und die mittlere Verticale genügen, nämlich:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 18 | 34 | 35 |
| 6 | 7 | 23 | 24 | 30 |
| 11 | 12 | 28 | 14 | 25 |
| 16 | 17 | 33 | 4 | 20 |
| 21 | 22 | 3 | 29 | 15 |
| 26 | 27 | 8 | 19 | 10 |
| 31 | 32 | 13 | 9 | 5. |

Sei nun wieder $\Delta(7)$ die Zahlenreihe $(V_4) - (V_2)$, welche entsteht, wenn jedes Glied in $V_4$ um das entsprechende in $V_2$ vermindert wird, und $\Delta'(7)$ die in demselben Sinne aus $V_1$ und $V_5$ gebildete Reihe $(V_5) - (V_1)$, so ist

$$\Delta(7) = 32,\ 17,\ 2,\ -13;\quad 7,\ -8,\ -23$$
$$\Delta'(7) = 34,\ 24,\ 14,\ 4,\ -6,\ -16,\ -26.$$

Da die betreffenden Ausgleichnngszahlen 7 resp. 14 direct in diesen Reihen stehen, so hat man durch Vertauschung der zu diesen Zahlen gehörigen Gliederpaare sofort:

$$R(5,7) = \left|\begin{array}{rrrrr} 1 & 2 & 18 & 34 & 35 \\ 6 & 7 & 23 & 24 & 30 \\ 25 & 12 & 28 & 14 & 11 \\ 16 & 17 & 33 & 4 & 20 \\ 21 & 29 & 3 & 22 & 15 \\ 26 & 27 & 8 & 19 & 10 \\ 31 & 32 & 13 & 9 & 5 \end{array}\right|$$

Nun sieht man aber leicht, dass $\Delta'(q)$ für jedes folgende Argument dieselben Zahlenwerte behält und sich nur dadurch ändert, dass jedesmal, so bald $q$ um 2 gewachsen ist, beiderseits ein Glied angesetzt wird. Man findet deshalb sehr leicht die Ausgleichzahlen. Es ist für

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\Delta'(7)$ | ein Ausgleich | $2.7$ | $= 14$ |
| $\Delta'(9)$ | „ „ | $2.9$ | $= 14 + 4$ |
| $\Delta'(11)$ | „ „ | $2.11$ | $= 24 + 4 - 6$ |
| $\Delta'(13)$ | „ „ | $2.13$ | $= 24 + 14 + 4 - 16$ |
| $\Delta'(15)$ | „ „ | $2.15$ | $= 34 + 14 + 4 - 6 - 16$ |

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$\Delta'(17)$ und folgende erhalten ihren Ausgleich dadurch, dass sich diese Periode wiederholt mit der Aenderung, dass die grösste verwendete positive Zahl um 20, von $\Delta'(27)$ an um 40 u. s. w. vergrössert wird. Es ist demnach nur auf den Ausgleich in $\Delta(q)$ zu achten.

Man findet für $\Delta(q)$ wieder 3 Perioden, welche den Formen

$$q \equiv 1,\ 3,\ 5, \text{ mod. } 6$$

entsprechen. Das Anfangsglied wächst im ersten Teile von $\Delta$ jedesmal um 10, im zweiten um 5, constante Gliederdifferenz in beiden Teilen ist 15; demnach ist $\Delta(a)$ conform mit $\Delta(b)$, wenn $a \equiv b$ mod. 6 ist.

Die Periode der Darstellbarkeit hat 15 Glieder, entsprechend den Formen

$$q \equiv 1,\ 3,\ 5,\ \ldots\ 27,\ 29, \text{ mod. } 30.$$

Nun ist für $\Delta(7)$ ein Ausgleich $7 = 7$
$\Delta(9)$ „ „ $9 = 27 - 18$
$\Delta(11)$ „ „ $11 = 17 + 7 - 13$
$\Delta(13)$ „ „ $13 = 17 + 7 + 2 - 13$
$\Delta(15)$ „ „ $15 = 27 + 27 - 18 - 18 - 3$
$\Delta(17)$ „ „ $17 = 17$
$\Delta(19)$ „ „ $19 = 17 + 2$
$\Delta(21)$ „ „ $21 = 27 - 3 - 3$
$\Delta(23)$ „ „ $23 = 37 + 7 - 8 - 13$
$\Delta(25)$ „ „ $25 = 37 + 17 + 2 - 8 - 23$
$\Delta(27)$ „ „ $27 = 27$
$\Delta(29)$ „ „ $29 = 22 + 7$
$\Delta(31)$ „ „ $31 = 32 + 7 - 8$
$\Delta(33)$ „ „ $33 = 27 + 12 - 3 - 3$
$\Delta(35)$ „ „ $35 = 22 + 17 + 7 + 2 - 13$
$\Delta(37)$ „ „ $37 \equiv 7$, mod. 30.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Weiterhin ist also die jedesmalige grösste positive Zahl rechts um 30 zu erhöhen, um einen um 30 grösseren Ausgleich zu geben. Danach ist $R(5,q)$ auf diesem Wege für jedes ungerade $q \geq 7$ darstellbar.

§. 9. Will man $R(7,q)$ darstellen und ordnet die Zahlen dem entsprechend:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| . | . | . | . | . | . | . |

so lassen sich die drei mittelsten Verticalen ebenso wie früher behandeln. Man findet, der Analogie gemäss, eine Ausgleichungsperiode für 21 auf einander folgende ungerade Zahlen, von denen jedoch einige zusammengesetzte von der Form $6k+3$ nicht darstellbar sind. Wenn man die Reihen für $\Delta(9)$, $\Delta(11)$ u. s. w. aufstellt, findet man als einen Ausgleich:

für $\Delta(9)$ ist 9 nicht darstellbar
$\Delta(11)$ „ $11 = 9 + 2$
$\Delta(13)$ „ $13 = 9 + 23 - 19$

für $\Delta(15)$ ist 15 nicht darstellbar
$\Delta(17)$ „ $17 = 9+23-19+44-40$
$\Delta(19)$ „ $19 = 9+23-19+44-40+2$
$\Delta(21)$ „ 21 nicht darstellbar
$\Delta(23)$ „ $23 = 23$
$\Delta(25)$ „ $25 = 23+2$
$\Delta(27)$ „ $27 = 37-5-5$
$\Delta(29)$ „ $29 = 23+2+44-40$
$\Delta(31)$ „ $31 = 23+44-40+65-61$
$\Delta(33)$ „ $33 = 16-5+37-26+58-47$
$\Delta(35)$ „ $35 = 23+44-40+65-61+86-82$
$\Delta(37)$ „ $37 = 23+44-40+65-61+86-82+2$
$\Delta(39)$ „ $39 = 16-5+37-26+58-47+79-68-5$
$\Delta(41)$ „ $41 = 30+9+2$
$\Delta(43)$ „ $43 = 30+9+23-19$
$\Delta(45)$ „ $45 = 100-5+16+37+58+79+100$
$-26-47-68-89-110$
$\Delta(47)$ „ $47 = 30+9+23-19+44-40$
$\Delta(49)$ „ $49 = 30+9+23-19+44-40+2$
$\Delta(51)$ „ $51 = 121+16+37+58+79+100+121+142$
$-26-47-68-89-110-131-152$
$\Delta(53)$ „ $53 \equiv 11$, mod. 42,

also die Periode erschöpft. Von hier ab ist für je 21 auf einander folgenden Argumente statt der grössten positiven Zahl die um 42 grössere zu setzen. Behandelt man die vier restirenden Verticalreihen so, dass $V_1$ und $V_2$ unverändert bleiben, $V_6$ und $V_7$ dagegen in entgegengesetzter Ordnung geschrieben werden, so würde sowohl $(V_7) - (V_1)$, als auch $(V_6) - (V_2)$ eine Differenzenreihe ergeben, welche nur gerade Zahlen enthielte. Dann würde die aus $(V_7) - (V_1)$ gebildete Differenzenreihe den für sie erforderlichen Ausgleich $3q$ nicht zulassen. Durch eine einfache Umstellung von nur 4 Gliedern lassen sich aber in jede der beiden Differenzenreihen zwei ungerade Zahlen hinein bringen, welche in der inneren Reihe für die Darstellung von $2q$ nicht hinderlich sind, dagegen in der äusseren den Ausgleich $3q$ ermöglichen.

So kann man z. B. für $R(7, 11)$, da $R(7, 9)$ nach dem Vorigen unmöglich wird und auf anderem Wege als $R(9, 7)$ darzustellen ist, in der dritten und vierten Horizontalreihe für die betreffenden Verticalreihen die Zahlen:

22 23 . . . 55 56
29 30 . . . 48 49

durch einfache Umstellung in $V_2$ und $V_7$ umformen in:

22 30 . . . 55 49
29 23 . . . 48 56

wodurch weder die Verticalen, noch die Horizontalen in ihrer Summe beeinträchtigt werden.

Man erhält dann nach dieser Umformung als innere ($\Delta_i$) und äussere ($\Delta_a$) Reihe von Differenzen für $R(7, 11)$:

$\Delta_i$ = 74, 60, 46, 25(32), 25(18), 4, —10, —24, —38, —52, —66.
$\Delta_a$ = 76, 62, 48 27(34), 27(20), 6, —8, —22, —36, —50, —64.

Die ursprünglichen Werte der beiden veränderten Zahlen sind eingeklammert dazu gesetzt worden. Beachtet man aber weiter, dass, sobald $q$ um 2 wächst, $\Delta_i$ und $\Delta_a$ in ihrer ursprünglichen Form sich nur dadurch ändern, dass beiderseits ein Glied angesetzt wird, so überzeugt man sich leicht, dass es stets möglich ist, diejenigen Reihen für die Vertauschung zu bestimmen, welche die ungeraden Glieder 27 resp. 25 für die Differenzenreihen ergeben. Demnach ist zu fragen: Lässt sich aus den obigen Reihen $\Delta_i$ resp. $\Delta_a$ der Ausgleich $2q$ resp. $3q$ allgemein darstellen?

Man findet nun für

$\Delta_i(11)$ den Ausgleich 22 = 46—24
$\Delta_i(13)$ „ „ 26 = 46—24+4
$\Delta_i(15)$ „ „ 30 = 46—24+60—52
$\Delta_i(17)$ „ „ 34 = 46—24+60—52+4
$\Delta_i(19)$ „ „ 38 = 46—24+60—52+74—66
$\Delta_i(21)$ „ „ 42 = 46—24+60—52+74—66+4
$\Delta_i(23)$ „ „ 46 = 46
$\Delta_i(25)$ „ „ 50 = 74—24,

aber da 50 ≡ 22, mod. 28 ist, so ist mit diesem Gliede bereits die neue Periode begonnen. Für je 7 auf einander folgende Argumente ist nun der Ausgleich dadurch zu bestimmen, dass die jedesmal grösste positive verwendete Zahl durch die um 28 grössere ersetzt wird.

Dagegen hat man für:

$\Delta_a(11)$ den Ausgleich 33 = 27+6
$\Delta_a(13)$ „ „ 39 = 27+48—36
$\Delta_a(15)$ „ „ 45 = 27+48—36+6
$\Delta_a(17)$ „ „ 51 = 27+48—36+62—50
$\Delta_a(19)$ „ „ 57 = 27+48—36+62—50+6
$\Delta_a(21)$ „ „ 63 = 27+48—36+62—50+76—64
$\Delta_a(23)$ „ „ 69 = 27+48—36+62—50+76—64+6
$\Delta_a(25)$ „ „ 75 = 27+48,

also, da 75 ≡ 33, mod. 42 ist, auch hier eine siebenstellige Periode.

Für je 7 auf einander folgende Argumente ist nun die grösste positive Zahl, welche verwendet worden ist, durch die um 42 grössere zu ersetzen. Danach ist auch $R(7, q)$ allgemein darstellbar, wenn $q$

nicht die Form $6k+3$ hat. Aber da diese Form keine Primzahlen enthält, ist die Lösung eine allgemeine.

§. 10. Nun wäre zu fragen, wie weit dieses Verfahren unter entsprechenden Modificationen eine allgemeine Behandlung zulässt. Es würden demnach die Differenzenreihen in allgemeinen Zahlen zu bestimmen sein. Man gehe von den mittelsten drei Verticalen des für $R(2m+1, 2n+1)$ zu Grunde liegenden Systems

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $1$ | $2$ | $3$ | $\ldots 2m$ | $2m+1$ |
| $2m+2$ | $2m+3$ | $2m+4$ | $\ldots 4m+1$ | $4m+2$ |
| $4m+3$ | $4m+4$ | $4m+5$ | $\ldots 6m+2$ | $6m+3$ |
| ... | ... | ... | ... | ... |

aus und sondere $V_m$ und $V_{m+2}$ ab, da $V_{m+1}$ ohne Weiteres die verlangte Summe gibt und nur nach Massgabe von §. 2. umgestellt zu werden braucht. Nun hat man

| $V_m$ | $V_{m+2}$ |
|---|---|
| $m$ | $m+2$ |
| $3m+1$ | $3m+3$ |
| $5m+2$ | $5m+4$ |
| $7m+3$ | $7m+5$ |
| ... | ... |
| $(4n-1)m+2n-1$ | $(4n-1)m+2n+1$ |
| $(4n+1)m+2n$ | $(4n+1)m+2n+2$ |

Nach erfolgter Umstellung hat man dagegen:

| $V_m$ | $V_{m+2}$ |
|---|---|
| $m$ | $(4n+1)m+2n+2$ |
| $3m+1$ | $(4n-3)m+2n$ |
| $5m+2$ | $(4n-7)m+2n-2$ |
| ... | ... |
| $(2n-1)m+n-1$ | $5n+4$ |
| $(2n+1)m+n$ | $m+2$ |
| $(2n+3)m+n+1$ | $(4n-1)m+2n+1$ |
| $(2n+5)m+n+2$ | $(4n-5)m+2n-1$ |
| $(2n+7)m+n+3$ | $(4n-9)m+2n-3$ |
| ... | ... |
| $(4n-1)m+2n-1$ | $7m+5$ |
| $(4n+1)m+2n$ | $3m+3$ |

worin durch den wagrechten Strich die beiden Teile der Differenzenreihe $\varDelta$ angedeutet worden sind. Bezeichnet man dieselben mit $\varDelta_1$ und $\varDelta_2$, so hat man:

| | |
|---|---|
| $\varDelta_1 = 4nm+2n+2$ | $\varDelta_2 = (2n-4)m+n$ |
| $(4n-6)m+2n-1$ | $(2n-10)m+n-3$ |
| $(4n-12)m+2n-4$ | $(2n-16)m+n-6$ |
| ... | ... |

$$-(2n-12)m-n+8 \qquad -(4n-8)m-2n+6$$
$$-(2n-6)m-n+5 \qquad -(4n-2)m-2n+3$$
$$-2nm-n+2.$$

Die constante Gliederdifferenz in beiden Teilen ist $6m+3=3(2m+1)$. $\Delta_1$ hat $n+1$, $\Delta_2$ hat $n$ Glieder. Die zu beantwortende Frago lautet nun: Wann lässt sich ans den in $\Delta_1$ und $\Delta_2$ genannten Gliedern durch einfache Addition der Wert $2n+1$ darstellen?

Zunächst ist sofort ersichtlich, dass alle Glieder von $\Delta_1$ nnter sich und alle Glieder von $\Delta_2$ unter sich congruent nach dem Modul $6m+3$ sind. Bestimmt man die kleinsten Reste, so findet man:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{für} & \left.\begin{array}{r} n \equiv 0 \text{ mod. } 3 \\ 2n+1 \equiv 1 \text{ mod. } 6 \end{array}\right\} \text{ist} \left\{\begin{array}{l} \Delta_1 \equiv 2 \\ \Delta_2 \equiv 2m+3 \end{array}\right. \\ \text{also} & \\ \text{für} & \left.\begin{array}{r} n \equiv 1 \text{ mod. } 3 \\ 2n+1 \equiv 3 \text{ mod. } 6 \end{array}\right\} \text{ist} \left\{\begin{array}{l} \Delta_2 \equiv 4m+4 \\ \Delta_2 \equiv 4m+4 \end{array}\right. \\ \text{also} & \\ \text{für} & \left.\begin{array}{r} n \equiv 2 \text{ mod. } 3 \\ 2n+1 \equiv 5 \text{ mod. } 6 \end{array}\right\} \text{ist} \left\{\begin{array}{l} \Delta_1 \equiv 2m+3 \\ \Delta_7 \equiv 2 \end{array}\right. \\ \text{also} & \end{array}\right\} \text{mod. } 6m+3.$$

Für $2n+1 \equiv 3$ mod. 6 ist also $\Delta_1$ mit $\Delta_2$ teilweise übereinstimmend. Für die drei anftretenden Reste gilt übrigens noch

$$4m+4 \equiv 2m+3 \equiv 2, \text{ mod. } 2m+1,$$

d. h. alle in diesen Differenzenreihen auftretenden Glieder lassen, durch das erste Argument dividirt, den Rest 2.

Für die weitere Behandlung hat man, von diesen kleinsten Resten ausgehend, $\Delta_1$ und $\Delta_2$ in der Form aufzustellen, welche $n$ nicht mehr enthält. Lässt man den Fall $n \equiv 1$, mod. 3, durch welchen absolute Primzahlen nicht darstellbar sind, zunächst ansser Acht, so hat man für $\Delta_1$ resp. $\Delta_2$ die Reihen:

| (A) . . . . . . | (B) . . . . . . |
|---|---|
| $18m+11$ | $20m+12$ |
| $12m+8$ | $14m+9$ |
| $6m+5$ | $8m+6$ |
| $2$ | $2m+3$ |
| $-6m-1$ | $-4m$ |
| $-12m-4$ | $-10m-3$ |
| $-18m-7$ | $-16m-6$ |
| . . . . | . . . . |

und zwar ist $\Delta_1 = $ (A) $\Delta_2 = $ (B) für $n \equiv 0$ mod. 3,
$\Delta_1 = $ (B) $\Delta_2 = $ (A) „ $n \equiv 2$ mod. 3.

Soll nun die Darstellbarkeit für $2n+1$ eine allgemeine sein, so müssen alle ungeraden Zahlen von $2m+3$ an darzustellen sein. $2m+3$ ist der kleinste Wert, weil das zweite Argument grösser sein muss, als das erste. Nnu sind direct abzulesen:

$$2m+3 \text{ und}$$
$$2m+3+2 = 2m+5$$

Ferner kann man aus der Reihe (A) jedesmal zwei Glieder, nämlich:

$$6m+5 \quad \text{und} \quad -6m-1$$
$$12m+8 \quad „ \quad -12m-4$$
$$18m+11 \quad „ \quad -18m-7$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

zur Summe 4 zusammenstellen, also sowohl von $2m+3$, als auch von $2m+5$ ausgehend, eine Zahlenreihe bilden, deren jedes Glied von einem andern nur um ein Vielfaches von 4 verschieden ist. Dass dieses Verfahren indessen begrenzt ist, geht direct daraus hervor, dass erst nach einem jedesmaligen Wachstum um 6 für $2n+1$ ein neues Paar von Gliedern in der Teilreihe (A) auftritt, während nach einem jedesmaligen Wachstum um 4 ein neues Gliederpaar verbraucht wird, die vorhandene Reihe von Gliederpaaren also nicht auf die Dauer ausreichen kann. Nun sind aber ausserdem aus (A) und (B) selbst darstellbar die Zahlen:

$$2m+5 \quad = 2m+3 \quad +2$$
$$6m+7 \quad = 6m+5 \quad +2$$
$$10m+9 \quad = 14m+9 \quad -4m$$
$$14m+11 = 14m+9 \quad +2$$
$$18m+13 = 18m+11 \quad +2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Es genügt demnach, zu zeigen, dass diese Darstellbarkeit ausreichend ist für eine Reihe von $2m+1$ auf einander folgenden Zahlen, nämlich:

$$2m+3,\ 2m+5,\ 2m+7,\ \ldots\ 6m-1,\ 6m+1,\ (6m+3).$$

Aus dieser Reihe sind zu streichen diejenigen, welche $\equiv 3$, mod. 6 sind, also auch die letzte eingeklammerte Zahl $6m+3$, weil diese Zahlen bei Anstellung der Reihen (A) und (B) ausgeschlossen werden mussten.

Stellt man nun fest, wie viel positive und wie viel negative Glieder diese Reihen in jedem einzelnen Falle haben, so findet man:

Ist $\Delta_1 = (A)$, d. h. $2n+1 \equiv 1$, mod. 6, so sind, da $\Delta_1$ $n+1$ Glieder hat,

$$\frac{2n}{3}+1 \text{ derselben positiv, } \frac{n}{3} \text{ negativ;}$$

ist dagegen $\Delta_2 = (A)$, also $2n+1 \equiv 5$, mod. 6, so sind, da $\Delta_2$ nur $n$ Glieder hat,

$$\frac{n+1}{3} \text{ derselben positiv, } \frac{2n-1}{3} \text{ negativ.}$$

Die Anzahl der Gliederpaare, welche zur Summe 4 verbunden werden können, ist im ersten Falle $\frac{n}{3}$, im zweiten $\frac{n-2}{3}$, da in diesem das positive Glied 2 in Abrechnung zu bringen ist. — Es sind also auf jeden Fall mindestens $\frac{n-2}{3}$ Gliederpaare dieser Art vorhanden. Nun ist aber, da $2m+3$ und $2m+5$ direct dargestellt sind, zur Darstellung von $2n+1 = 2m+7$, d. h. von $n = m+3$, das erste dieser Gliederpaare erforderlich. Das zweite würde für $2m+11$, das dritte für $2m+15$, ... das letzte, folglich $(m-1)$ste für $6m-1$ gebraucht werden. Man findet danach leicht die Richtigkeit der Tabelle:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| für $n = m+3$ | erforderlich | 1 | Paar, vorhanden mindestens | $\frac{m+1}{3}$ |
| „ $n = m+5$ | „ | 2 | „ „ „ | $\frac{m+3}{3}$ |
| „ $n = m+7$ | „ | 3 | „ „ „ | $\frac{m+5}{3}$ |
| „ $n = m+9$ | „ | 4 | „ „ „ | $\frac{m+7}{3}$ |
| . . . . . . | | | | |
| „ $n = 3m-1$ | „ | $m-1$ | „ „ „ | $\frac{3m-3}{3}$ |

worin die Ausdrücke

$$\frac{m+1}{3},\ \frac{m+3}{3},\ \frac{m+5}{3},\ \ldots$$

erhalten werden, wenn der jedesmalige Wert für $n$ in $\frac{n-2}{3}$ eingesetzt wird. (Auch hier wären die Zahlen zu streichen, für welche $2n+1 \equiv 3$, mod. 6 wird.) Da nun also für die Darstellung bis incl. $6m-1$ nur $m-1$ Paare gebraucht werden, und die aus obiger Tabelle für die Darstellung abzuleitende Bedingung

$$\frac{m+2k-1}{3} \geqq k$$

für $k = 1, 2, 3, \ldots m-1$ richtig ist, so ist die Darstellbarkeit soweit nachgewiesen. Die Zwischenwerte

$$n = m+4,\ m+6,\ m+8,\ \ldots\ 3m$$

werden durch Hinzusetzen des Gliedes 2 ausgeglichen. Dass die Gliederpaare nun weiterhin ausreichen, ist direct ersichtlich, da $2m+3$ durch $6m+5$ ersetzt werden kann, also dann erst bei $6m+9$ resp. $6m+11$ das erste Paar gebraucht wird, mithin der durch Verwendung von $6m+5$ herbeigeführte Ausfall eines Gliederpaares alsbald durch Hinzutreten von neuen Gliedern gedeckt wird. Mithin ist die Darstellbarkeit für diese Fälle:

$$2n+1 \equiv \pm 1, \text{ mod. } 6$$

eine allgemeine.

Für den nicht berücksichtigten, aber nach den früheren Paragraphen auch entbehrlichen Fall, in dem

$$2n+1 \equiv 3, \text{ mod. } 6, \text{ also } \Delta_1 \equiv \Delta_2 \text{ mod. } 6m+3 \text{ ist,}$$

hat man

$$\Delta_1 \equiv \Delta_2 = \ldots 16m+10,\ 10m+7,\ 4m+4,\ -2m+1,\ -8m-2, \ldots$$

welche Reihe also doppelt auftritt. Eine allgemeine Darstellbarkeit existirt in diesem Falle wahrscheinlich nicht. Für allgemeine Zahlen hat man nur

$$(4m+4)+(-2m+1) = 2m+5;$$

ausserdem kann man noch je drei Glieder zur Summe 6 zusammenstellen, so lange die vorhandenen Glieder dazu ausreichen, nämlich:

$$10m+7 \quad -2m+1-8m-2 \quad = 6$$
$$22m+13-8m-2-14m-5 = 6 \text{ u. s. w.}$$

Da dieser Fall indessen Primzahlargumente von vorn herein ausschliesst, bedarf es einer weiteren Untersuchung für denselben nicht.

§. 11. Ordnet man nun die übrigen Verticalreihen nach ihrer Zusammengehörigkeit paarweise den früheren Paragraphen entsprechend, so findet man für das zunächst liegende Verticalenpaar die Differenzenreihe:

$$\begin{array}{l} 4nm \quad +2n+4 \\ (4n-4)m \ +2n+2 \\ (4n-8)m \ +2n \\ (4n-12)m+2n-2 \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ -(4n-4)m \ -2n+6 \\ -4nm \quad -2n+4 \end{array}$$

welche nach einer einfachen Umformung sich schreiben lässt:

$$\begin{array}{r} 2n(2m+1)+4 \\ (2n-2)(2m+1)+4 \\ (2n-4)(2m+1)+4 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ -(2n-2)(2m+1)+4 \\ -2n(2m+1)+4 \end{array}$$

Um aber direct eine allgemeinere Form für alle Verticalenpaare aufzustellen, beachte man, dass in Folge der Entstehung dieser Differenzenreihen für jede folgende nur die in jedem Gliede auftretende

Constante um 2 wächst, dass also diese Zahl 4 der Reihe nach zu ersetzen ist durch

$$6,\ 8,\ 10,\ \ldots\ 2m-2,\ 2m.$$

Nimmt man aus dieser Reihe zunächst die durch 4 teilbaren Zahlen heraus, so hat man, wenn unter $\alpha$ eine ganze positive Zahl $\leqq \frac{m}{2}$ verstanden wird, die Frage:

Wann ist der Ausdruck $2\alpha(2n+1) = 4\alpha n + 2\alpha$ durch einfache Addition darstellbar aus der Reihe:

$$\begin{array}{rr} \varDelta' = & 2n(2m+1)+4\alpha \\ & (2n-2)(2m+1)+4\alpha \\ & (2n-4)(2m+1)+4\alpha \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & 2(2m+1)+4\alpha \\ & 4\alpha \\ & -2(2m+1)+4\alpha \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & -(2n-4)(2m+1)+4\alpha \\ & -(2n-2)(2m+1)+4\alpha \\ & -2n(2m+1)+4\alpha\ ? \end{array}$$

Geht man wieder von dem kleinstmöglichen Werte $n = m+1$ aus, so ist

$$2\alpha(2m+3) = 4\alpha m + 6\alpha = 2\alpha(2m+1)+4\alpha$$

welche Zahl direct aus $\varDelta'$ zu entnehmen ist. Weiter findet man

$$\begin{aligned} 2\alpha(2m+5) &= 2\alpha(2m+1)+4\alpha+4\alpha \\ 2\alpha(2m+7) &= 2\alpha(2m+1)+4\alpha+8\alpha \\ 2\alpha(2m+9) &= 2\alpha(2m+1)+4\alpha+12\alpha \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

mithin, da sich $4\alpha$, $8\alpha$, $12\alpha$, ... durch sehr einfache Combinationen aus $\varDelta'$ ablesen lassen, eine allgemeine Lösung für diese Verticalenpaare. Dass die Gliederzahl ausreichend ist, zeigt sich direct dadurch, dass, sobald $m$ um 1 wächst, ein Glied mehr gebraucht wird, während zwei neue, sich zu einem Paare ergänzende, hinzutreten.

Für die zweite Gruppe von Constanten, welche $\equiv 2$, mod. 4 sind und den Ausgleichzahlen

$$3(2n+1) \quad 5(2n+1)\ \ldots$$

entsprechen, würde man die Differenzenreihe direct erhalten, wenn in $\varDelta'$ überall statt $4\alpha$ der Wert $4\alpha+2$ eingesetzt würde. Da aber

der Ausgleich $(2\alpha+1)(2n+1)$ eine ungerade Zahl ist, so **müssen** durch eine Gliedervertauschung nach den Andeutungen von §. 9. zwei ungerade Zahlen dadurch in die Differenzenreihen hineingebracht werden, dass gleichzeitig entsprechende Glieder des vorangehenden (zunächst daran nach innen liegenden) Verticalenpaares umgeändert werden. Dass diese Glieder des vorangehenden Verticalenpaares dann von der Verwendung für den Ausgleich ausgeschlossen sind, bedarf keiner Auseinandersetzung. Welche Glieder zur Darstellung dieser ungeraden Zahlen in der Differenzenreihe zu wählen sind, wird sich in jedem Falle leicht ergeben; eine allgemeine Anweisung dafür ist wohl nicht aufzustellen. Nimmt man beispielsweise diese Aenderung in den beiden obersten Gliedern vor, so hat man die Frage:

Wann ist $(2\alpha+1)(2m+1)$ darstellbar durch einfache Addition aus der Reihe:

$$\begin{aligned}
\Delta'' = (2n-1)(2m+1)&+4\alpha+2\\
(2n-1)(2m+1)&+4\alpha+2\\
(2n-4)(2m+1)&+4\alpha+2\\
(2n-6)(2m+1)&+4\alpha+2\\
\ldots\ldots\ldots&\ldots\\
2(2m+1)&+4\alpha+2\\
&\phantom{+}4\alpha+2\\
-2(2m+1)&+4\alpha+2\\
\ldots\ldots\ldots&\ldots\\
-(2n-2)(2m+1)&+4\alpha+2\\
-2n(2m+1)&+4\alpha+2\ ?
\end{aligned}$$

Nun findet man für $n=m+1,\ m+2,\ \ldots$ der Reihe nach:

$$\begin{aligned}
(2\alpha+1)(2m+3) &= (2\alpha+1)(2m+1)+4\alpha+2\\
(2\alpha+1)(2m+5) &= (2\alpha+1)(2m+1)+4\alpha+2+1(4\alpha+2)\\
(2\alpha+1)(2m+7) &= (2\alpha+1)(2m+1)+4\alpha+2+2(4\alpha+2)\\
\ldots&\ldots
\end{aligned}$$

welche Ausdrücke sämmtlich leicht aus $\Delta''$ abzuleiten sind. Denn einmal findet man $4\alpha+2$ und jedes Vielfache davon durch leichte Zusammenstellungen, dann aber ist auch leicht die Auswahl der beiden ungeraden Glieder so zu bewerkstelligen, dass $(2\alpha+1)(2m+1)+4\alpha+2$ darin enthalten ist. Da aber für den vorigen Ausgleich dies schon verhindert worden ist, weil dort bereits das Glied $2\alpha(2m+1)+4\alpha$ für den Ausgleich verwendet wurde, so wird diese Darstellungsweise hinfällig. Stellt man dagegen die beiden ungeraden Glieder

$$(2\alpha+5)(2m+1)+4\alpha+2 \text{ und } (2\alpha+5)(2m+1)+4\alpha+2,$$

welche unverändert

$$(2\alpha+6)(2m+1)+4\alpha+2 \text{ nud } (2\alpha+4)(2m+1)+4\alpha+2$$

lanten, auf, so hat man

$$(2\alpha+5)(2m+1)+4\alpha+2 \text{ und } -4(2m+1)+4\alpha+2$$

zur Summe

$$(2\alpha+1)(2m+1)+4\alpha+2+1(4\alpha+2)$$

zu verbinden, kann also in Zusammenhang mit dem Vorigen, zwar $R(2m+1,\ 2m+3)$ nicht darstellen, wohl aber alle folgendeu $R(2m+1,\ 2m+5)$, $R(2m+1,\ 2m+7)$ u. s. w.

§. 12. Um also für die hierdurch ausgeschlossenen Rechtecke auch noch eine Lösung abzuleiten, beachte man Folgendes:

Wenn das erste Argument $\geqq 9$ ist und das zweite nicht $\equiv 3$, mod. 6, so lässt sich eine Lösung angeben, welche eine Herstellung von ungeraden Differenzen in geradzahligen Differenzenreihen entbehrlich macht.

Sei zunächst das erste Argument $2m+1$ von der Form $6k+3$, so hat man, von der natürlichen Anordnung

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3\ \ldots & m+1 & \ldots\ 2m-1 & 2m & 2m+1 \\ 2m+2 & 2m+3 & 2m+4 & 3m+2 & \ldots\ 4m & 4m+1 & 4m+2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

ausgehend, die Verticalen

$$V_m \quad V_{m+1} \quad V_{m+2}$$

zu einem Teilrechtecke nach §. 10. umzuformen, sodann genau entsprechende Teilrechtecke aus den Verticalen

$$\begin{array}{ccc} V_1 & V_2 & V_3 \\ V_4 & V_5 & V_6 \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ V_{m-3} & V_{m-2} & V_{m-1} \\ V_{m+3} & V_{m+4} & V_{m+5} \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ V_{2m-1} & V_{2m} & V_{2m+1} \end{array}$$

zu bilden und aus diesen Teilrechtecken das vollständige mit Hilfe der zweiten in §. 6. gegebenen Anordnung herzustellen.

Hat das erste Argument die Form $6k+5$, so bestimme man das erste Teilrechteck aus

$$V_m \quad V_{m+1} \quad V_{m+2}$$

ebenso, wie vorher, bilde dagegen die andern Rechtecke aus:

$$\begin{array}{ccc} V_1 & V_2 & V_3 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ V_{m-4} & V_{m-3} & V_{m-2} \\ V_{m+4} & V_{m+5} & V_{m+6} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ V_{2m-1} & V_{2m} & V_{2m+1} \end{array}$$

und combinire sie mit dem vorigen nach §. 6. Die beiden restirenden Verticalreihen $V_{m-1}$ und $V_{m+3}$ ordne man, wie früher, eine steigend, die andre fallend und bestimme ihren nun geraden Ausgleich $2(2n+1)$ nach §. 11.

Ist endlich $2m+1$ von der Form $6k+1$, so behandle man ebenso auch noch das Verticalenpaar $V_{m-5}$ und $V_{m+7}$, dessen Ausgleich dann ebenfalls gerade, nämlich $6(2n+1)$ ist; und combinire ausser

$$V_m \quad V_{m+1} \quad V_{m+2}$$

zu Teilrechtecken successive die Verticalen:

$$\begin{array}{ccc} V_1 & V_2 & V_3 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ V_{m-8} & V_{m-7} & V_{m-6} \\ V_{m-4} & V_{m-3} & V_{m-2} \\ V_{m+4} & V_{m+5} & V_{m+6} \\ V_{m+8} & V_{m+9} & V_{m+10} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ V_{2m-1} & V_{2m} & V_{2m+1} \end{array}$$

Die Richtigkeit dieses Verfahrens ergibt sich leicht aus §. 6. Da diese Lösung nur gerade Ausgleichungen verlangt, ist auch $R(2m+1,\ 2m+3)$ durch dieselbe darstellbar.

Es ist demnach die Darstellbarkeit von $R(p, q)$ für zwei beliebige ungerade Argumente nachgewiesen.

---

§. 13. Geht man von einer natürlichen Verticalenanordnung der zu behandelnden Zahlen aus, so lässt sich ebenfalls eine ziemlich allgemeine Darstellung der Rechtecke ableiten.

Für $R(3, 5)$ hätte man zunächst die Anordnung:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 6 | 11 |
| 2 | 7 | 12 |
| 3 | 8 | 13 |
| 4 | 9 | 14 |
| 5 | 10 | 15 |

welche, nach §. 2. transfermirt, übergeht in:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 8 | 15 |
| 2 | 9 | 13 |
| 3 | 10 | 11 |
| 4 | 6 | 14 |
| 5 | 7 | 12 |

Darin haben, wie leicht zu begründen ist, ebenso wie früher, alle Horizontalreihen und die mittelste Verticalreihe sofort die verlangte Summe, während $V_1$ eine um $5^2 = 25$, resp. für den allgemeinen Fall $R(3, q)$ eine nm $q^2$ zu kleine, $V_3$ dagegen eine um ebenseviel zu gresse Snmme hat.

Stellt man wieder die Differenzenreihe $(V_3) - (V_1)$ auf, und bezeichnet dieselbe mit $\Delta$, se findet man

$$\Delta(5) = 14,\ 11,\ 8;\ 10,\ 7,$$

mithin, da $25 = 14 + 11 = 8 + 10 + 7$ ist, erhält man sehr leicht zwei Rechtecklösungen durch Vertauscbung der Glieder in $V_3$ und $V_1$, welche diesen Differenzgliedern entsprechen. Es ist alse:

$$R(3,5) = \begin{vmatrix} 15 & 8 & 1 \\ 13 & 9 & 2 \\ 3 & 10 & 11 \\ 4 & 6 & 14 \\ 5 & 7 & 12 \end{vmatrix}$$

während die andere Lösung sich aus dieser einfach durch Vertauschung von $V_1$ und $V_3$ ergibt.

Für $R(3, 7)$ hätte man ebenso:

$$\Delta(7) = 20,\ 17,\ 14,\ 11;\ \ 15,\ 12,\ 9$$

während der Ausgleich durch Berücksichtigung der Identitäten

$$\begin{aligned} 7^2 = 49 &= 20 + 17 + 12 = 20 + 14 + 15 \\ &= 14 + 11 + 15 + 9 = 17 + 11 + 12 + 9 \end{aligned}$$

gefunden wird. Man findet demnach vier Lösungen, deren zwei und zwei identisch sind.

Es würde nun zu fragen sein, ob auf analegem Wege eine allgemeine Lösnng für $R(3, q)$, ($q$ ungerade und $> 3$ verausgesetzt) aufzufinden ist. Ordnet man also $V_1$ und $V_3$, se wie sie in der allgemeinen Lösung stehen müssen, und setzt gleichzeitig $q = 2n + 1$, so findet man folgende Reihen mit nebenstehender Differenz:

| $V_1$ | $V_3$ | $(V_3)-(V_1)$ |
|---|---|---|
| 1 | $6n+3$ | $6n+2$ |
| 2 | $6n+1$ | $6n-1$ |
| 3 | $6n-1$ | $6n-4$ |
| . . . . . . . | | . . . . |
| $n+1$ | $4n+3$ | $3n+2$ |
| $n+2$ | $6n+2$ | $5n$ |
| $n+3$ | $6n$ | $5n-3$ |
| $n+4$ | $6n-2$ | $5n-6$ |
| . . . . . . . | | . . . . |
| $2n+1$ | $4n+4$ | $2n+3$ |

Der Ausgleich ist $q^2 = (2n+1)^2$. Die durch den wagerechten Strich getrennten beiden Teile von $\Delta$ mögen wieder $\Delta_1$ und $\Delta_2$ heissen; die zu beantwortende Frage lautet dann:

Lässt sich aus den Reihen

$$\Delta_1 = 6n+2,\ 6n-1,\ 6n-4\ .\ .\ .\ 3n+8,\ 3n+5,\ 3n+2$$
$$\Delta_2 = 5n,\quad 5n-3,\ 5n-6\ .\ .\ .\ 2n+6,\ 2n+3$$

durch einfache Addition die Summe $q^2 = 4n^2+4n+1 = (2n+1)^2$ darstellen?

Die Untersuchung sondert zunächst den Fall

$$q \equiv 3, \text{ mod. } 6, \text{ also } 2n+1 = 6k+3 \text{ ab.}$$

Für diesen überzeugt man sich zunächst sehr leicht, dass, da

$$\Delta(9) = 26,\ 23,\ 20,\ 17,\ 14;\ \ 20,\ 17,\ 14,\ 11 \text{ ist,}$$

der Ausgleich $9^2 = 81$ nicht dargestellt werden kann.

Ferner sieht man sehr leicht, dass die Glieder in $\Delta_1$ und $\Delta_2$ allgemein für diesen Fall unter einander congruent nach dem Modul 3 sind. Drückt man daher diese Reihen unter Zugrundelegung der Voraussetzung $2n+1 = 6k+3$ durch $k$ aus, so erhält man:

$$\Delta_1 = 18k+8,\ 18k+5,\ 18k+2\ .\ .\ .\ 9k+11,\ 9k+8,\ 9k+5$$
$$\Delta_2 = 15k+5,\ 15k+2,\ 15k-1\ .\ .\ .\ 6k+8,\ \ 6k+5.$$

Nun besteht die identische Gleichung:

$$(6k+3)^2 = (2k+1)(12k+14)+2k+1)(6k-5).$$

Das erste der rechtsstehenden Glieder ergibt sich durch Addition folgender Glieder aus $\Delta_1$:

$$\begin{array}{rl} & 12k+14 \\ 12k+17 & +12k+11 \\ 12k+20 & +12k+8 \\ \cdots & \cdots \\ 15k+11 & +\ 9k+17 \\ 15k+14 & +\ 9k+14. \end{array}$$

Dieser Ausdruck ist also immer darstellbar, wenn die Glieder in $\Delta_1$ dazu ausreichen, d. h. wenn

$$15k+14 \overset{=}{<} 18k+8, \text{ d. h. wenn}$$

$$k \geqq 2 \text{ ist.}$$

Das zweite rechtsstehende Glied der obigen identischen Gleichung findet man durch Zusammenstellung folgender $k-1$ Glieder aus $\Delta_2$:

$$15k+5,\ 15k-4,\ 15k-10,\ 15k-16\ .\ .\ .$$

worin die Differenz zwischen dem ersten und zweiten Gliede 9, zwischen je zwei anderen auf einander folgenden dagegen 6 ist. Ihre Summe ist, wie leicht nachzuweisen:

$$(k-1)(15k+5)-9k+18-3(k-2)(k-3) = (2k+1)(6k-5),$$

wie oben verlangt wurde. Auch dieser zweite Teil erfordert die Bedingung

$$k \geqq 2,$$

weil er für $k = 1$ ganz wegfallen würde, da nur $k-1$ Glieder zu seiner Darstellung verlangt werden.

Es ist mithin $R(3, q)$ für $q = 6k+3$ lösbar mit Ausnahme des einzigen Falles $q = 9$, welcher anderweitig gelöst ist.

Die weitere Auseinandersetzung hat 4 Fälle, resp. 2 Fälle mit je 2 Unterabteilungen zu unterscheiden, je nachdem

$$n \equiv 0,\ 2,\ 3,\ \ 5 \text{ mod. } 6$$

$$\text{also} \quad q \equiv 1,\ 5,\ 7,\ 11 \text{ mod. } 12 \text{ ist.}$$

In allen vier Fällen enthalten $\Delta_1$ und $\Delta_2$ verschiedene Reste mod. 3.

a. Es sei zunächst $n \equiv 0$, mod. 6, so gehe man von der identischen Gleichung

$$(2n+1)^2 = (n-2)(4n+1)+11n+3$$

aus. Der zweite Teil $11n+3$ ist direct gegeben durch:

$$11n+3 = 5n+3n+3n+3.$$

Die drei Glieder rechts stehen sämmtlich in $\Delta_2$. Zur Bestimmung des ersten Teiles stelle man je ein Glied aus $\Delta_1$ und eins aus $\Delta_2$ zusammen, nämlich $\frac{n-2}{2}$ Paare:

$$\begin{array}{ll} 6n-\ 4 & +2n+\ 6 \\ 6n-\ 7 & +2n+\ 9 \\ 6n-10 & +2n+12 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}$$

so ist die Summe die verlangte, da jedes Paar die Summe $2(4n+1)$ ergibt. Auszulassen sind natürlich diejenigen Gliederpaare, welche die vorstehend genannten Glieder aus $\Delta_2$:

$$5n,\quad 3n,\quad 3n+3$$

| $V_1$ | $V_3$ |
|---|---|
| 1 | $6n+3$ |
| 2 | $6n+1$ |
| 3 | $6n-1$ |
| . . . . | . . . . |
| $n+1$ | $4n+3$ |
| $n+2$ | $6n+2$ |
| $n+3$ | $6n$ |
| $n+4$ | $6n-2$ |
| . . . . | . . . . |
| $2n+1$ | $4n+4$ |

Der Ausgleich ist $q^2 = (2n+1)^2$. Die
getrennten beiden Teile von $\varDelta$ möge
die zu beantwortende Frage lautet dan

Lässt sich aus den Reihen

$$\varDelta_1 = 6n+2,\ 6n-1,\ 6n-4\ .\ .$$
$$\varDelta_2 = 5n,\quad 5n-3,\ 5n-6\ .\ .$$

durch einfache Addition die Summe
darstellen?

Die Untersuchung sondert zunächs

$$q \equiv 3, \text{ mod. } 6, \text{ also } 2n+$$

Für diesen überzeugt man sich zunächst

$$\varDelta(9) = 26,\ 23,\ 20,\ 17,\ 14;$$

der Ausgleich $9^2 = 81$ nicht dargestellt

Ferner sieht man sehr leicht, da
allgemein für diesen Fall unter einand
3 sind. Drückt man daher diese Reih
Voraussetzung $2n+1 = 6k+3$ durch $k$

$$\varDelta_1 = 18k+8,\ 18k+5,\ 18k+2\ .\ .$$
$$\varDelta_2 = 15k+5,\ 15k+2,\ 15k-1\ .\ .$$

Nun besteht die identische Gleichung:

$$(6k+3)^2 = (2k+1)(12k+14)+$$

Das erste der rechtsstehenden Glieder
folgender Glieder aus $\varDelta_1$:

$$\begin{array}{ll} & 12k+14 \\ 12k+17 & +12k+11 \\ 12k+20 & +12k+8 \\ .\ .\ .\ .\ . & .\ .\ .\ .\ . \\ 15k+11 & +\ 9k+17 \\ 15k+14 & +\ 9k+14. \end{array}$$

Dieser Ausdruck ist also immer darstellbar, wenn
dazu ausreichen, d. h. wenn

das Restglied verbraucht
von denen $4n+3$ und
…chen, ist dies Glied und
…st demnach

…enden.

…stellung ganz analog,
überspringende Paar

…eichung

…so ist $R(3, q)$ auch

$R(5, q)$ in analoger

…en Verticalen nach
…e fallend:

…irect direct die

…ss

$-(V_1)$ im
…en Ausein-
wieder $q$

Das zweite rechtsstehende Glied …
findet man durch Zusammenstellung …

worin die Differenz zwischen …
zwischen je zwei andern …
Summe ist, wie leicht …

wie oben verlangt wurde …
dingung

weil er für $k=1$ ganz …
seiner Darstellung …

Es ist mithin …
einzigen Falles $q=9$, …

Die weitere Auseinander…
je 2 Unterabteilungen …

In allen vier Fällen …

a. Es sei …
schen Gleichung

aus. Der zweite Teil …

Die drei Glieder …
nung des ersten Teils …

$d_2$ zusammen. …

so ist die Summe …
ergibt. Ausserdem …
die vorstehenden …



der
…ber
die-
men
der
t zu
hren
) die
…eiden
…ndert
…e ge-
…hlen,
aber
…chen.
Hori-

so er-

…+4.
…e Aen-

…+7
…dem $n$.

…s Glied

enthalten. Die Methode ist also zulässig, sobald die Glieder so zahlreich vorhanden sind, dass diese drei Paare zur Bestimmung von $(n-2)(4n+1)$ entbehrt werden können, mithin da aus $\Delta_1$ ohnehin die Glieder $6n+2$ und $6n-1$ nicht in Betracht gezogen werden dürfen und $\Delta_1$, $n+1$, $\Delta_2$ dagegen $n$ Glieder enthält, sobald

$$(n+1)-5 = n-4 \geqq \frac{n-2}{2}, \quad \text{d. h. sobald}$$

$$n \geqq 6 \text{ ist.}$$

Für den einzigen ausgeschlossenen Fall $n = 0$ wird der Begriff des magischen Rechteckes hinfällig, also ist die Gültigkeit eine allgemeine.

b. Ist ferner $n \equiv 2$, mod. 6, so hat man von derselben identischen Gleichung

$$(2n+1)^2 = (n-2)(4n+1)+11n+3$$

auszugehen, das erste Glied ebenso wie in a., das zweite durch die Identität

$$11n+3 = 3n+1+5n+3n+2$$

zu bestimmen. Von den drei Zahlen rechts steht die erste und zweite in $\Delta_2$, die dritte in $\Delta_1$. Die zweite und dritte bilden eins der Paare, welche sich zu $2(4n+1)$ ergänzen. Danach ist leicht zu entscheiden, welche Zahlen zur Herstellung dieser Gliederpaare gebraucht werden können. Aehnlich, wie vorher, findet man als Bedingung für die Löslichkeit

$$n-3 \geqq \frac{n-2}{2}, \quad n \geqq 4.$$

Für den einzigen hierdurch ausgeschlossenen Fall $n=2$, welcher $R(3, 5)$ entspricht, ist eine mechanische Lösung gezeigt worden.

c. Es sei ferner $n \equiv 3$, mod. 6. Die identische Gleichung, von welcher dann vorteilhaft auszugehen ist, lautet:

$$(2n+1)^2 = (n-1)(4n+4)+4n+5.$$

Das zweite Glied rechts steht direct in $\Delta_1$; das erste bestimmt man durch folgende Zusammenstellung von $\frac{n-1}{2}$ Gliederpaaren, ein Glied jedesmal aus $\Delta_1$ und eins aus $\Delta_2$ genommen, deren jedesmalige Summe $2(4n+4)$ ist. Diese Glieder sind

$$\begin{array}{ll} 6n+2 & +2n+6 \\ 6n-1 & +2n+9 \\ 6n-4 & +2n+12 \\ \ldots & \ldots \end{array}$$

Dieselben sind so zu wählen, dass das Paar

$$4n+5 \qquad +4n+3$$

übersprungen wird, weil $4n+5$ schon für das Restglied verbraucht wurde. Sobald also die $n$ Glieder von $\Delta_2$, von denen $4n+3$ und $2n+3$ nicht gebraucht werden dürfen, ausreichen, ist dies Glied und damit $(2n+1)^2$ darstellbar. Die Bedingung ist demnach

$$n-2 \geqq \frac{n-1}{2}, \quad n \geqq 3.$$

Die Formel ist demnach ganz allgemein anzuwenden.

d. Ist endlich $n \equiv 5$ mod. 6, so ist die Darstellung ganz analog, nur steht das Glied $4n+5$ dann in $\Delta_2$. Das zu überspringende Paar ist demnach

$$4n+3 \qquad +4n+5.$$

Daraus erklärt sich leicht, dass die Bedingungsgleichung

$$n \geqq 3.$$

durch diese Aenderung nicht beeinflusst wird. Also ist $R(3,q)$ auch auf diesem Wege allgemein darstellbar.

§. 14. Um zu untersuchen, in welchen Fällen $R(5,q)$ in analoger Weise aus der Anordnung:

$$\begin{array}{lll} 1 & q+1 \;.\;.\;. & 4q+1 \\ 2 & q+2 \;.\;.\;. & 4q+2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ q & 2q \;\;.\;.\;. & 5q \end{array}$$

abzuleiten ist, ordne man wieder die drei inneren Verticalen nach §. 2., die beiden äusseren, eine steigend, die andere fallend:

$$\begin{array}{ll} 1 & 5q \\ 2 & 5q-1 \\ 3 & 5q-2 \\ \cdot & \cdot \\ q & 4q+1. \end{array}$$

Dann haben wieder alle Horizontalreihen und $V_3$ direct direct die verlangte Summe,

$V_2$ ist um $q^2$ zu klein, $V_4$ um $q^2$ zu gross
$V_1$ „ „ $2q^2$ „ „ $V_5$ „ $2q^2$ „ „

Die innere Differenzreihe $(V_4)-(V_2)$ ist mit $(V_3)-(V_1)$ im vorigen Paragraphen identisch, bedarf also keiner weiteren Auseinandersetzung. Ersetzt man in der äusseren Differenzreihe wieder $q$ durch $2n+1$, so hat man die Frage:

Wann ist aus den Gliedern der Reihe

$$\Delta' = 10n+4,\ 10n+2,\ 10n \;.\;.\;. 8n+4 \;.\;.\;. 6n+6,\ 6n+4$$

durch einfache Addition der Ausdruck

$$2q^2 = 8n^2+8n+2$$

darstellbar?

Man unterscheidet zwischen geradem und ungeradem $n$.

a. Ist zunächst $n$ gerade, so beachte man die identische Gleichung:

$$2(2n+1)^2 = (n-1)(8n+2)+14n+4.$$

Das erste Glied rechts wird ausgedrückt durch ein einfaches Glied und $\frac{n-2}{2}$ Paare, nämlich:

$$\begin{array}{lc} & 8n+2 \\ 8n-2 & +8n+6 \\ 8n-4 & +8n+8 \\ 8n-6 & +8n+10 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{array}$$

das zweite durch die einzelnen Glieder

$$8n+6n+4.$$

Da die Gliederpaare $8n+8n+4$ und $10n+6n+4$, sowie die einzelnen Glieder $10n+4$, $10n+2$ von der Verwendung ausgeschlossen sind, ist die Methode brauchbar für:

$$2n+1 \geqq (n-1)+6, \quad n \geqq 4.$$

b. Wenn $n$ ungerade ist, so hat man dieselbe identische Gleichung anzuwenden, aber zu beachten, dass $n-1$ gerade ist. Demnach ist bei der Darstellung des ersten Gliedes rechts das alleinstehende Glied $8n+2$ auszulassen und dafür ein Paar mehr zu verwenden. Die Darstellung des zweiten Gliedes wird nicht geändert. Zu den von der Verwendung ausgeschlossenen Gliedern tritt das einzelne $8n+2$ hinzu, die Bedingung ist also:

$$n \geqq 5.$$

Beide Resultate zusammengefasst ergeben: $R(5, q)$ ist auf diesem Wege darstellbar für $q \geqq 11$. $R(5, 9)$ ist nämlich auszuschliessen, weil nach dem Vorigen die Darstellung für $R(5, q)$ von derjenigen für $R(3, q)$ abhängt, und nach dem vorigen Paragraphen $R(3, 9)$ unmöglich wird.

§. 15. Um die gefundenen Resultate auch für die Zahl 7 als erstes Argument nutzbar zu machen, ordne man zunächst die beiden äusseren Verticalenpaare wie früher. Man erhält, wenn gleichzeitig das äussere Paar in entgegengesetzter Richtung als das innere geschrieben wird, für das Beispiel $R(7, 9)$ das System:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 18 | . . . | 46 | 63 |
| 2 | 17 | . . . | 47 | 62 |
| . | . | . . . | . | . |
| 8 | 11 | . . . | 53 | 56 |
| 9 | 10 | . . . | 54 | 55. |

Beide Differenzenreihen enthalten nur gerade Zahlen, also ist der äussere Ausgleich $3q^2$ nicht direct abzuleiten. Vertauscht man aber in $V_6$ und $V_7$ die beiden untersten Zahlen mit einander (oder diejenigen in zwei beliebigen benachbarten Horizontalreihen), so kommen in die beiden Differenzenreihen je 2 ungerade Zahlen, die bei der inneren Differenzenreihe für den Ausgleich nicht berücksichtigt zu werden brauchen, bei der äusseren angewendet, denselben herbeiführen können. Nun wurde zur Herstellung des Ausgleiches für $R(5, q)$ die kleinste Zahl der Differenzenreihe, $6n+4$ gebraucht. Die beiden kleinsten Zahlen dieser Differenzenreihe müssen also unverändert bleiben, die beiden grössten werden in der angedeuteten Weise geändert. In den äusseren Verticalen ändere man diejenigen Zahlen, welche die kleinste Differenz haben, ordne beide Verticalenpaare aber so, dass die geänderten Zahlen in denselben Horizontalreihen stehen. Für das obige Beispiel ändern sich demnach die zwei untersten Horizontalen und erhalten die Form:

$$\begin{matrix} 8 & 11 & \ldots & 54 & 55 \\ 9 & 10 & \ldots & 53 & 56, \end{matrix}$$

wodurch in den Summen nichts geändert wird.

Ordnet man für den allgemeinen Fall in analoger Weise, so erhält man als innere Differenzenreihe:

$$10n+3,\ 10n+3,\ 10n,\ 10n-2\ \ldots\ 8n+4,\ \ldots\ 6n+6,\ 6n+4.$$

Die Darstellungen des vorigen Paragraphen werden durch diese Aenderung nicht beeinflusst.

Die äussere Differenzenreihe, aus welcher nun

$$3q^2 = 12n^2+12n+3$$

darzustellen wäre, heisst in der veränderten Form

$$14n+6,\ 14n+4,\ \ldots 12n+6,\ \ldots\ 10n+12,\ 10n+10,\ 10n+7,\ 10n+7$$

Die Lösung unterscheidet wieder zwischen geradem und ungeradem $n$. Für ein gerades $n$ gebe man von der identischen Gleichung

$$3(2n+1)^2 = (12n+2)(n-1)+22n+5$$

aus. Das erste Glied rechts ist darstellbar durch ein einzelnes Glied und $\frac{n-2}{2}$ Paare:

$$\begin{matrix} & 12n+2 & \\ 12n & & +12n+4 \\ 12n-4 & & +12n+8 \\ 12n-6 & & +12n+10 \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix}$$

das zweite durch die einzelnen Glieder

$$10n+7 \qquad +12n-2.$$

Von der Verwendung für den ersten Teil sind ausgeschlossen die Glieder $12n-2$, $10n+7$, $10n+7$ und ihre drei Ergänzungsglieder, ferner, da das letztmögliche Paar $10n+10+14n-6$ wäre, auch noch die vor $14n-6$ stehenden mit Ausnahme von zweien, die schon in den Ergänzungsgliedern zu $10n+7$ mitgerechnet sind. Die Bedingung für die Verwendbarkeit ist demnach:

$$2n+1 \geqq (n-1)+10, \quad n \geqq 8.$$

Wenn $n$ ungerade ist, so ist die Darstellung analog. $n-1$ ist dann gerade; man schliesse also in der Darstellung des ersten Teiles der identischen Gleichung das einzelne Glied $12n+2$ aus und stelle dafür $\frac{n-1}{2}$ Paare von Gliedern zusammen. Die Löslichkeitsbedingung wird dadurch, wie leicht zu sehen, nur scheinbar ungünstiger:

$$2n+1 \geqq (n-1)+11, \quad n \geqq 9.$$

Beide Resultate zusammengefasst geben also das Resultat:

$$R(7, q) \text{ ist darstellbar, wenn } q \geqq 17$$

§. 16. Um die allgemeine Lösung für $R(p, q)$ zu finden, hat man je zwei Paare von Verticalreihen zu combiniren, wie dies für $R(7, 9)$ soeben gezeigt wurde. Doch können die weiteren Paare gleichmässig, nicht wie dort, abwechselnd geordnet sein, nur ist die eine Verticale eines Paares stets abwärts, die andere stets aufwärts zu schreiben. Soll also das allgemeine Rechteck $R(p, q) = R(2m+1, 2n+1)$ dargestellt werden, so ist für jedes Verticalenpaar der erforderliche Ausgleich zu bestimmen. Versteht man daher unter $c$ eine beliebige positive ganze Zahl $\leqq m$, so hat man zu fragen:

In welchen Fällen ist $c(2n+1)^2 = 4cn^2+4cn+c$ durch einfache Addition darstellbar aus der Reihe:

$(4c-2)n+2c+1$, $(4c-2)n+2c+1)$, $(4c-2)n+2c+4$, $(4c-2)n+2c+6$, . . . . . . . . $4cn+2c-2$, $4cn+2c$, $4cn+2c+2$, . . . . . . . . . . . $(4c+2)n+2c-4$, $(4c+2)n+2c-2$, $(4c+2)n+2c$?

Zu bemerken ist dabei noch, dass für den Fall $m$ gerade das äusserste Verticalenpaar unverändert bleibt; die beiden ersten Glieder der Reihe heissen dann also: $(4c-2)n+2c$ und $(4c-2)n+2c+2$.

Ist $c$ gerade, so benutze man die Identität:

$$(2n+1)^2.c = (4cn+4)(n-1)+(8c-4)n+c+4.$$

Das erste Glied rechts erhält man wieder durch Verbindung eines einzelnen Gliedes mit $\frac{n-2}{2}$ Paaren:

$$\begin{array}{ll} & 4cn+4 \\ 4cn+2 & +4cn+6 \\ 4cn & +4cn+8 \\ 4cn-2 & +4cn+10 \\ \ldots & \ldots \end{array}$$

wenn $n$ gerade ist, resp. durch $\frac{n-1}{2}$ Paare ohne das einzelne Glied, wenn $n$ ungerade ist.

Das zweite Glied rechts ergiebt sich beispielsweise durch Addition von

$$(4c-2)n+c \quad \text{und} \quad (4c-2)n+4.$$

Nicht zu verwenden sind demnach für das erste Glied die Zahlen, welche das zweite bestimmen, und deren Ergänzungsglieder, und da das letzte zur Verwendung geeignete Gliederpaar durch

$$(4c-2)n+2c+4 \quad \text{und} \quad (4c+2)n-2c+4$$

gebildet wird, die beiden ungeraden und die nach dem letzten der eben genannten noch folgenden $2c-2$ Glieder. Man hat demnach als Löslichkeitsbedingung

$$2n+1 \geqq (n-1)+2c+4$$

$$n \geqq 2c+2 \text{ für gerade } n$$

und analog, weil dann das Anfangsglied $4cn+4$ noch abzurechnen ist,

$$n \geqq 2c+3 \text{ für ungerade } n.$$

Beide Bedingungen lassen sich zusammenfassen in die eine:

$$n \geqq 2c+2.$$

Wenn $c = m$, d. h. wenn es sich um den Ausgleich für das äusserste Verticalenpaar handelt, sind diese Grenzen um 4 zu verringern, weil dann ungerade Differenzenglieder wegfallen und desshalb 2 Gliederpaare mehr zur Bestimmung des ersten Teiles in der Ausgleichungsidentität verwendet werden können.

Ist $c$ ungerade, so ist dieselbe Identität wie vorher zu benutzen, auch das erste Glied rechts auf demselben Wege zu bestimmen. Zur Bestimmung des zweiten addire man

$$(4c-2)n+2c+1 \quad \text{und} \quad (4c-2)n-c+3.$$

Das letzte Zahlenpaar für die Bestimmung des ersten Gliedes ist dasselbe, wie vorher, aber ein Paar für den Ausgleich des zweiten deckt sich mit den Restgliedern; folglich findet man als Löslichkeitsbedingung

$$n \geqq 2c \text{ für gerade } n,$$

$$n \geqq 2c+1 \text{ für ungerade } n.$$

Beide Bedingungen lassen sich wieder zusammenfassen in:

$$n \geqq 2c.$$

Diese Grenzen ändern sich nicht, wenn es sich um das äusserste Verticalenpaar handelt, d. h. wenn $c = m$ ist.

Beachtet man die Werte, welche $c$ in den einzelnen Verticalenpaaren hat, so erhält man demnach das Resultat:

$R(p, q) = R(2m+1, 2n+1)$ ist darstellbar auf diesen Wegen

für gerade $m$, wenn $n \geqq 2m-2$

„ ungerade $m$ „ $n \geqq 2m$ ist.

Für die ersten Argumente 5 und 7 sind die Grenzen zu niedrig, weil $R(3, q)$, das für alle folgenden Rechtecke die Grundlage bildet, für $q = 9$ nicht dargestellt werden konnte und für $R(7, q)$ eine andere identische Gleichung verwendet werden musste. Die für $p = 7$ angewendete allgemeine Ausgleichungsidentität gibt dann:

$$3(2n+1)^2 = (12n+4)(n-1)+20m+7;$$

das zweite Glied auf der rechten Seite ist dann nicht durch Addition von zwei Gliedern herzustellen, da die Differenzenreihe durch

$$10m+7 \quad \text{und} \quad 14m+6$$

abgegrenzt wird. Eine ähnliche Beobachtung lässt sich auch für $R(9, q)$ machen.

Eine im Sinne des §. 12. für das vorliegende System getroffene Anordnung würde übrigens noch günstigere Löslichkeitsbedingungen ergeben, doch bietet dieselbe wohl zu wenig Neues, um mehr als einer Erwähnung zu bedürfen.

Ebenso könnte auch noch erwähnt werden, dass magische Rechtecke, deren erstes Argument $> 3$ ist, auch in der Weise herstellbar sind, dass man zunächst die mittelsten $3q$ Zahlen zur Herstellung eines Rechteckes nach §. 7 verwendet, die übrigen Zahlen dagegen nach den letzten Paragraphen behandelt. Die Umkehrung dieses Verfahrens, wonach die drei mittelsten Verticalen nach §. 13. geordnet würden und für die übrigen Zahlen eine Anordnung nach §. 8. bis 12. zu bestimmen wäre, ist dagegen, wie leicht nachweisbar ist, unzulässig.

Berlin, 10. März 1881.

## XXXIII.

# Ueber den Winkel von $n$ Dimensionen.

Von

**R. Hoppe.**

---

Eine allseitig begrenzte lineare $(n-1)$ dehnung $V$ sei der Ort eines variabeln Punktes $P$, ferner $C$ ein fester Punkt im normalen Abstande $CB = h$ von jener $(n-1)$ dehnung. Dann ist der Ort der Geraden $CP$ eine allseitig begrenzte lineare $n$ dehnung $N$, die wir eine $n$ dehnige Pyramide nennen können, obwol der Name für 2 Dimensionen, d. i. für das Dreieck, nicht in Gebrauch ist, und zwar heisse $V$ die Basis und $C$ die Spitze der Pyramide.

Wir schneiden auf dem Radiusvector $CP = \varrho$ die Strecke $CQ = 1$ ab. Dann stellt der von $Q$ gleichzeitig durchlaufene Ort $W$ dasjenige dar, was für 2 und 3 Dimensionen den Winkel an der Spitze misst und was wir auch für jede Dimensionszahl so nennen wollen.

Erzeugt nun $P$ das Element $\partial V$, in allen Richtungen unendlich klein, und man schneidet die Pyramide $\partial N$ über der Basis $\partial V$ parallel $V$ von $Q$ aus durch eine lineare $(n-1)$ dehnung, so ist die Pyramide über dem Schnitt als Basis ähnlich der Pyramide $\partial N$, verhält sich also zu ihr $= 1 : \varrho^n$. Sie ist aber unendlich klein $(n-1)$ ter Ordnung, differirt hingegen von der Pyramide auf der Basis $\partial W$ nur in $n$ ter Ordnung; folglich kann man letztere Pyramide dafür substituiren.

Jede $n$ dehnige Pyramide ist nun gleich dem Product der Basis und der Höhe dividirt durch $n$; drückt man hiernach beide Pyramiden aus, so ergiebt sich:

$$\frac{1}{n}\partial W : \frac{h}{n}\partial V = 1 : \varrho^n$$

Setzt man $BP = r$, so wird $\varrho^2 = h^2 + r^2$, folglich

$$W = h\int \frac{\partial V}{(h^2 + r^2)^{\frac{n}{2}}}$$

ein Ausdruck der offenbar von der Linieneinheit unabhängig ist.

Da die Gerade $r$ innerhalb $V$ liegt, so ist die Berechnung von $W$ auf Integrationen zurückgeführt, welche die Grenzen einer linearen $(n-1)$ fachen Mannichfaltigkeit nicht überschreiten, insbesondere für $n = 4$ auf eine Kubatur.

# Litterarischer Bericht
## CCLXI.

### Antikritik.

Die Deutsche Litteraturzeitung (1880 Nr. 6. S. 210.) enthält eine kurze Kritik meines Lehrbuches der analytischen Geometrie, bezüglich auf den 1. Teil. Für die Wahl desselben zur Besprechung, für das zur Charakterisirung positiv Angeführte habe ich dem Referenten nur zu danken und die Richtigkeit der letztern zu bestätigen. Auch mancher Tadel würde mir keinen Anlass zur Erwiderung gegeben haben. Die Behauptung, die Stetigkeit sei versteckter Weise eingeführt worden, scheint aus der Voraussetzung hervorzugehen, dass die Grundbegriffe in der Analysis neu zu entwickeln seien, was ja in der Vorrede ausdrücklich abgelehnt ist. Wollte der Ref. einen logischen Fehler bezeichnen, so bedurfte das einer genauern Bestimmung. Wenn ferner gesagt wird, die ebenen Curven seien neben den Raumcurven zu kurz gekommen, so ist zu erinnern, dass es ja nicht auf Mitteilung von Lehrstoff, sondern auf Beschaffung der zur Untersuchung und zum Studium erforderlichen Organe ankommt, und dass die Principien der Raumtheorie vollständig die der ebenen Geometrie mitenthalten. Auf gleicher Verwechselung beruht es wol, wenn der Ref. die Theorie der Raumcurven als unabgeschlossen bezeichnet.

Eine Antwort aber verdient der Schlusssatz: Das Vorliegende sei weniger ein Lehrbuch als eine wissenschaftliche Einzeluntersuchung. Wodurch begründet der Ref. dieses vernichtende Urteil? Um das leichter Zurückzuweisende vorauszunehmen, so wird angeführt die Knappheit der Behandlung und der Mangel an Beispielen. Der Ref.

sollte wissen, dass zahlreiche Lehrbücher aus bewusstem Grunde recht ausführlich bearbeitet sind, andere zahlreiche Lehrbücher aus bewusstem Grunde nicht mehr und nicht weniger als das Notwendige geben. Die Gesichtspunkte der letztern sind auch die hier geltenden, um so mehr als das Lehrbuch nicht für Kinder bestimmt ist. Beispiele, einmal gebraucht, müssen durch neue ersetzt werden, stehen also nachher als unnütze, störende Unterbrechung des Lehrgangs da und erschweren den Ueberblick; daher hat man gewöhnlich, wenige Fälle ausgenommen, den Gebrauch gesonderter Beispielsammlungen vorgezogen. Die Ausführlichkeit ist in ähnlichem Falle: sie ist nicht immer eine Erleichterung des Verständnisses. Ueber das Notwendige hinausgehen kann man in mancherlei Weise; was dem Einen zustatten kommt, ist dem Andern hinderlich.

Schwerlich konnte wol der Ref. die eben genannte Eigenschaft für entscheidend ansehen, um dem Vorliegenden den Charakter des Lehrbuchs abzusprechen; sein Hauptgrund geht vorher, nämlich: wegen der eigenartigen Abgrenzung und Einteilung eigne sich das Buch nicht zur ersten Einführung in die analytische Geometrie. Warum er nicht direct die Methode, sondern ein äusserliches Merkmal, das von der Methode an die Hand gegeben wird, eigenartig nennt, ist gleichgültig; jedenfalls ist es die Methode, die sich nicht zu dem Zwecke eignen soll. Nun hat aber der Ref. mit keinem Worte die Vorzüge dieser Methode für leichteres Erlernen der analytischen Geometrie, wie sie in der Vorrede dargelegt sind, in Abrede gestellt; er hat von den vier Gesichtspunkten, die zugunsten des Ausgangs von der Raumtheorie sprechen, keinen bestritten, noch neue Gesichtspunkte geltend gemacht. Also, gleichviel ob die Methode besser ist, bloss weil sie von der bisherigen wesentlich abweicht, will er ihr den Eintritt wehren. Das heisst doch, für den Schlendrian in der Lehrweise à tout prix Partei nehmen und diejenigen, die, weil sie selbst nach alten Methoden unterrichtet worden sind, allen Fortschritt von der Hand weisen, darin nach Möglichkeit bestärken".

Der Verfasser würde Recht haben, wenn er solche Leser vor Augen hat, die von der analytischen Geometrie nichts weiter lernen wollen als etwas Coordinatenmethode mit Anwendung auf Kegelschnitte. Für diese ist das Buch nicht geschrieben.

Hoppe.

## Geschichte der Mathematik und Physik.

Mittheilungen des Coppernicus-Vereins für Wissenschaft und Kunst zu Thorn. Leipzig. C. A. Koch.

Die Zeitschrift ist 1878 von dem genannten Verein gegründet. Sie erscheint in zwanglosen Heften, deren jedes ein Ganzes bildet. Die Zeit des Erscheinens ist nicht festgesetzt. Das I. Heft enthält die gleichzeitig in diesem Archiv publicirten „Inedita Coppernicana" von Maximilian Curtze, T. LXII. 113—147. 337–373. Der Inhalt des II. Heftes 1880 ist:

1. Siegmund Günther: Der Wapowski-Brief des Coppernicus und Werner's Tractat über die Präcession.

2. Karl Malagola: Der Aufenthalt des Coppernicus in Bologna. (Deutsch von M. Curtze).

Der angekündigte Inhalt des III. Hefts wird sein:

1. F. Hipler: Caelio Calcagnini, Quod coelum stet, terra autem moveatur, mit Einleitung.

2. Antonio Favaro: Die Hochschule zur Zeit des Coppernicus. H.

Il carteggio di Sofia Germain e Carlo Federico Gauss. Nota di A. Genocchi. Paravia e Comp. 16 S.

Im 257. litt. Ber. p. 5. ist der Wortlaut eines Briefes von Gauss an Sophie Germain, im 259sten p. 27. der zweier vorangehender Briefe von S. G. an Gauss mitgeteilt; die 3 noch übrigen ihrer Briefe, von denen der Fürst Boncompagni Photolithographien besorgt hat, sollen gleich hiernach im Wortlaut folgen. Gegenwärtig giebt der Verfasser Erläuterungen und biographische Nachrichten zu dieser Correspondenz, wie er es in Betreff der Briefe von Lagrange getan (s. 254. l. Ber. p. 17. u. 257. l. B. p. 4.).

Sophie Germain ist geboren in Paris den 1. April 1776, gestorben 1831. Sie ergab sich von Jugend an dem Studium der Mathematik und gelangte ohne Lehrer und ungeachtet der Ungunst, welche die Familie anfangs entgegenstellte, dazu die höhern Theorien zu verstehen und darin Entdeckungen zu machen, so dass sie später 1815 den grossen Preis des Instituts gewann. Sie verschaffte sich die Vorlesungen der Professoren an der 1794 gegründeten Centralschule der öffentlichen Arbeiten, welche im folgenden Jahre in die Polytechnische

Schule übergieng, legte Lagrange unter dem angenommenen Namen Le Blanc ihre Beobachtungen vor, der sie öffentlich lobte, studirte 1798 den Essai sur la théorie des nombres von Legendre und 1801 die Disquisitiones arithmeticae von Gauss, wandte sich infolge davon leidenschaftlich dem Studium der Zahlenlehre zu und begann den in Rede stehenden Briefwechsel mit Gauss. Im Nachlass von Gauss, der an die Königliche Gesellschaft der Wissenschaften von Göttingen übergieng, fand man 10 Briefe von Sophie Germain, deren 5 erste die obengenannten sind. Der erste und dritte sind bereits in der von Hippolyte Stupuy redigirten Ausgabe der Oeuvres philosophiques de Sophie Germain. Paris 1879 — deren Concepte sich in Paris befanden, gedruckt, jedoch ohne Datum und mit allerhand Lücken und Ungenauigkeiten. Der vierte ist in den Beigaben zu der an der hundertjährigen Geburtstagsfeier von Gauss von Ernst Schering gehaltenen Rede publicirt. Die beiden übrigen waren noch nicht herausgegeben. Der anfangs citirte Brief von Gauss ist die Antwort auf den 4ten. Es wird weiterhin auf einige Stellen der Briefe eingegangen und daran verschiedene Notizen geknüpft. Den Schluss bildet ein Brief von Gauss an den Staatsminister Graf Prosper Balbo, Präsident der Turiner Akademie, worin er für die Ernennung zum auswärtigen Mitglied derselben seinen Dank ausspricht.

Es mögen hier die obengenannten 3 Briefe folgen. H.

Paris 16 9mbre 1805

Monsieur

Je dois vous paroître bien-coupable d'avoir tardé si longtems à vous remercir de la lettre dont vous m'avez honoré et de l'envoie du mémoire que vous avez bien voulu y joindre; cependant il n'y a pas de ma faute, le paquet ne m'a été remis qu' il y a huit jours Mr. de Lacy étoit en voyage depuis plus de 2 mois et on avoit négligé chez lui de me le faire tenir: il est vrai que n'espérant pas de vous une réponse si prompte je n'avois mis aucun soin à m'informer des lettres qui m'étoient adressées.

Votre mémoire m'a fait d'autant plus de plaisir que je le connoissois déjà par une lecture rapide que m'avoit procuréе l'un des savans auquels vous l'avez envoié, et qu'ayant toujours eu le desire de l'étudier, comme on doit le faire de tous les ouvrages qui sortent de votre plume, je l'avois inutilement fait demander à Leipsik, d'où j'avois reçu pour réponse que l'édition étoit épuisée.

L'indulgence que vous continuez de me temoigner, m'encourage à vous communiquer encore quelques unes de mes nouvelles recherches.

Après avoir réduit suivant que vous l'indiquez, les formes ternaires dont la déterminante est zéro aux formes binaires j'ai cherché si cette propriété s' étendoit aux formes quaternaires, c' est à dire, si ces formes étoient susceptibles de se réduire aux formes ternaires lorsque leur déterminante est zéro et j'ai examiné ensuite quelques autres propriétés des mêmes formes et de leurs adjointes.

Je crois que si $D$ est la déterminante d'une forme composée de $n$ variables $D^{n-1}$ sera la déterminante de l'adjointe de cette forme: c'est ainsi que vous avez trouvé $D^2$ pour la déterminante de l'adjointe ternaire et que, d'après mes calculs, $D^3$ est la déterminante de l'adjointe quaternaire. Cette analogie n'est sans doute pas suffisante pour établir la généralité de la proposition; mais on voit au moins que la déterminante de la forme étant composée de produits de l'ordre $n$, et les coefficiens de son adjointe l'étant de produits de l'ordre $n-1$, $D^{n-1}$ est du même ordre que la déterminante de l'adjointe; c'est-à-dire de l'ordre $n(n-1)$.

Les deux propositions, savoir: que la déterminante d'une forme est composée de produits des coefficiens de ses termes de l'ordre qui exprime le nombre des variables dont elle est composée, et que les coefficiens de l'adjointe le sont de produits de l'ordre immédiatement inférieur; m'ont paru résulter de la nature générale des formes et de leurs adjointes.

Je regarde comme une faveur, la permission que vous voulez bien m'accorder, de vous communiquer mes foibles essais, persuadé que vous aurez assez de bonté pour m'avertir des erreurs qui pourroient m'échapper, dans un genre de recherches, où vous êtes le seul juge éclairé que l'on puisse consulter.

Les nouveaux renseignemens que j'ai pris au sujet du libraire Duprat ne sont rien plus que satisfaisans: son successeur a dit avoir depuis longtems terminé ses payemens dont le produit a été aussi tôt divisé. Il est retiré dans une petite ville où il vit du revenu d'un médiocre emploi et l'avis général de toutes les personnes que j'ai consultées a été, qu'il est à peu près impossible de tirer de l'argent de lui.

Je n'avois pas jugé nécessaire de vous communiquer ces résultats parceque je ne vois pas que vous puissiez en tirer partie et j'attendois pour vous écrire de nouveau que vous m' en eussiez accordé la permission: le retard qu' a éprouvé la remise de votre lettre m' a privé de vous faire plus tôt tous mes remercimens et les protestations de mon profond respect.

Le Blanc.

Digitized by Google

Monsieur

L'interêt dû aux hommes supérieurs suffit pour expliquer le soin que j'ai pris, de prier le général Pernetty de faire savoir à qui il jugeroit convenable, que vous avez droit à l'estime de tout gouvernement éclairé.

En me rendant compte de l'honorable mission dont je l'avois chargé M$^{r}$. Pernetty m'a mandé qu'il vous avoit fait connoître mon nom: cette circonstance me détermine à vous avouer que je ne vous suis pas aussi parfaitement inconnue que vous le croyez: mais que, craignant le ridicule attaché au titre de femme savante, j'ai autrefois enprunté le nom de M$^{r}$. Le Blanc pour vous écrire et vous communiquer des notes qui, sans doute, ne méritoient pas l'indulgence avec laquelle vous avez bien voulu y répondre.

La reconnoissance que je vous dois pour l'encouragement que vous m'avez accordé, en me témoignant que vous me comptiez au nombre des amateurs de l'arithmétique sublime dont vous avez développé les mystères, étoit pour moi un motif particulier de m'informer de vos nouvelles, dans un moment où les troubles de la guerre pouvoient inspirer quelques craintes, et j'ai appris avec une véritable satisfaction que vous êtes resté dans vos foyers aussi tranquille que les circonstances le permettoient: je crains cependant que les suites de ces grands événemens ne nous privent encore longtems des ouvrages que vous préparez sur l'astronomie et surtout de la continuation de vos recherches arithmétiques, car cette partie de la science a pour moi un attrait particulier et j'admire toujours avec un nouveau plaisir l'enchaînement des vérités exposées dans votre livre: malheureusement la faculté de penser avec force est un attribut reservé à un petit nombre d'esprits privilegiés et je suis bien sure de ne rencontrer aucun des développemens qui, pour vous, semblent une suite inévitable de ce que vous avez fait connoître.

Je joins à ma lettre une note destinée à vous témoigner que j'ai conservé pour l'analyse le gout qu'a développé en moi la lecture de votre ouvrage et qui m'a autrefois inspiré la confiance de vous adresser mes foibles essais, sans autre recommandation auprès de vous que la bienveillance accordée par les savans aux admirateurs de leurs travaux. J'espère que la singularité dont je fais aujourd'hui l'aveu ne me privera de l'honneur que vous m'avez accordé sous un nom emprunté et que vous ne dédaignerez pas de consacrer quelques instans à me donner directement de vos nouvelles, croyez, Monsieur,

à l'intérêt que j'y attache et avez l'assurance de la sincère admiration avec laquelle j'ai l'honneur d'être

Paris ce 20 fevrier 1807

Votre très humble servante
Sophie Germain.

P. S. mon adresse est
M[selle] Germain chez son
père rue Ste. Croix de la
Bretonnerie n°. 23 à Paris.

Monsieur

Je vous dois mille remercimens pour les choses flatteuses dont votre dernière lettre est remplie, je ne les prens qu' à titre d'encouragement et certainement, ma plus grande ambition sera toujours de ne pas me montrer indigne de l'honnour que vous me faites en me promettant de continuer une correspondance à laquelle j'ai tout à gagner.

Vous avez pris la peine d'examiner une proposition inverse que je vous ai communiquée et de m'indiquer l'erreur que j'ai commise je reconnois la justesse de votre observation et vous remercie bien franchement de m'en avoir donnè avis; si je ne craignois même, d'abuser de votre complaisance je vous prierois de me rendre, à l'avenir, le même service que je considérerai toujours comme une marque de votre bienveillance.

Combien j'ai eu de plaisir en lisant vos trois théorèmes sur les résidus! J'en ai cherché les démonstrations, je les joins à ma lettre pour les soumettre à votre jugement, car elles ne me paroîtront hors de doute que lorsqu' elles auront votre aprobation.

Vous ne pourrez, à l'avenir, me faire de plus grand plaisir qu' en m'envoyant les premières propositions arithmétiques qui vous tomberont sous la main: en essayant de les démontrer j'acquérirai l'habitude d'un genre de considération qui est pour moi plein de charme; mais dont la difficulté seroit trop grande si j'étois réduite à mes propres forces: car, pour vous dire la vérité j'avois déjà voulu examiner les résidus des puissances plus élevées que le quarré, mais je n'avois pu pénétrer cette théorie qui est resté l'objet de ma curiosité.

Voici pourtant le petit nombre de propositions auxquelles j'étois parvenue et que je n'oserois vous communiquer si je ne comptois sur l'indulgence à laquelle vous m'avez accoutumée:

Digitized by Google

$p$ étant un nombre premier, si $q$ est un nombre premier à $p-1$, tous les nombres de la série 1, 2, ... $p-1$ seront résidus puissance $q^{emes}$ (mod. $p$).

En effet si il en étoit autrement il faudroit que plusieurs puissances $q^{emes}$ congruantes entr' elles (mod. $p$): soit donc, si il étoit possible, $a^q \equiv b^q$ (mod. $p$); quelques soient $a$ et $b$, on auroit, en prenant $r$ pour racine primitive, $r^n \equiv a$, $r^m \equiv b$, $n$ et $m$ étant des nombres $< p-1$, par conséquent $r^{nq} \equiv a^q$, $r^{mq} \equiv b^q$, $r^{nq} \equiv r^{mq}$, $r^{(n-m)q} \equiv 1$, résultat impossible, parceque $q$ étant premier à $p-1$, il faudroit que $n-m$, qui est essentiellement $<$ que $p-1$, fut égal à ce nombre.

Si on a au contraire $p-1 = qs$, il y aura parmi les $qs$ nombres 1, 2, ... $qs$, $s$ résidus et $(q-1)s$ non-résidus, puissance $q^{eme}$ (mod. $p$).

En effet, soit $r^d \equiv a$, $r^{s+d} \equiv a'$, $r^{2s+d} \equiv a''$ ...... $r^{(q-1)s+d} \equiv a^{(q-1)}$, on aura évidemment $a^q \equiv a'^q \equiv a''^q$ ...... $\equiv (a^{q-1})^q$; par conséquent, puisqu' il y a $q$ puissances $q^{emes}$ congruantes entr elles, l'élévation à la puissance $q^{eme}$ des $qs$ nombres moindres que $p$ ne fournira que $s$ nombres résidus puissance $q^{eme}$, différens entr' eux, et il y aura parmis ces nombres $(q-1)s$ non résidus.

Le produit des deux résidus puissance $q^{eme}$ (mod. $p = sq+1$) est également résidu puissance $q^{eme}$, même modul, et en général le produit de $a \equiv r^m$ par $b \equiv r^n$ est on n'est pas résidu puissance $q^{eme}$ (mod. $p$), suivant que $m+n$ est ou n'est pas $\equiv 0$ (mod. $p$.)

Si on désigne par $2^m$, $q$, $q'$, etc. les différens facteurs de $k$ dans $2k+1$, $-1$ sera résidu puissance $(2^{m-1})^{eme}$, $q^{eme}$ $q'^{eme}$ etc. (mod. $p$); car, $r$ étant une racine primitive, on aura $r^k \equiv -1$, et il est clair que $r^k = (r^{q.q'\,etc.})^{2m} = (r^{2mq'\,etc.})^q = (r^{2mq.\,etc.})^{q'} =$ etc.

Pour les nombres premiers $2^{2^i}+1$, 2 est résidu $(2^{2^i-i-1})^{eme}$ puissance; car c'est en effet ce qui résulte immédiatement de la congruance $2^{2^{i+1}} \equiv$ (mod. $2^{2^i}+1$).

Comme les nombres $2^{2^i}+1$ peuvent être mis sous la forme $2^{i+1}.2^{2^i-i-1}+1$, on voit qu'il y a $2^{i+1}$ résidus $(2^{2^i-i-1})^{eme}$ puissance, et que ces $2^{i+1}$ résidus sont 1, 2, $2^2$, $2^3$, ... $2^{2^i-1}$; $-1$, $-2$, $-2^2$, $-2^3$, ... $-2^{2^i-1}$.

Il résulte de cette proposition que l'on sait *apriori* que dans la résolution de l'équation du second degré dont les racines sont les

périodes $(2^i, 1)$, $(2^i, g^{2^{2^i}-i-1})$ ($g$ étant la racine primitive) le signe $+$ du radical appartient à la première et le signe $-$ à la seconde; car en dernière analyse

$$(2^i, 1) = 2\left\{\cos\frac{p}{n} + \cos\frac{2^2p}{n} + \cos\frac{2^4p}{n} + \cos\frac{2^6p}{n} \ldots + \cos\frac{2^{2^i-2}p}{n}\right\}$$

$$= 2\left\{\cos\frac{2^2}{n}\frac{p}{4} + \cos\frac{2^4}{n}\frac{p}{4} + \cos\frac{2^6}{n}\frac{p}{4} + \cos\frac{2^8}{n}\frac{p}{4} \ldots + \cos\frac{2^{2^i}}{n}\frac{p}{4}\right\}$$

$$(2^i, g^{2^{2^i}-i-1}) = 2\left\{\cos\frac{2p}{n} + \cos\frac{2^3p}{n} + \cos\frac{2^5p}{n} + \cos\frac{2^7p}{n} \ldots + \cos\frac{2^{2^i-1}p}{n}\right\}$$

$$= 2\left\{\cos\frac{2^3}{n}\frac{p}{4} + \cos\frac{2^5}{n}\frac{p}{4} + \cos\frac{2^7}{n}\frac{p}{4} + \cos\frac{2^9}{n}\frac{p}{4} \ldots + \cos\frac{2^{2^i+1}}{n}\frac{p}{4}\right\}$$

et en comparant termes à termes les valeurs de ces deux périodes, on voit que ceux de $(2^i, 1)$ sont plus grands que leurs correspondans dans $(2^i, g^{2^{2^i}-i-1})$ dont le dernier est même négatif, d'où il résulte $(2^i, 1) > (2^i, g^{2^{2^i}-i-1})$. On trouve de même $(2^{i-1}, 1) > (2^i, g^{2^{2^i}-\prime})$ etc. et plus généralement (en considérant comme plus grandes celles des périodes qui ont une valeur négative moins grande, et employant les différentes puissances de deux à la place des puissances de la racine primitive qui leur sont congruantes, puissances qui dépendent du choix de cette racine

$$(2^{i-1}, 1) > (2^{i-1}, 2) > (2^{i-1}, 4) > (2^{i-1}, 8)$$

$$(2^{i-2}, 1) > (2^{i-2}, 2) > (2^{i-2}, 4) > (2^{i-2}, 8) > (2^{i-2}, 2^4) > (2^{i-2}, 2^5)$$
$$> (2^{i-2}, 2^6) > (2^{i-2}, 2^7)$$

$$\vdots$$

$$(2, 1) > (2, 2) > (2, 2^2) > (2, 2^3) \ldots\ldots > (2, 2^{2^i-1})$$

Par exemple, pour $p = 2^{2^2} + 1$, 2 est simplement résidu quarré et on trouve

$(4, 1) > (4, 9)$ $\qquad$ $p = g = 3$ donne $g^{14} \equiv 2$, $g^{12} \equiv 4$, $g^{10} \equiv 2^3$

$(2, 1) > (2, 2) > (2, 2^2) > (2, 2^3)$ $\qquad$ $g = 6$ $\qquad$ $g^2 \equiv 2$, $g^4 \equiv 2^2$, $g^6 \equiv g^3$

Je vois avec regret que l'ouvrage que vous faites imprimer est écrit en allemand, car cette langue m'est entièrement inconnue, mais je serois tentée de l'apprendre un peu, comme j'ai fait la latine, afin de n' être pas privée de la connoissance de vos méthodes. Je crois aisément que la librairie à beaucoup soufert de cette malheureuse

guerre, je fait des voeux pour que ce contre-tems ne nuise pas à l'impression de vos ouvrages et pour que vous restiez toujours à l'abri de ses suites. Croyez, Monsieur, à la sincérité de l'intérêt qui les dicte et agréez l'assurance de la reconnoissance et de l'admiration avec lesquels je suis

Ce 27 juin 1807.

Votre servante Sophie Germain.

---

## Methode und Principien.

Die polydimensionalen Grössen und die vollkommenen Primzahlen. Von Dr. Hermann Scheffler, Mitglied der Kaiserlichen Societät der Naturforscher zu Moskau, Korrespondirendem Mitglied der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Padua. Mit 42 in den Text eingedruckten Figuren. Braunschweig 1880. Vieweg u. Sohn. 201 S.

Vollkommene Primzahlen heissen hier solche, die weder Summe zweier noch dreier Quadrate sind. Das ist das Resultat einer Theorie, die der Verfasser mit Verwertung aller Speculationen der Neuzeit, Erfindung neuer Zeichen und wissenschaftlich klingender Ausdrücke zustande gebracht hat. Die Schrift verfolgt die von Hamilton aufgenommene, aber noch weit darüber hinausgehende Anfgabe, imaginäre Zahlformen zu finden, die sich in 3, 4 und mehr Dimensionen ebenso darstellen lassen wie $x+iy$ in zweien. Doch wendet er keine so geistaustrengenden Mittel an wie Hamilton, vielmehr scheint für ihn die Aufgabe so schnell gelöst wie gedacht. Die Dreidimensionenzahlform ist ein Trinom $x+iy+ii_1z$, welches die 2 Factoren einer Summe von 3 Quadraten darzustellen vermag; z. B. ist

$$1^2+1^2+1^2 = (1+i+ii_1)(1-i+ii_1)$$
$$3^2+1^2+1^2 = (3+i+ii_1)(3-i+ii_1)$$

Wem dies gefällt, der möge die Schrift selbst lesen. H.

Das Räthsel der Gravitation. Von Baron N. Dellingshausen. Heidelberg 1880. Carl Winter. 230 S.

Das Gegenwärtige ist ein Glied einer Controverse zwischen Dellingshausen und Isenkrahe, dessen nächst vorhergehende Schrift im 255. litt. Ber. S. 23. besprochen worden ist. Beide Gegner sind im

Punkte der Unbegreiflichkeit der Gravitation einig; wo zwei Geister sich in gleichem Gedanken zusammenfinden, sagt der Verfasser, sei noch Hoffnung verbunden, dass derselbe sich weiterhin Bahn brechen werde. Beide verlangen nach Erklärung der Gravitation; verschieden verfahren sie nur in dem Sinne: Isenkrahe stellt den richtigen Satz auf, dass bei einem constanten Sein die Frage nach einem Grunde sinnlos ist, stösst denselben aber mit der Frage nach dem Grunde der constanten Gravitation eclatanterweise um und spricht nicht mehr davon; Dellingshausen hingegen erwähnt ihn wieder, um ihn als störend und unbequem zu vermeiden. Seinerseits sagt Letzterer ganz richtig, dass wir uns nicht damit zu begnügen haben, wenn uns statt einer Erklärung der Erscheinung ein Wort wie Anziehung gegeben wird. Nur wäre es zu verwundern, wenn er in keiner Schrift über Mechanik die genügende Erklärung dieses Wortes hätte finden können. Auch ist anzuerkennen, dass er im I. Abschnitt auf die logischen Erfordernisse recht ausführlich eingeht. Ein Erforderniss aber lässt er von Anfang bis Ende unbeachtet: über den Sinn seiner eigenen Frage Rechenschaft zu geben. Auch Erklärung ist nur ein Wort, mit dem wir uns nicht abfinden lassen. Was sucht der Verfasser mit Erklärung? was würde sein Verlangen befriedigen? Darüber stehen nur negative Angaben im Buche. Hypothesen befriedigen ihn nicht. Den Nachweis einer Anziehung mit Haken und Seilen würde er nicht verschmähen, doch müsse es nicht gerade eine solche sein. Was er sich dabei denkt, mag also wol das sein, was Kinder und Ungebildete immer zu wissen verlangen, die Unterordnung unter geläufige Begriffe und Vorstellungen, die jedoch selbst gewöhnlich nicht klar sind, sondern der Erklärung mehr bedürfen als das, wonach jene fragen. Solange nun dem Verfasser sowenig als uns ein Sinn der Frage bewusst ist, existirt auch keine restirende Aufgabe, und dass Isenkrahe die vermeintliche Aufgabe mit Atomen, Dellingshausen mit Continuum lösen will, und was beide dazu für Anstrengungen machen, kann uns nicht weiter interessiren, als sofern ihr persönliches Verhältniss dadurch ein nennbares Object empfängt. Die Schreibweise des Vorliegenden ist im Beginn jedes Themas recht anziehend und für die Person der Verfassers einnehmend; doch möchten wol die einzelnen Themata etwas zu lang ausgesponnen sein um nicht mit Uebersättigung zu endigen. Die historischen Angaben kann man willkommen heissen. So wird z. B. eine Succession von Aeusserungen Newton's in getrennten Zeiten zusammengestellt, in denen er anfänglich die Sonnenattraction als etwas erklärungsbedürftiges betrachtet, dann den Erklärungsversuchen immer weniger Gewicht beilegt, zuletzt die Gravitation selbst als causa simplicissima hinstellt. Trotz dieses sichtlichen Fortschritts zur reineren, unbefangeneren Ansicht will ihm der Verfasser bei seiner jugendlichen Aeusserung festhalten, deutet den nächsten Uebergang

als Ermüdung durch vergebliches Suchen und schreibt den letzten Ausspruch dem Einfluss von Cotes zu, mit dessen Vorrede seine „Principien“ erschienen. Ergötzlich ist seine Bemerkung, dass nach Newton eine „chinesische Stagnation“ eingetreten sei, sofern nämlich 1½ Jahrhunderte lang alle jene kosmischen Phantasien, wie sie in neuerer Zeit wieder in Menge emporschiessen, gänzlich pausirt haben. Glücklicherweise können wir bei derselben Bemerkung auch das Gegenteil denken: Newton's schliessliche Ansicht von der Gravitation befriedigte vollkommen und bewährte sich durch beständige Fortschritte der Astronomie dermassen, dass niemand zur Veränderung der Basis den geringsten Anlass hatte. H.

Einleitung in die reine Mechanik. Von Prof. Kirsch. Programm der technischen Staatslehranstalten zu Chemnitz 1880. 4°. 36. S.

Der Verfasser wünscht, dass die Methode des Schulunterrichts dem Satze von der Erhaltung der Energie eine grössere Bedeutung und reichlichere Verwendung zuteil werden lasse. Es genügt ihm jedoch nicht, dass dieser Satz erst bei der Lehre von der lebendigen Kraft aufgestellt wird; vielmehr verlangt er, dass man den Begriff der Arbeit als fundamentalen gleich anfangs einführe, durch denselben dem virtuellen Moment eine verständliche Bedeutung gebe, und hieraus alle Sätze gleichwie aus einem Princip herleite, so dass die empirischen Grundlagen der Mechanik sowenig als möglich merkbar werden. Hiernach scheint er doch dem eingebildeten Wissen zu sehr Vorschub zu leisten. Er führt den Schüler mit Umgehung der Menge einzeln zu gewinnender Erkenntnisse gleich auf den Höhepunkt der allgemeinsten Auffassung. Käme es nur auf bündige Deduction des Resultats an, so wird man die Möglichkeit gern einräumen. Dass aber letzteres dem Anfänger die einzelne Erlernung der Zwischenstufen ersetzen könne, ist gewiss nicht anzunehmen. Der Begriff der Arbeit wird als geläufig leicht Eingang finden, aber, weil die Nötigung fehlt ihn exact zu denken, immer oberflächlich aufgefasst bleiben. Zur Verbergung der unentbehrlichen empirischen Wurzeln der Theorie haben wir gar keinen Grund. Eine Rechtfertigung für die veränderte Wahl des Ausgangspunkts sucht der Verfasser in einem vermeintlichen Mangel bei gewöhnlicher Definition des Gleichgewichts. Diese werde für einen Punkt, ausgehend vom Zustand der Ruhe gegeben, treffe aber beim System und in der Bewegung nicht zu. Das liegt aber nur am unrichtigen Verfahren. Wenn ein System von Kräften, das im einen Zustande der Objecte eine Wirkung von Nullkraft hat, im andern nicht null wäre, so würde der ganze Kraftbegriff unbrauchbar sein. Ist die durchgehende Anwendbarkeit nicht ohne Axiom

beweisbar, so kann es nichts helfen das Axiom zu verschweigen. Das Gleichgewicht der Kräfte am Körper aber muss notwendig auf das an den einzelnen Punkten zurückgeführt werden, also mit Berücksichtigung der innern Spannungen. Es folgt nun die ausgearbeitete Darlegung der Principien der Mechanik. Der Verfasser will dieselbe noch nicht als ein Muster hinstellen. In der Tat findet man nach einigen Seiten hin eine ungewöhnliche Gründlichkeit und logische Aufmerksamkeit; es ist dann offenbar seine Meinung, dass eine gleiche auch nach andern Seiten hin vorbehalten bleibt. Zuerst wird der Unterschied von Kinematik und Mechanik erörtert. Erstere tritt hier so auf, als ob sie der reinen Geometrie nicht angehörte, da von dieser gar nicht die Rede ist, bloss weil die Zeit darin genannt wird; dass aber die Zeit in ihr keine Rolle spielt, und dass die Kinematik in aller geometrischen Doctrin eingebürgert ist, bleibt unbeachtet. So ist denn auch der hier betonte Satz von der Transponibilität des Raumes ein unentbehrliches Postulat der elementarsten Geometrie, da Congruenz ohne denselben keinen Sinn hat. Das Ausgehen von der Kinematik dient aber dem Verfasser als Gelegenheit die Notwendigkeit der Masse und der Kraft zu erklären. Nachdem nun der Vortrag im eigentlichen Gebiet der Mechanik angelangt ist, findet man sich doch in der Erwartung sehr getäuscht, dass er nach allen Betrachtungen und Motivirungen endlich in einen regelmässig fortschreitenden Lehrgang einlenken werde. Die Betrachtungen hören bis Ende nicht auf. Soviel nun auch in diesen sich richtige Auffassung kund giebt, so tritt ihre Wahrheit doch eigentlich nur für den zutage, der mit dem Gegenstand ganz vertraut ist, und der alsdann noch viel an der Darlegung vermissen wird. Ein Anfänger wird schwerlich im Stande sein dem Vortrag zu folgen, viel weniger eine Uebersicht zu gewinnen. Nach allem stellt sich die Schrift dar als Studien über die logischen Erfordernisse in der elementaren Behandlung der Principien der Mechanik. H.

Grundriss der Differenzialrechnung. I. Theil. Von C. v. Brand, Königl. Baumeister. Pyritz 1880. Hugo Backe. 103 S.

Das Vorliegende ist dadurch bemerkenswert, dass es sich principiell und wesentlich auf das „Zeno'sche Sophisma" stützt, die Schlussfolge „vollständig logisch richtig" nennt, auf Grund desselben die begrenzte Teilbarkeit der Zahl behauptet und den gedachten kleinsten Teil, als absolut constante Grösse, zum Wert des Differentials der unabhängigen Variabeln macht. Der Fehler des Zeno'schen Schlusses wird gewöhnlich allein in der irrigen Meinung gefunden, die Summe unendlich vieler Glieder sei unendlich gross. Hiernach wäre es zu Zeno's Zeit unmöglich gewesen den Fehler zu enthüllen.

In der Tat aber hat Zeno nach elementarster Logik die Bedingung eines Schlusses gar nicht erfüllt: es fehlt darin das zweite Glied. Ergänzt man dieses, so lautet die Schlussfolgerung: Wenn Achilles da ankommt, wo die Schildkröte war, ist die Sch. schon weiter. Nun befindet sich aber Ach. in aller Folgezeit in einem Punkte, wo die Sch. war. Folglich holt er sie in aller Folgezeit nicht ein. Nur das erste Glied wird bewiesen, das zweite ist offenbar grundlos und wird gar nicht ausgesprochen. Jeder Athener hätte also die Lücke bemerken können. Aber wol konnte man damals wie noch heute darauf speculiren, dass geistreichen, delicaten Leuten die Pedanterie des engen Anschlusses mit Wiederholung der Worte zuwider ist, und dass sie darum gern auf Anhörung des zweiten Gliedes verzichten. Erst wenn jemand versucht hätte, die Ergänzung zu beweisen, würde er vielleicht auf die obige Frage gestossen sein, ob die Summe unendlich vieler Glieder unendlich gross sein muss. Der Verfasser sagt nun im Vorwort, seine Darstellung weiche in gewissen, genannten Paragraphen von der gewöhnlichen ab. Diese behandeln gerade das Principielle und sind unrichtig, daher ist die Bearbeitung überhaupt wertlos, und wir wollen wünschen, dass die Herausgabe des in Aussicht gestellten II. und III. Teils unterbleiben möge.

Hoppe.

---

## Berichtigungen.

T. LXV. S. 445. Z. 2 v. unt. fehlt die Angabe, dass die (Coord.) des Durchschnittspunkts der Diagonalen mit $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{y}_1$ (bezeichnet sind).
Ebenda S. 447

| | | | |
|---|---|---|---|
| Z. 1 und 5 v. ob. | statt $d$ | setze | $D$ |
| „ 4 „ „ | $\gamma$ | „ | je |
| „ 14 „ „ | $\Sigma(n-1)$ | „ | $\Sigma n$ |
| „ 8 v. unt. „ | $\binom{m}{n}$ | „ | $\binom{n}{m}$ |

# Litterarischer Bericht

## CCLXII.

### Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung. Von Dr. Worpitzky, Prof. an der Königl. Kriegs-Akademie und am Friedrichs-Werderschen Gymnasium zu Berlin. Mit 81 in den Text eingedruckten Holzschnitten. Berlin 1880. Weidmann. 784 S.

Das Vorliegende ist ein selbständig durchdachter und durchführter Versuch einer Lehrmethode und insofern weit verdienstlicher und höher zu schätzen als neue Bearbeitungen mit Anlehnung an herkömmliche Methoden. Der am meisten hervortretende Unterschied gegen die gewöhnlichen Lehrbücher gleichen Inhalts ist die Verbindung der Differential- und Integralrechnung zu einem einzigen Ganzen. Der Integralbegriff wird nämlich sehr früh eingeführt nebst der Begründung der principiellen Sätze über bestimmte Integrale, und bleibt fortan ein Organ der weitern Entwickelung der Theorie. Schon vorher ist eine sehr frühe Einführung des Differentialbegriffs bemerklich, der nur eine geringe Auseinandersetzung über Functionen vorausgeht. Sowol diese, wie auch ein grosser Teil des Folgenden beschränkt sich auf algebraische Functionen, zu denen übrigens der Verfasser mit Unrecht die Potenz als Function der Basis rechnet. Die Potenz wird hier gemäss ihrer elementaren Bildung mit Beibehaltung aller Stufen der Begriffserweiterung dargestellt, und bleibt demnach fortan ein zusammengesetzter, nicht homogener Begriff. Auch die Differentiation der Functionen mehrerer Variabeln wird auffallend früh, nachdem nur weniges über die der Functionen einer

Variabeln gesagt ist, zugezogen. Nach den Anfangsgründen der Differential- und Integralrechnung ist die Reihenfolge der behandelten Themata: Mehrfache Differentiation und Integration; der Taylorsche Satz mit seinen nächstliegenden Anwendungen (unter denen sich aber die Theorie der Maxima und Minima nicht findet); Endlichkeit der Integrale mit unendlichem Integrationsintervall oder unendlichem Differential; Convergenz der unendlichen Summen und Producte; die complexen Zahlen und die durch ihre Einführung bedingten Functionen (Kreisfunctionen); Differentiation und Integration nach complexen Variabeln; die algebraischen Gleichungen; Grenzwert der Functionen an den Stellen willkürlicher und sinnloser Substitutionswerte; Zerfällung in Partialbrüche und Integration der rationalen algebraischen Functionen; Integration der irrationalen algebraischen Functionen; Integration transcendenter Functionen; numerische Berechnung der Werte von bestimmten Integralen; Maxima und Minima stetiger Functionen. Zum Schluss werden geometrische Anwendungen, erst für die Ebene, dann für den Raum gegeben; es sind dies ausgewählte Partien aus der analytischen Geometrie. Die Anordnung ist hiernach eigentümlich; auch von dem Deductionsverfahren gilt ein gleiches. Es fragt sich daher, ob im ganzen oder einzelnen die getroffene Wahl empfehlenswert ist. Die Verbindung der Integral- mit der Differentialrechnung rechtfertigt der Verfasser einesteils durch die begriffliche Einheit beider in ihrer reciproken Beziehung, anderenteils durch die Notwendigkeit gewisser Integrale für manche Sätze, namentlich für den Taylorschen Satz. Beide Gründe sind nicht zwingend, der erstere selbstverständlicherweise, doch auch der letztere, da man ja den Taylorschen Satz mit Lagrange'schen Reste in grossem Umfange gebrauchen kann, die Anwendung des Integralausdrucks für den Rest aber in der gesonderten Integralrechnung ihre beste Stelle findet. Gegen die Verbindung sprechen folgende Gründe. Inverse Operationen zugleich zu behandeln ist gegen allen durch Erfahrung erprobten Gebrauch. Ob ein Semester für beide ausreicht, wonach der Verfasser hierbei fragt, mag als unwesentlich ausser Betracht bleiben. Immer aber wird, und das ist wol das wichtigste, die Theorie der Uroperation bis zu einer gewissen Reife der Entwickelung gebracht, soweit möglich alles zugehörige erschöpfend erörtert, bevor man zur inversen Operation schreitet. Diesen Gesichtspunkt findet man im Vorliegenden ganz unberücksichtigt. Von allem, was der Einführung der Integrale vorausgeht, Lehre von den unendlichen Grössen, Grenzwerten, Functionen und Stetigkeit, endlich Differentiation, wird nur gerade so viel vorgetragen als zur Erklärung und Begründung des Folgenden notwendig ist, der übrige grösste Teil kommt später einzeln in andre Gegenstände verweht. Es scheint daher fast alles nur dienendes Glied der Deduction zu sein, um etwa die Theorie der

Complexen, die vielleicht als Selbstzweck übrig bleiben möchte, schliesslich zu ergeben. Ein so grosser Mangel an Systematik und Uebersichtlichkeit war nun wol nicht bloss Folge des in Rede stehenden beliebten Princips und hätte gewiss vermieden werden können. Letzteres selbst betreffend muss man nun fragen: Giebt denn die vorliegende Bearbeitung wirklich Zeugniss von der innigen Zusammengehörigkeit beider inversen Operationen? Gewöhnlich beginnt man die Integralrechnung mit der unbestimmten Integration der Functionen einer Variabeln durch Darstellung in bekannten Functionen. Die inverse Beziehung liegt dann von Anfang offen zutage; aber da aus der Differentialrechnung nur einige Formeln in Anwendung kommen, Zweck und Interesse hingegen bei der Integrationsaufgabe eine ganz verschiedene Richtung verfolgt, so ist an Verschmelzung beider Doctrinen nicht zu denken, und es giebt zwischen ihnen keine Beziehung, die durch gesonderte Behandlung verdunkelt werden könnte. In der gegenwärtigen Bearbeitung, welche mit der Darstellung des bestimmten Integrals als Grenzwert einer Summe beginnt, ist die Verschiedenheit im Zuwerkegehen noch weit grösser: die inverse Beziehung muss erst bewiesen werden, findet nicht einmal allgemein statt, die Rechnung ist ganz andrer Form und viel complicirter als in der Differentialrechnung. Dies hat im Interesse grösserer Beteiligung am Studium der Differentialrechnung den enormen Nachteil, dass dadurch die Schwierigkeit des Anfangs bedeutend vermehrt wird. Der Anfänger muss glauben, der lange Weg durch alle Deductionen der Integralsätze sei zur Einführung in das Gebiet der Differentialrechnung notwendig, während es doch sonst leicht möglich ist alle Schwierigkeiten des Anfangs-Studiums zu beseitigen bis auf die eine, welche der Uebergang von der Gewohnheit jede Grösse als Constante zu betrachten zur Auffassung als Function Vielen verursacht. Was also durch die Verbindung der zwei Disciplinen gewonnen werden sollte, liess sich auch ohne sie gewinnen; Vieles und Wichtigeres ist dadurch verloren gegangen.

Die Deductionsmethoden sind im Verhältniss zum Gegenstande einfach, was bei den selbsterdachten gewiss Anerkennung verdient, in gewissem Umfang auch streng. Dagegen kommt eine grosse Anzahl von Schlüssen vor, deren Bündigkeit schwerlich einleuchtet, die sich aber sämmtlich durch denselben Fehler erklären lassen. Die Lücken der Beweise schliessen sich, während indes die Sätze selbst eine gewisse Unvollständigkeit behalten, wenn man folgendes Axiom einsetzt: Hat eine durch beliebig viele Operationen definirte Function einen bestimmten Grenzwert, so ist dieser gleich dem Resultat jener Operationen angewandt auf die Grenzwerte der Elemente, welche in der Function vorkommen. Dieser Satz ist weder bewiesen noch aus-

gesprochen. Er ist aber sowenig selbstverständlich, dass man sogar Mühe hat nur den Umfang der Behauptung zu übersehen. Auf ihn stützen sich manche, an sich sehr leicht zu beweisende, jedenfalls jedoch eines Beweises bedürfende Sätze, z. B. dass das Product der Grenzwerte gleich dem Grenzwert des Products ist, aber auch Beweise, die exact schwerer zu führen sind, z. B. der für die Reduction des vollständigen Differentials auf die partiellen Differentialquotienten. In allen diesen Deductionen ist also die scheinbare Einfachheit eine Täuschung. Nun wird aber, selbst die Richtigkeit des Axioms angenommen, nicht einmal so viel bewiesen, als bei specieller Behandlung jener Sätze hervorgeht; denn letztere ergiebt meistens ohne Voraussetzung die Existenz des Grenzwerts zugleich mit dessen Ausdruck, während Worpitzky die Existenz als schwebende Bedingung stehen lässt. Nach ihm würde für gegebene $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ zur Folgerung $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}$ erst noch besonders bewiesen werden müssen, dass der Grenzwert $\frac{\partial z}{\partial x}$ existirt. Es wird nämlich ganz richtig bemerkt, dass sich allgemeine Sätze über die Existenz der Differentialquotienten nicht aufstellen lassen. Anstatt aber auf den allein fruchtbaren Weg der Verfolgung der besondern Bildungsgesetze hinzuweisen, verzichtet der Verfasser durchweg auf Erledigung der Frage, im speciellen wie im allgemeinen. Demnach ist der Mangel ein doppelter, einerseits in der Bündigkeit des Beweises, andrerseits in der Ausdehnung der Thesis, welche bei gewöhnlichem Verfahren in befriedigendem Umfang absolut gestellt werden kann, hier jedoch immer nur bedingt erscheint. Ueberhaupt hätte es wol vermieden werden sollen leicht zu begründende Dinge auf schwerer verständliche zu stützen, wie z. B. die Differentiation der Producte auf die der Functionen mehrerer Variabeln. Manche Theorien werden in der Tat in umfassender Form besser verstanden als specialisirt und zerspaltet, nämlich wenn sie durch einfache, elegante Schlussweise hervorgehen. Wo es aber nicht der Fall ist, darf man nicht den erfolgreichern Weg aus Princip verschmähen.

Wenn im Vorstehenden dem Herkömmlichen vor der neuen Einführung fast durchweg der Vorzug gegeben worden ist, so war das nicht beabsichtigt. Nicht nur hinsichtlich solcher Lehrbücher, welche sich bis in neuste Zeit gegen realisirte Verbesserungen der Methode unempfänglich gezeigt haben, sondern auch hinsichtlich des im ganzen erreichten didaktischen Standpunkts soll für weitere Verbesserungsversuche noch immer ein offenes Feld bleiben. Sowol der im Gegenwärtigen bezeugte Anschluss an die Erzeugnisse der Neuzeit, z. B.

an die unabhängig vom Grenzwert definirte Einführung der unendlichen Grössen (obwol die Behandlung kaum mehr als eine Anerkennung im Princip ist und die Entwickelung der Theorie vermissen lässt) als auch manche eigene methodische Gedanken konnten nur wegen ihrer Verbindung mit sehr hervortretenden Mängeln nicht wol ans Licht gezogen werden. So ist es gekommsn, dass nur von letztern die Rede war. Hoppe.

A treatise on the theory of determinants and their applications in analysis and geometry. By Robert Forsyth Scott, M. A. of Lincoln's Inn, Fellow of St. John's College, Cambridge. Cambridge 1880. Deighton, Bell and Co. (London: Cambridge Warehouse. Leipzig: F. A. Brockhaus.) 251 S.

Das Vorliegende ist ein Lehrbuch der Determinantentheorie, welches sich in hohem Masse durch Sorgfalt und Eleganz, sachgemässe Methode und verständlichen Vortrag auszeichnet. Der Verfasser scheint die Litteratur recht allseitig studirt, die Form der Darstellung hingegen und den Lehrgang, welcher zwar der natürlichste und consequenteste, aber keineswegs der gewöhnlichste ist, selbständig gewählt zu haben. Das Buch beginnt mit Beobachtungen an Permutationen, auf denen die Bildung und Behandlung der Determinanten beruhen. Die Entwickelung dieses wie jedes folgenden Teiles der Theorie ist unmittelbar allgemein; Specialisirungen folgen erst nach. Die elementaren Hauptsätze der Determinantenrechnung, einschliesslich der Auflösung der linearen Gleichungssysteme werden ohne Zerfällung in Unterdeterminanten durch directe Schlüsse hergeleitet. Wenn so wie hier das Hauptgewicht der Unterweisung auf die der Determinantentheorie eigentümlichen Schlüsse gelegt und diese Schlussweise mit Allseitigkeit und Genauigkeit erörtert, dann durch Beispiele erläutert wird, kann es nicht fehlen, dass der Leser auch ohne viel Vorkenntnisse genügende Vertrautheit mit der Determinantenrechnung erlangt. Die Reihenfolge der behandelten Themata ist diese. Einleitung, enthaltend alle Erklärungen und Festsetzungen über das Bildungsgesetz, die Vorzeichenbestimmung u. s. w. Allgemeine Eigenschaften der Determinanten, enthaltend das gesammte elementare Rechnungsverfahren, auch hinsichtlich der Gleichungen. Unterdeterminanten. Multiplication der Determinanten, ausgehend von der Bildung zusammengesetzter Systemtafel, aus der ein dreifacher Satz hergeleitet wird, im einen Fall eine Determinante null, im zweiten das Product, im dritten eine Summe von Producten ergebend, jenachdem die Urtafel ungleichseitig oder Quadrat ist. Sätze über die zusammengesetzte Systemtafel (compound array). Besondere Formen der Determinanten. Kubische Determinanten. Anwendungen, nämlich:

Theorie der Gleichungen und Eliminationen. Rationale Functionaldeterminanten. Jacobi'sche und Hesse'sche Determinanten. Theorie der Functionen 2. Grades. Determinante von Functionen derselben Variabeln. Kettenbrüche. Anwendungen auf Geometrie. H.

Die Recursionsformeln für die Berechnung der Bernoullischen und Euler'schen Zahlen. Von A. Radicke. Halle a. S. 1880. Louis Nebert. 35 S.

Die Bernoullischen Zahlen, Eulerschen Zahlen (d. i. Secantencoefficienten) und Tangentencoefficienten werden definirt als die Coefficienten der Entwickelung der Functionen

$$\frac{x}{e^x-1}, \quad \frac{2}{e^x+e^{-x}}, \quad \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$$

Die Theorie der letzten ist in der der ersten, auf die sie sich reduciren, enthalten. Die Entwickelung der Recursionsformeln auf dieser Grundlage ist an sich ziemlich einfach, erhält aber eine unübertreffliche Uebersichtlichkeit durch den Gebrauch der von E. Lucas angewandten Symbole, durch welche sich die Functionen in der Form $e^{bx}$ darstellen, so zu verstehen, dass die Exponenten von $b$ in Indices zu verwandeln sind. Die Recursionsformeln, welche so gewonnen werden, sind einesteils diejenigen, welche die $n$te Zahl auf alle vorhergehende zurückführen, anderenteils die von Seidel und Stern entdeckten, welche zwischen einer bestimmten Anzahl successiver Zahlen stattfinden. Der Verfasser glaubte, dass der so nach beiden Richtungen gemachte methodische Fortschritt der Theorie eine systematische Bearbeitung verdiente; diese ist ihm auch sehr wol gelungen.

H.

Elementi di calcolo infinitesimale per R. Rubini. — Parte prima; calcolo differenziale. Seconda edizione riveduta ed aumentata. Napoli 1874. S. Pietro a Maiella. — Parte seconda: calcolo integrale. Seconda edizione riveduta ad aumentata. Napoli 1875. S. Pietro a Maiella. — Complemento al calcolo infinitesimale. Napoli 1880. S. Pietro a Maiella. — 820 S.

Der Verfasser hat sich Hoüel's Cours de calcul infinitésimal zum Muster genommen. Das Buch soll daher, wie sich annehmen lässt, für Italien dieselbe Stelle einnehmen wie dieses für Frankreich, nämlich den Studirenden auf allen Universitäten des Landes die Gesammtheit des mathematischen Wissens geben, das sie sich anzueignen haben. Ob und wie weit es dieser Bestimmung genügen kann, ist eine Frage, die sich der Kritik dadurch entzieht, dass die

Punkte, welche wir für feststehend erachten sollten, mit andern, die von dem specifischen Bedürfniss abhängig sind, zu sehr gemischt und verbunden auftreten. Im Anfang wird das Wesen der Functionen von 1 und mehreren Variabeln erörtert, dabei die Lehre von den unendlichen Grössen, Grenzwerten und der Stetigkeit ziemlich ausführlich, doch nicht besonders gründlich entwickelt. Darauf folgt die Differentiation, sehr specialisirt. Die Frage nach der Existenz eines Differentialquotienten wird durch einen anfänglichen längern Beweis für erledigt erachtet: nur in Specialwerten kann der Differentialquotient fehlen. Die Lehren von der Elimination der Constanten und willkürlichen Functionen, von den Functionen der Complexen und von den Functionsdeterminanten sind mit zu den Principien gerechnet. Als Anwendungen folgen dann: die Reihen, der Maclaurin'sche und Taylor'sche Satz, die Formen $\frac{0}{0}$ etc., die Maxima und Minima, Curven und Flächentheorie. Im zweiten Teile werden erst die Integrationen der Functionen 1 Variabeln als inverse Rechnung vollzogen (die Reduction elliptischer Integrale ohne deren Theorie ist mit aufgenommen). Dann folgt das bestimmte Integral als Grenzwert der Summe, Euler'sche Integrale, Sinus- und Cosinusreihe, Rectification der Curven, mehrfache Integrale; dann die Integration der Gleichungen; dann die Variationsrechnung und die Differenzenrechnung. Beispiele sind in grösserer Anzahl den einzelnen Abschnitten beigefügt. Der Ergänzungsband behandelt einzelne Gegenstände der Integralrechnung.

H.

Neue Studien über die Integration linearer Differentialgleichungen. Erste Fortsetzung. Von Simon Spitzer. Wien 1880. Carl Gerold's Sohn. 96 S.

Zuerst werden aus bekannten Lösungen von Gleichungen 2. Ordnung, die von Gleichungen 4. O. hergeleitet, in denen zu den 2 Particularintegralen 2 analoge hinzutreten; dann Specialfälle von der Form

$$(a_2+b_2x+c_2x^2)y''+(a_1+b_1x+c_1x^2)y'+(a_0+b_0x+b_0x^2)y=0$$

dann die Gleichungen

$$xy'''-ay''-bxy=0$$
$$(a_2+b_2x+c_2x^2)y''+(a_1+b_1x)y'+a_0y=0$$
$$xy^{(n)}+\lambda y^{(n-1)}=x^m(xy'+\mu y)$$

nebst einigen andern behandelt.

H.

## Geometrie.

Lehrbuch der analytischen Geometrie des Punktes, der Geraden und der Kegelschnitte, dann der Strahlbüschel und Punktreihen (projectivische Geometrie) mit Uebungsaufgaben. Von Wilhelm Friedrich Schüler, Rektor der Realschule in Freising. Mit vier Tafeln in Steindruck. München 1879. Theodor Ackermann. 237 S.

Das Vorliegende wird mit Recht analytisch genannt, sofern es die Lösung einer von aussen gestellten Aufgabe in allgemeinster Auffassung zum Ziele nimmt und die Lösungsmittel in rationalem Fortschritt zu schaffen sucht. Auch wird das Ziel als ein specielles charakterisirt durch Beifügung der besondern Gegenstände auf dem Titel. Nach diesen zu urteilen behandelt das Lehrbuch die Analysis der neuern synthetischen Geometrie. Die Tendenz ist somit die entgegengesetzte von der, welche man sonst zu hegen und zu verfolgen pflegt. Während es meist für das Ideal der Gestaltung der synthetischen Geometrie gehalten wird, dass sie auf rein geometrischen Grunde steht, werden hier ihre Grundlagen geflissentlich auf Rechnung zurückgeführt. Wenn ein solches Vorgehen vielleicht Manchen nicht gefällt, so ist es doch gewiss berechtigt und dient der Wissenschaft, die Einseitigkeit der Auffassung zu heben, eine unnötige Kluft zwischen der analytischen und synthetischen Geometrie auszufüllen, das eine oder andere Ergebniss der letztern als identisch mit solchen der erstern zu enthüllen und so den durch verschiedene Benennung geschaffenen Nimbus zu entfernen. Auch kann es wol auf das Studium der Geometrie die günstige Wirkung haben, dass die analytische Geometrie vor der synthetischen betrieben wird, wodurch der Studirende vor der Gefahr bewahrt bleibt sich in dem unbegrenzten Bereich der letztern zu verlieren ohne von der Existenz der erstern, oder doch von ihrer Notwendigkeit eine Ahnung zu haben. Mag sein, dass wir hiermit grösseres in die Absicht des Verfassers legen als er wirklich im Sinne hatte, doch motivirt sich das Zuwerkegehen im einzelnen am leichtesten auf diese Weise. Nicht zu billigen ist es, dass weder auf dem Titel noch im Anfang des Buchs gesagt wird, dass es sich ausschliesslich um die Geometrie der Ebene handelt. Die Nennung der Gegenstände, welche zwar sämmtlich auf der Ebene Platz finden, aber auch im Raume Bedeutung haben, macht es wahrscheinlich, dass nur von der Ebene die Rede ist, ohne doch die offene Erklärung zu ersetzen. Zuerst werden die rechtwinkligen Coordinaten erklärt; bald nachher die schiefwinkligen eingeführt. Die Theorie der letztern steht hier einmal an ihrer richtigen Stelle, wo ihre Zuziehung durch ihre Bestimmung für die Theorie der Kegel-

schnitte und Collineationen gerechtfertigt ist. Auch ist es ganz correct, dass das rechtwinklige System als das umfassende dem schiefwinkligen, das nur speciellen Zwecken dient, vorangeht und nicht, wie es häufig aus irriger Betrachtungsweise dargestellt wird, als besonderer Fall des schiefwinkligen auftritt. Es werden nun nach einander der Punkt, die Kegelschnitte, die Ellipse, Hyperbel, Parabel, die allgemeine Gleichung 2. Grades, das Strahlbüschel, zwei Strahlbüschel mit besonderer Entwickelung derjenigen Seiten, welche für die Steiner'sche Theorie Bedeutung haben, behandelt. Die Kegelschnitte werden geometrisch (wiewol ohne Beziehung zum Kegel) definirt; dann aber wendet sich die Entwickelung der Eigenschaften sogleich zur Rechnungsform. Auf jeden der genannten Abschnitte folgen Uebungsaufgaben. H.

Synthetische Geometrie. Von Wilhelm Gallenkamp, Direktor der Friedrichs-Werderschen Gewerbeschule in Berlin. I. Abteilung: Die Kegelschnitte in elementar-synthetischer Behandlung. Mit einer Figurentafel. Iserlohn 1889. J. Baedeker. 33. S.

Das Buch enthält eine wol geordnete Reihe von Erklärungen und Sätzen ohne Beweis mit einigen Angaben über das, woraus sie hervorgehen. Grössen- und Lagenbeziehungen sind nicht getrennt. Ellipse, Hyperbel und Parabel werden zuerst nach einander planimetrisch definirt und behandelt; im zweiten Abschnitt werden sie als Schnitte eines Umdrehungskegels abgeleitet und ihre Beziehungen zum Kegel entwickelt. H.

## Praktische Geometrie, Geodäsie.

Praktische Anleitung zum Gebrauche der graphischen Methoden bei Querschnittsberechnungen. Von Max Ebel, Lehrer an den technischen Staatslehranstalten zu Chemnitz. Mit 9 lithographischen Tafeln. Freiburg i. Br. 1880. Herder. 65 S.

Das Buch ist bestimmt den graphischen Methoden weitere Verbreitung in technischen Mittelschulen zu verschaffen. Es werden die Regeln zum Zeichnen von Kräfteplänen und Seilpolygonen hergeleitet und in einfache, leicht zu behaltende Sätze gefasst, mit deren Hülfe die Constructionen sicher und leicht auszuführen sind. Die auf einen Stab wirkenden Kräftn werden in 4 Gruppen geordnet: 1) Kräfte, deren Richtungen unter sich parallel in einer durch die Schwerpunktslinie (Mittellinie) gehenden Ebene liegen; 2) desgleichen in einer zu

jener Ebene normalen Ebene; 3) Kräftepare in Ebenen normal zur Mittellinie; 4) Kräfte in der Mittellinie. Das Seilpolygon der 1. und 2. Gruppe liefert die Bruchmomente, sowie die auf Abscherung und Zug oder Druck wirkenden Kräfte, in den respectiven Ebenen; die 3te beansprucht das Körperstück auf Torsion; die 4te auf Zug oder Druck. Die Kenntniss der einfachsten Sätze aus der Mechanik wird vorausgesetzt. Beispiele an Gitterwerken, Dachstühlen, Betriebsvorrichtungen u. a. verbunden mit den gut gewählten und vortrefflich ausgeführten Abbildungen machen das, was der allgemeinen Erörterung an exactem Ausdruck mangelt, deutlich. H.

Die Tachymetrie mit besonderer Berücksichtigung des Tachymeters von Tichy und Starke. Für Terrain- und Trace-Studien bearbeitet von Anton Schell, k. k. Professor. Mit 2 Tafeln und 27 Figuren. Wien 1880. L. W. Seidel u. Sohn. 93 S.

Die Tachymetrie wird erklärt als die Messung eines Terrains von einem Punkte aus mit distanzmessendem Fernrohr nach aufgestellten Latten hin. Nach kurzer Darlegung der Theorie folgt die Beschreibung des Instrumentes, des Stativs und der Latte, dann der Gebrauch des Tachymeters bei Bestimmung der Horizontaldistanz und Höhe eines Punktes, der Messung der Horizontal- und Verticalwinkel; dann die Eigenschaften und die Rectification des Tachymeters; dann werden 5 Fehlerquellen behandelt. Im 2. Teil folgt die tachymetrische Aufnahme, Feld- und Hausarbeiten (Berechnungen und Constructionen). H.

Die weitere Ausführung der rechtwinkligen Projektionsart, nebst einem Anhang über die projektivischen Verwandtschaften der neuern Geometrie und insbesondere über die centrische Collineation und Affinität, als Lehrmittel für Lehrer und Schüler an Oberrealschulen, Industrie- und Gewerbeschulen und andern mittlern und höhern gewerblichen und technischen Lehranstalten, sowie zum Selbststudium. Von G. Delabar. Mit 183 Figuren und 40 lithographirten Zeichnungstafeln. 3. Heft der Anleitung zum Linearzeichnen. Zweite, vermehrte und verbesserte Auflage. Freiburg i. Br. 1879. Herder. Queroctav 222 S.

Das Buch enthält zuerst Lehrsätze und Aufgaben über die rechtwinkligen Projectionen der Punkte, Geraden, Ebenen und ebenen Flächenfiguren im Raume; dann Durchschnittsconstruction der Körper mit Ebenen, nebst ihren Entwickelungen; dann Construction der Tangenten an krumme Linien und der Tangirungsebenen an krumme

lächen; **dann** Durchschnittsconstructionen der Körper mit Körpern; ann **Anwendung** auf Dachzerlegungen, Rohrenentwickelungen, Geölbeconstructionen, Kartenprojectionen und Sonnenuhrenconstructionen; **dann in** einem Anbau das Wichtigste über die projectivischen Verwandtschaften. Namentlich ist es dieser Anhang, der in der neuen uflage **hinzukommt**, ausserdem mehreres Einzelne. H.

**Die wichtigsten** Steinkonstruktionen als Lehrmittel für Lehrer und **Schüler** an Real-, Industrie-, Gewerbe-, Bau-, Handwerker- und Fortbildungsschulen und andern gewerblichen und technischen Lehranstalten, sowie zum Selbststudium. Von Professor G. Delabar, Conrector der Kantonsschule und gew. Vorstand der Fortbildungsschule in St. Gallen. Mit 220 Figuren auf 28 lithographirten Zeichnungstafeln und 12 Figuren - Holzschnitte. Freiburg i. Br. 1879. Herder. 108 S.

Das Buch enthält zuerst Grundbegriffe, Grundsätze und Hauptregeln der Steinconstructionen im allgemeinen, und handelt dann von den verschiedenen Mauern, dann von den Mauerbogen und Gewölben, dann von den Treppen. Es betrifft ausschliesslich den Bau; das Zeichnen ist hier nicht Gegenstand der Unterweisung. H.

Graphische Barometertafeln zur Bestimmung von Höhenunterschieden durch eine blosse Subtraction. Von Dr. Ch. August Vogler. Entworfen von Hugo Feld. Braunschweig 1880. Vieweg u. Sohn. Gross 4⁰. 8 S. Text, 8 S. Tafeln.

Die Bestimmung berücksichtigt Barometer- und Thermometerstand (Quecksilberhöhe). Die Tafeln geben die 2 Höhen einzeln durch den Schnitt je zweier Linien, die den beiden genannten Entrees entsprechen. Zugrunde gelegt sind die numerischen Tafeln von Biot (Paris 1811). Die vorausgehende Erläuterung giebt zuerst die Formel, dann die Construction der Tafel mit Besprechung ihrer Genauigkeit, dann die Gebrauchsanweisung. H.

# Mathematische und physikalische Bibliographie.

CLIV.

### Geschichte der Mathematik und Physik.

Briefwechsel zw. Gauss u. Bessel. Leipzig, Engelmann. 16 Mk

Kekulé, R., das Leben Friedr. Gottl. Welcker's. Leipzig, Teubner. 10 Mk. 80 Pf.

### Methode und Principien.

Ruppert, H., z. Anwendg. d. Pestalozzi'schen Methode in mathem. Unt. Langensalza, Beyer & S. 40 Pf.

### Lehrbücher, Sammlungen und Tabellen.

Bardey, E., method. geordn. Aufgabens. üb. alle Theile d. Elem.-Mathematik. 9. Afl. Leipzig, Teubner. 2 Mk. 70 Pf.

Jelinek, A., Katech. d. Math. f. Lehrer- u. Lehrerinn-Bildungsanst. 2. Thl. Wien, Bermann & A. 2 Mk. 20 Pf.

Kovačević, F., Sammlg. v. Auf. aus d. galvan. Elektrizitätslehre. Prag, Dominicus. 3 Mk.

Lambert, P., tabell. Zusammenst. d. Result. a. d. angew. Festigkeitsl. etc. Zürich, Verlags-Mag. Geb. 15 Mk.; auf Leinw. in Mappe 18 Mk.

Martus, H. C. E., mathem. Aufg. z. Gebr. in d. ob. Kl. höh. Lehranst. 1. Thl. 5. Afl. Leipzig, Koch. 3 Mk. 60 Pf.

Rüegg, H. R., 600 geom. Aufgaben. Zürich, Orell, Füssli & Co. Cart. 60 Pf.

Sachse, J. J., Mathematik f. dtsche. Lehrerbild.-Anst. u. Lehrer. Result. zu d. Aufg. z. 2. Thl. Leipzig, Siegismund & V. 1 Mk. 80 Pf.

Sammlung. arithm. u. geom. Aufg. z. Vorb. auf d. Lehrerinnen-Prüfung. Düsseldorf, Deiters. 1 Mk.

# Litterarischer Bericht
## CCLXIII.

---

### Praktische Geometrie, Geodäsie.

**Die Terrainlehre, Terraindarstellung und das militärische Aufnehmen. Mit Berücksichtigung der neuesten Bestimmungen der Königl. preussischen Landesaufnahme bearbeitet von Kossmann, Kgl. preuss. Major und Battaillonscommandeur. Mit über 100 Figuren in Holzstich. Fünfte, sehr verbesserte Auflage. Potsdam 1890. A. Stein. 288 S.**

Seit dem Erscheinen der 4. Auflage dieses Buchs sind für die Arbeiten der topographischen Abteilung der Landesaufnahme so vielfache abändernde Bestimmungen ergangen, welche in der vorliegenden 5. Auflage Berücksichtigung finden mussten, dass dieselbe in dem 2. und 3. Hauptteile „Theorie des Planzeichnens“ und „militärisches Aufnehmen“ wesentliche Aenderungen und Zusätze gegen die 4. Auflage aufweist. Dieselben beziehen sich vorzugsweise auf die Festsetzungen über den Normal-Höhenpunkt, über die Verwendung der neuen Kotentafeln vom Jahre 1876 für die Höhenbestimmungen der topographischen Arbeiten, über den Gebrauch der zum Teil veränderten Farben für die Illumination der Messtischblätter und Pläne, und auf die Beschreibung der [illegible] eingeführten neuen Generalstabs-Aufnahmeinstrumente. Den Instrumenten ist ferner der Breithaupt'sche Messtischapparat vom Jahre [illegible], welcher sich zur Verwendung für die ersten praktischen Aufnahmeübungen sehr brauchbar erwiesen und deshalb bei den meisten Kriegsschulen Aufnahme gefunden hat, hinzugefügt worden. [illegible] „genetische Skizze [illegible] Terrainlehre“ vom Jahre [illegible]

darauf basirte Anlage der Einteilung und Begrenzung der hier abgehandelten Gegenstände teilweise geändert worden. Eine solche wesentliche Aenderung hat der 1. Hauptteil „die Terrainlehre" dadurch erfahren, dass, dem praktischen Bedürfniss entsprechend, der Abschnitt über Terrain-Recognoscirungen vollständig umgearbeitet und bedeutend erweitert, während der Abschnitt VI. der 4. Auflage: „Einige Angaben aus der Geologie und physischen Erdkunde," — als dem eigentlichen Thema zu fern liegend, weggelassen worden ist. Sodann hat der Paragraph über die Bedeutung der Eisenbahnen für militärische Zwecke eine bedeutende Erweiterung erfahren. Auch in dieser Auflage sind neue Figuren überall da hinzugekommen, wo sie zum Verständniss der neuen Textangaben, besonders beim Selbstunterricht erforderlich erschienen. Das Buch besteht aus 3 Teilen. Der erste, die Terrainlehre, behandelt die Orographie, die Hydrographie, die allgemeine Topographie, die militärische Bedeutung des Terrains, die Recognoscirung; der zweite, das militärische Planzeichnen, allgemeine Begriffe, die Theorie der Bergzeichnung, die Zeichnung der Situation, Plan and Croquis, Anforderungen und Entwurf, das Copiren und Vervielfältigen von Plänen und Karten, Uebungen im Planlesen; der dritte, das militärische Aufnehmen, den Messtisch, die Kippregel, die Elementar-Operationen mit denselben, die Aufnahme des Terrains im Bereiche einer Messtischstation, das Stationiren unter besondern Umständen, die geometrische Netzlegung, die zusammenhangende Aufnahme, die Triangulation, Projection der Messtischblätter, das Croquiren, Construction und Anwendung einiger Messinstrumente, zu deren Benutzung der Officier unter Umständen genötigt sein kann, einige besondere Arten von Messungen. H.

---

## Mechanik.

Theorie des Erddrucks auf Grund der neueren Anschauungen. Von Dr. phil. Jacob J. Weyrauch, Professor an der Polytechnischen Schule zu Stuttgart. Mit 34 Holzschnitten im Text. Sep.-Abdr. aus der „Allgemeinen Bauzeitung". Wien 1881. R. v. Waldheim. 52 S.

Die Entwickelung der Theorie ist durchweg analytisch. Ueber die Natur des Stoffes werden im Anfang keine Annahmen gemacht; dagegen wird ausschliesslich der Fall betrachtet, dass die freie Oberfläche eine schräge Ebene sei, und dass ein zu dieser normaler Verticalschnitt den ganzen Körper repräsentiren könne. Es werden auf solchem Grunde die Gleichgewichtsrelationen zwischen den Span-

ungen, der Schwere, der Reibung und Cohäsion gesucht, die Cohäsion ɔfort ausser Betracht gestellt, weil die Reibung erst nach ihrer eberwindung wirksam sein könne. Für seitlich und nach unten nbegrenzten Erdkörper ergeben sich unendlich viele Gleichgewichts-ıstände, aber 2 Grenzzustände, die bei einer unter dem Reibungs-inkel geneigten Oberfläche zusammenfallen. Hierauf werden ver-chiedene seitliche Einschliessungen durch Mauern, glatte und rauho, ingeführt. Die Resultate werden einzeln durch einfache Coustruc-ıonen dargestellt. H.

Études cinématiques. Par M. E. J. Habich, Vice-Président du Comité Centrale du Corps des ingénieurs du gouvernement au Pérou, Directeur de l'école des constructions civiles et des mines à Lima, ancien élève de l'école des ponts et chaussées de Paris. Paris 1879. Gauthier-Villars. 95 S.

Die vorliegenden Studien lassen sich bezeichnen als Gestaltungen der Dynamik eines Punktes in der Ebene. Da keine Verhältnisse verschiedener Massen vorkommen, so war es gestattet die Kräfte nach Division durch die Masse als Beschleunigungen einzuführen. Sieht man dann die Zeit als blossen Parameter an, so gewinnt die Theorie allerdings die formelle Berechtigung sich rein geometrische Kinematik zu nennen, während sie sich doch bei sachlicher Betrachtung, nämlich sofern die Beschleunigung als gegebene Function auftritt, als wirkliche Dynamik zu erkennen giebt. Es werden nun einige Relationen aufgestellt zwischen der Beschleunigung $j$, ihrem Richtungswinkel $\lambda$, der Geschwindigkeit $v$, dem Krümmungsradius $\varrho$, dem Krümmungswinkel $\varepsilon$, u. s. w. Charakteristische Gleichung heisst die Relation zwischen $j$ und $\varrho$. Von den Formeln werden einige Anwendungen auf specielle Bewegungen gemacht. Der zweite Abschnitt handelt von der Verfolgungscurve, der dritte von den Beschleunigungen in der Bewegung einer ebenen Figur in ihrer Ebene, unter einigen speciell gegebenen Bedingungen. H.

## Technik.

Zeitschrift für angewandte Elektricitätslehre mit besonderer Berücksichtigung der Telegraphie, des elektrischen Beleuchtungswesens, der Galvanoplastik und verwandter Zweige. Herausgegeben von Dr. Ph. Carl, Professor der Physik an der königl. Kriegs-Akademie in München, Herausgeber des „Repertorium der Experimental-Physik".

Telephonnetz in d. Verein. Staaten; in Hamburg. Bohm, el. Lampe. Gülcher, el. Lampe. Maiche, galv. Element. Tchikoleff, el. Lampe. Voller, über d. Nichtexistenz strahlender Materie in d. Crookes'schen Röhren. De Locht, Pantelephon. Blitzschlag in d. Gasleitung d. Stadttheaters in Altona. Anwendung d. Elektr. in d. Augenheilkunde. Britische Kabelflotte. Kleist, Mundstück von Phonographen. Unterirdische Telegr. Gray, elektr. Widerst. d. Glases bei verschiedenen Temp. Telegraph. Verkehr während d. Kölner Domfestes. Telephonlinie zwischen zwei Städten. Crompton, el. Lampe. Trowbridge, Galvanometer. Godfrey, Neuer. an el. Lampen. Uelsmann, Anwend. von Silicinmeisen in galv. Batt. Napoli, elektr. Geschwindigkeitsregulator. Maxim, Regulator für Ströme zur Erzeug. d. elektr. Lichtes. Kabelbruch. *H.*

Zeitschrift für Instrumentenkunde. Organ für Mittheilungen aus dem gesammten Gebiete der wissenschaftlichen Technik. Herausgegeben von E. Abbe in Jena, A. Arzberger in Brünn, C. Bamberger in Berlin, C. M. v. Bauernfeind in München, C. Brahns in Leipzig, R. Fuess in Berlin, H. Haensch in Berlin, E. Hartnack in Potsdam, W. Jordan in Karlsruhe, H. Kronecker in Berlin, A. Kundt in Strassburg, H. Landolt in Berlin, V. v. Lang in Wien, L. Loewenherz in Berlin, S. Merz in München, G. Neumayer in Hamburg, J. A. Repsold in Hamburg, A. Ruepprecht in Wien, K. Schellbach in Berlin, A. Tietjen in Berlin, G. Westphal in Celle. Redacteur: Dr. Georg Schwirkus. Erster Jahrgang 1881. Berlin 1881. Julius Springer.

Die neue Zeitschrift beruft sich bei ihrem Auftreten auf das Bedürfniss eines Organs, welches ausschliesslich der Widerbelebung eines engeren fruchtbringenden Verkehrs zwischen den Vertretern der Wissenschaft und denen der mechanischen Kunst, sowie der Kritik der Instrumente und der Messungsmethoden gewidmet ist. Ein Programm wird für den Anfang nicht aufgestellt. Die Herausgeber wenden sich an den Rat und die Kritik der Fachgenossen, um in der gehörigen Begrenzung und der angemessenen Behandlung der Aufgaben des Organs das Rechte zu treffen. Aus dem Anfang ersieht man, dass wol jedes Jahr ein Band, jeden Monat ein Heft erscheinen zu lassen in Absicht ist. Das 1. Heft enthält auf 40 Seiten 4° folgende Aufsätze. R. Fuess, Normal-Barometer und -Manometer. W. Foerster, Ueber die Beleuchtung von Mikrometer-Einrichtungen. C. Reichel, Ueber Erzeugung und Untersuchung von Mikrometerschrauben. H. C. Vogel, Vermischte Mitteilungen betreffend Spectralapparate. O. Lohse, Rotirender Spectralapparat. H. Kron-

**cker**, Ueber graphische Metboden iu der Psysiologie. Ders. Ein **elegraphische** Kymometer. Kleinere Mitteilungen. Vereinsnach**ichten**. Journal- und Patentlitteratur. Sprechsaal. Die Figuren **und Abbildungen** von Apparaten nud ihrer Teile sind in den Text **gedruckt**. H.

---

## Physik.

Ueber die latente Wärme der Dämpfe. Eine theoretische Betrachtung der Dampf- und Gasform der Körper mit blosser Voraussetzung der Aequivalenz von Wärme und Arbeit. Von Carl Puschl, Capitular des Benedictinerstiftes Seitenstetten. Wien 1879. Alfred Hölder. 52 S.

Es werden znerst die allgemeinen Relationen zwischen Wärme, Druck, Volumzunahme, Temperatur u. s. w. aufgestellt, dann für gesättigte Dämpfe die Hypothese eingeführt, dass die Wärme und ihre ausdehnende Kraft bei constantem Volum der absoluten Temperatur proportional seien, dann der Ausdruck der Wärmemenge eines gesättigten Dampfes und der latenten Verdampfungswärme gegeben. Das Weitere handelt von einer Bedingung der Sättigung, von der Function $\frac{pv}{t}$, von bemerkenswerten Sättigungspunkten, vom Gange der zwei innern Resultanten, von der specifischen Wärme bei bleibender Sättigung, bei constantem Volum und bei constantem Drucke, von der ideellen specifischen Wärme und vom Verhalten der Dämpfe bei Entfernung von der Sättigung. Nach dem Ergebniss muss der Dampf bei beständiger Erwärmung ein Minimum der Dichte erreichen, dann sich zusammenziehen, in den liquiden Zustand zurückkehren und fernerhin keine neue Ausdehnung beginnen. Am Schluss eine erweiternde Betrachtung über die Hypothese. H.

Ueber den zweiten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie. Von Max Planck. München 1879. Theodor Ackermann. 61 S.

Es wird zuerst, bezüglich auf Naturvorgänge überhaupt, erklärt, was ein neutraler, umkehrbarer, und was ein natürlicher, nicht umkehrbarer Process ist. Dieser, vor der Hand nur qualitativ charakterisirte Begriff stellt uns, um verwendbar zu sein, die Aufgabe, die Grösse zu nennen, deren Wert den Zustand, deren Veränderung dem Process repräsentirt, so dass eine Wiederkehr des Wertes einem neutralen, Veränderung in stets gleichem S[illegible] den natürlichen

Process bezeichnet. Anwendbar auf die Wärmevorgänge in einem permanenten Gase hat Clausius diese Grösse gefunden und Entropie genannt, nämlich die Function

$$S = c \log T + \frac{pv}{T} \log v + \text{const.}$$

wo $v$ das Volum, $p$ den Druck, $T$ die absolute Temperatur, $c$ die Wärmecapacität bei constantem Volum ausdrückt. Dass die Entropie nur sich gleich bleiben oder wachsen kann, ist der Inhalt des zweiten Hauptsatzes der Wärmetheorie. Für die Entropie findet sich später der Ausdruck

$$S = \int \frac{\partial U + p\partial v}{T}$$

wo $u$ die Energie, d. i. Wärme plus innerer Arbeit, bezeichnet. Ihre Aufstellung erfordert den Nachweis, dass die Grösse unter dem Integralzeichen ein Differential ist. Der zweite Hauptsatz wird nun durch Vergleichung zweier Zustände eines, dann zweier, dann dreier Gase, dann an beliebigen Körpern dargetan. Der 2. Abschnitt handelt von den Aequivalenzwerten der Compensation, welche beim Uebergang von Wärme aus kälterm zum wärmern Medium nach Clausius stattfinden muss. Es wird gezeigt, dass der Aequivalenzwert jedes Processes = 0 ist, sofern die Capacität constant ist, und dass derselbe mit dem 2. Hauptsatz nichts zu tun hat. *H.*

Die Aenderung der Dampfdichten bei variablem Druck und variabler Temperatur. Ein Beitrag zur Kenntniss der Beziehungen der Dämpfe zum Boile-Gay-Lussac'schen Gesetze. Inauguraldissertation von Paul Schoop. Zürich 1880. Orell, Füssli u. Comp. 67 S.

On the vapor-densities of peroxide of nitrogene, formic acid, acetic acid, and perchloride of phosphorus. By J. Williard Gibbs, Professor of mathematical physics in Yale College, New Haven, Connecticut. From the American Journal of science and arts XVIII. 1879. 33 S.

Beide Schriften sind hervorgerufen durch den Umstand, dass die Dämpfe weder mit dem Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetz in Uebereinstimmung sind, noch überhaupt ein kenntliches Gesetz hinsichtlich der Dichte, dem Druck und der Temperatur erfüllen, dass es aber bisher noch sehr an Untersuchungen über diesen Punkt gefehlt hat. Die erstere sucht den Grund der Abweichungen in der Cohäsion der Molecüle. Zur Beobachtung bei variirendem Druck und Volum wendet der Verfasser einen von L. Meyer construirten Apparat an, welcher

ıe Druckdifferenz von 100 Millimeter bis 2 Atmosphären gestattet. eser ist hier beschrieben und abgebildet nebst den Diagrammen r erhaltenen Werte. Dann handelt die Schrift von Herstellung des ırometers, von der Manipulation zur Bestimmung der Dampfdichten t dem Apparat, dann von der Dichte der Luft und der Dämpfe ızeln untersuchter Säuren. Der gewöhnlichen Ansicht, dass die ›häsion bei grösserer Annäherung der Molecüle eine Ablenkung aus ır geradlinigen Bewegung bewirke, setzt der Verfasser die entgegen, ıss Molecüle zusammenfallen. Er giebt als Resultat seiner Unterıchung den Satz an: Die Dämpfe und Gase verhalten sich bei enderung ihrer Dichten analog den dissociirenden Körpern. Die ›tztere Schrift sucht die Abweichungen durch verschiedenartige Zer-›gungen der Stoffe zu erklären und stellt zu dem Zwecke analytisch hemische Rechnungen an. H.

Die modernen Theorien der Chemie und ihre Bedeutung für die :hemische Mechanik. Von Dr. Lothar Meyer, ord. Prof. der Chemie an der Universität Tübingen. Vierte, umgearbeitete Auflage. Erstes Buch: Die Atome. — Zweites Buch: Statistik der Atome. Breslau 1880. Maruschke u. Berend. 377 S.

Ueber die Bestimmung des Buchs und die Gesichtspunkte seiner Bearbeitung wird im Prospect folgendes gesagt. Die „Mod. Th. d. Ch." hatten von der 1. Auflage an die Tendenz, die herrschenden, tonangebenden theoretischen Anschauungen in einheitlicher, jedem naturwissenschaftlich gebildeten Leser verständlicher Form darzustellen. Die strenge Durchführung dieser Richtung zwang zur Ausschliessung aller derjenigen Gebiete, deren Bearbeitung noch nicht so weit fortgeschritten war, dass eine Zusammenfassung der gewonnenen Kenntnisse von einem einheitlichen Gesichtspunkt aus möglich erschien. So blieb namentlich die ganze Dynamik der Atome, die Lehre vom Umsatze der Stoffe unter dem Einflusse der chemischen und physikalischen Kräfte den bisherigen 3 Auflagen des Buchs fern und soll erst jetzt in der 4ten eine Stelle finden. Zwar haben sich die grossen Hoffnungen, welche auf die Messung der durch chemische Vorgänge erzeugten Wärmewirkungen gesetzt wurden, bis jetzt nicht so weit erfüllt, dass aus den thermochemischen Constanten, wie mehrfach behauptet worden, sich jede chemische Umsetzung mit Sicherheit voraussagen liesse. Dagegen ist das mehrere Menschenalter hindurch vernachlässigte Feld, auf dem sich mit Vorliebe Berthollet's Forschung bewegte, in neuerer Zeit vielseitig mit Erfolg bearbeitet worden. Die Erfahrungen, welche über den Einfluss der Masse auf die chemischen Vorgänge gesammelt wurden, haben ge-

zeigt, dass die alte Berthollet'sche Theorie in ihrer nenen von Guldberg und Waage geschaffenen Gestalt allgemein gültig ist und eine theoretische Znsammenfassnng aller hierher gehörigen Vorgänge ermöglicht. Ferner hat die Elektrolyse, mit der die neuere theoretische Chemio hisher wenig zn macheu wnsste, in letzter Zeit wichtige Beziehungen zur Molecnlarphysik gewonnen, welche die schon früher von Clausins geänsserten Ansichten üher den Vorgang der elektrolytischen Leitung völlig bestätigen und dessen nähere Erforschnng mittelst der kinetischen Theorie der Aggregatzustände anhahnen. Mögen diese Anfänge einer chemischen Dynamik anch noch hescheiden, die Anhaltspnnkte für die theoretische Behandlung derselben noch unsicher nud selten sein, so hat der Verfasser doch geglauht den Versuch wagen zu dürfen, die Lehre vom chemischen Umsatzo in möglich einheitlichster Zusammenfassnug darzustellen und dem entsprechend auch im Titel des Bnches die chemische Statik zur Dynamik zu erweitern. Nach historischer Einleitung sind dann die Gegenstände der successiven Abschnitte: Die atomistische Hypothese: die Bestimmung der Atomgewichte ans der Dichte der Gase; ans der Wärmecapacität im starren Znstande; ans dem Isomorphismus; das Wesen der chemischen Atome; Comhinationsform der Atome, Typen; das Gesetz der Atomverkettnng; Moleculargewicht und Atomverkettung von Stoffen, auf welche Avogadro's Hypothese nicht anwendhar ist; der chemische Wert, die Valenz oder das Sättigungsvermögen der Atome. Es soll eiu drittes Bnch folgon, Dynamik der Atome, welches, ansser allgemeinen Betrachtungen über die Stabilität der chemischen Verhindnngen, die Umsetzungen derselben durch mechanische Erschütternngen, dnrch Wärme, Licht, Elektricität nnd Affinität hehandelt.

H.

Studien üher Crookes' strahlende Materie nnd dle mechanische Theorie der Elektricität. Von Dr. Wilh. Friedr. Gintl, ord. öff. Professor an der denschen k. k. technischen Hochschule in Prag. Prag 1880. In Selhstverlag. 20 S.

Die Schrift schliesst sich an den von William Crookes vor der 49. Jahresversammlnng der British Association Angnst 1849 zu Sheffield gehaltenen Vortrag', ins Dentsche übersetzt von Dr. Hein. Gretschel 1879. Leipzig bei Quandt n. Händel — an. Der Verfasser nimmt die von Crookes zu Grnnde gelegte Anschauung auf, der gemäss der Uehergang der Elektricität durch einen Strom körperlicher Molecüle geschieht. Es handelt sich, wie es scheint, um Erklärung zahlreicher von Crookes heohachteter Phänomen; doch sind diese weder genannt, noch dnrch Citate hezeichnet, sondern nur teilweile angedentet. Der Verfasser führt die Erklärnng nur weiter aus, ohne eigene Aufstellungen zu machen.

## Vermischte Schriften.

Nouvelle Correspondance Mathématique. Redigée par Eugène Catalan, Docteur ès sciences, Professeur à l'université de Liége; avec la collaboration de MM. Mansion, Laisant, Brocard, Neubérg et Edouard Lucas. Tome sixième. Liége 1880. E. Decq.

Der Inhalt der 2. Hälfte des 6. Bandes, mit welchem das Journal abschliesst, ist folgender.

Neuberg: Ueber die Normalen der Ellipse. (Schluss).

Demartres: Ueber die von Kreisen erzeugten Flächen.

Realis: Ueber einige an das Pell'sche Problem sich anschliessende Fragen.

Césaro: Ueber die harmonische Reihe. (Bemerkung des Redacteurs).

Laquière: Geometrische Theorie der anallagmatischen Curven, ebenen Schnitte der Cyklide.

Césaro: Ein Beweis der Stirling'schen Formel. Bemerkung des Redacteurs).

Mansion: Derivirte der elementaren Functionen einer imaginären Variabeln.

Catalan: Ueber die Quadratur der parabolischen Curven.

Mansion: Ueber die Briefe von Sophie Germain an Gauss.

Catalan: Ueber die Cyklide.

Realis: Problem der unbestimmten Analytik.

Carnoy: Satz über die Kegelschnitte.

Césaro: Einige Formeln.

Brocard: Ueber die Häufigkeit und Anzahl der Primzahlen. (Forts. u. Schluss).

Catalan: Ueber eine Eigenschaft der Flächen 2. Grades.

Le Paige: Ueber einige Eigenschaften der Determinanten.

Laquière: Bemerkungen über die Aufgabe 229 (von Mannheim, betreffend die Bewegung eines Stabvierecks).

Césaro: Ueber die angenäherten Formen der Körper von gleichem Widerstand.

Radicke: Beweis des Satzes von Staudt und Clausen. — Beweis eines Satzes von Stern.

Césaro: Eine von Poncelet behandelte Maximum-Aufgabe.

Digitized by Google

Catalan: Einige ungewöhnliche Sätze. — Ein neuer empirischer Satz. H.

Nova Acta Regiae Societatis Upsaliensis. Seriei tertiae vol. X. Upsaliae MDCCCLXXIX.

Gleichwie im litt. Bericht von den 2 vorhergehenden Bänden, geben wir hier den Inhalt des gegenwärtigen an mathematischen Abhandlungen.

M. Falk: Methode das grösste gemeinsame Mass zweier rationaler ganzer Functionen zu finden.

H. T. Daug: Formeln zur Bestimmung der Gleichungen einer Curve, von welcher man verschiedene Eigenschaften bezüglich auf Krümmung und Torsion kennt.

M. Falk: Ueber die Eliminationsmethode von Bezont und Caneby.

C. F. E. Björling: Ueber entsprechende Singularitäten in algebraischen ebenen Curven. H.

# Litterarischer Bericht
## CCLXIV.

### Geschichte der Mathematik und Physik.

Neues über J. Kepler. Von **Franz Dvorsky**. Mit 21 Beilagen. Prag 1880. J. Otto. 44 S.

In den Beilagen sind eine Anzahl neuer Documente zur Lebensgeschichte Kepler's zusammengestellt, nämlich Briefe an und von Kaiser Rudolf II., Kaiser Ferdinand II., Herzog Albrecht von Friedland, Gerard von Taxis u. A. Voraus gehen die zum Teil daraus entnommenen, in chronologischem Zusammenhang dargestellten Angaben über die äussern Verhältnisse, in denen Kepler erst in Graz, dann, nach Vertreibung der Protestanten aus Steiermark, in Prag lebte. Von wissenschaftlichem Interesse ist, ausser etwa der erwähnten Beobachtung eines neu entstehenden und sich verändernden Fixsterns, nichts darin enthalten; es handelt sich fast nur um Gesuche wegen immer erneuerter und nie gehaltener pecuniärer Zusagen; dann auch um den verzögerten Druck eines Werkes. H.

Intorno ad un punto di storia matematica. Per R. **Rubini** 11 S.

In Crelle's und Liouville's Journal ist 1833 eine Abhandlung von Libri erschienen, in welcher die Reduction des Integrals einer linearen Differentialgleichung $n$ter Ordnung mit einem Term ohne die gesuchte Function durch $n$ successive Substitutionen auf die Specialintegrale der Gleichung ohne diesen Term als Entdeckung des Verfassers aufgestellt ist. Ihm und Brunacci, welcher sich in einer



Digitized by Google

Abhandlnng mit demselhen Gegenstande beschäftigt, ist nachher die Entdeckung zngeschrieben worden — es ist keino Stelle angeführt, wo dies geschieht. Zuerst hat Liouville gefnnden und in einer Note daranf anfmerksam gemacht, dass die Methode von d'Alembert herrührt. Später haben Minich und Trudi das Verhältniss dargelegt. Libri hat die Arbeit von d'Alembert nicht gekannt nnd ist nnabhängig anf dasselbe Resultat gekommen. Brnnacci hingegen betrachtet die Formel gar nicht als neu, sondern sucht die Methode so zn gestalten, dass gewisse bei Enler'schem Verfahren mögliche Irrungen vermieden werden. Rubini bespricht im Gegenwärtigen alles dies eingebend und bittet Hoüel, bei Herausgabe des „Conrs de calcul infinitésimal" von seiner Schrift Kenntniss zn uehmeu. H.

Bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matematicbe e fisicbe pubblicato da B. Boncompagni. Tomo XIII. Roma 1880. Tipografia delle scienze matematiche o fisiche.

Der Inhalt der ersten 6 Hefte ist folgender.

B. Boncompagni: Ueber ein Lehrbuch der Arithmetik von Smeraldo Borghetti ans Lucca, Canononico regolare della Congregazione del SS. Salvatore.

E. Nardncci: Notizen über anf Mathematik bezügliche Bücher der Alexandrinischen Bibliothek, welche vom Conte Giovanni Maria Mazzuchelli im gedruckten Teile seines „Gli scrittori d'Italia" betitelten Werks nicht citirt sind.

Publicationsverzeichnisse sind im 2., 4. nnd 6. Hefte.

Besondes herausgehen ist aus Tomo XII. p. 839 bis 912.

Giambattista Biadego: Sulla memoria inedita di Pietro Maggi intorno ai principii di meccanica molecolare di Ambrogio Fusinieri.

Es werden in der einleitenden Schrift von Biadego dio Ansichten von Fnsinieri in Betreff der Constitution der Körper nnd über das Licht charakterisirt. Die Abhandlung von Maggi ist 1840 geschrieben und 1842 vor der Akademie gelesen; sie folgt dann im Wortlaut.

H.

Intorno ad un' assertiva di Boole osservazione del Socio Corrispondente Nazionale R. Rubini. Estratto dal Rendiconto d. R. Acc. di Napoli. XIX. 1880. 13 S.

Der Gegenstand der Schrift ist der folgende. Euler hat gezeigt, wie sich das Integral einer linearen Differentialgleichung, deren Coefficienten ganze Functionen der unabhängigen Variabeln $x$ sind, in Form unendlicher Reihensummen, die nach irgend welchen positiven Potenzen von $x$ fortschreiten, darstellen und durch Einführung bestimmen lässt. Die hierzu erforderliche Rechnung hat Boole durch eine symbolische Form der Differentialgleichung ersetzt, aus der alle bestimmenten Gleichungen unmittelbar hervorgehen. Die Resultate beider sind dieselben; sie sind jedoch nicht anwendbar auf die Fälle, wo die erste bestimmende Gleichung imaginäre oder gleiche Wurzeln hat. Hiervon sagt nun Boole, es sei ihm nicht bekannt, dass irgend ein Mathematiker gezeigt hätte, wie man diesem Mangel abhelfen könnte, und giebt darauf sein eignes Verfahren für jene Fälle an. Im Gegenwärtigen führt dagegen Rubini, indem er die beiderseitigen Methoden ausführlich darlegt, durch, dass Euler selbst das Verlangte schon geleistet hat, und dass die von Boole gegebene Regel keine andere ist als die von Euler aufgestellte, nur etwas kürzer gefasst.

H.

---

## Lehrbücher, Sammlungen und Tabellen.

Lehrbuch der allgemeinen Arithmetik zum Gebrauche an höheren Lehranstalten und beim Selbststudium. Von Dr. Carl Spitz. Zweiter Teil: Die Combinationslehre, den binomischen Satz, die Wahrscheinlichkeitsrechnung, die sich auf die menschliche Sterblichkeit gründenden Rechnungsarten, die höheren Gleichungen und die Einleitung zur Lehre von den Determinanten, nebst 500 Beispielen und Uebungsaufgaben enthaltend. Dritte, verbesserte und vermehrte Auflage. Leipzig und Heidelberg 1881. C. F. Winter. 333 S.

Anhang zu dem zweiten Teile des Lehrbuches der allgemeinen Arithmetik. Von Dr. Carl Spitz. Die Resultate und Andeutungen zur Auflösung der in dem Lehrbuche befindlichen Aufgaben enthaltend. Dritte. verbesserte und vermehrte Auflage. Leipzig und Heidelberg 1881. C. F. Winter. 38 S.

Der erste Teil des Lehrbuchs nebst dem Anhange zu demselben ist im 226. litt. Bericht S. 16 besprochen. Von dem gegenwärtigen zweiten, welcher in 6 Abschnitten die oben genannten Gegenstände behandelt, lässt sich unterscheidendes kaum nennen. Der Vortrag beansprucht eine höhere Verstandesreife und lässt der mündlichen Erläuterung wol manches übrig; doch ist durch gute Ordnung, das



Digitized by Google

gehörige Mass von Ausführlichkeit und Kürze, jedes am rechten Orte, die Schwierigkeit sowoit gemindert, als es hei einem so weitem Vorgehen in den Theorien möglich war. Die Abschnitte sind nur in so fern nicht ganz ohne merkliche Beziehung, als die Combinationslehre als erster allen übrigen zu Grnndo liegt, der Gleichungstheorie vermittelt durch den hinomischen Satz. Dass die Determinantenlehre auf sie gebaut ist, ist entschieden zu hilligen. Auch der Forderung ist zum grossen Teil Genügo geschehen, dass sie im allgemeinen beginneud die auf der Allgemeinheit beruhendo eiufache Schlussweise enthüllt; warum dies nicht überall, namentlich nicht hei der Anwendung auf die linearen Gleichungssysteme in Ausführung gebracht ward, ist kein Grund zu sehen. Auf jeden Abschnitt folgen erläuternde Beispiele, dann Uebungsaufgaben. H.

Lehrbuch der ebenen Geometrio nebst einer Sammlung von 800 Uebungsaufgaben zum Gebraucho an höheren Lehranstalten und heim Selbststudium. Von Dr. Carl Spitz. Achte, verhesserte und vermehrte Auflago. Mit 251 in den Text gedruckten Holzschnitten. Leipzig und Heidelberg. 1881. C. F. Winter. 283 S.

Anhang zu dem Lehrbuche der ebenen Geometrio. Von Dr. Carl Spitz. Die Resultate und Andeutuugen zur Auflösung der in dem Lehrhuche befindlichen Aufgaben enthalteud. Achte, verhesserte und vermehrte Auflage. Mit 112 in den Text gedruckten Figuren. Leipzig und Heidelherg 1881. C. F. Winter. 106 S.

Charakteristisch an der hier befolgten Lehrmethodo ist, dass von Anfang die Gesammtheit der möglichen Gehilde in grösster Vollständigkeit vorgeführt, und ihre Beziehung durch Bewegung verdeutlicht wird. Diese Betrachtungen sind, soweit sie sich auf Mannichfaltigkeiten und Synthesen erstrecken, rein qualitativ; es werden aher damit verbunden, wiewol unvermischt erhalten die Grundlagen der quantitativen Bestimmung in den Sätzen über das Messen der Geraden und Winkel. Letztere Lehre hat hier eine wesentliche Lücke. Die Definition der Winkelgrösse ist enthalten in dem richtig aufgestellten Kriterium ihrer Gleichheit und Ungleichheit. Durch sie wird auch die Richtung von Geraden zu einem exact aufzufassenden Gegenstand, aher nur solange sie einen gemeinsamen Ausgangspunkt haben. Zur Vergleichung von Richtungen bei verschiedenem Ausgangspunkt ist ein Kriterium der Parallelität erforderlich. Das Euklidische, welches freilich nie realisirt werden kann, sondern nur in Gedanken besteht, und in einer Negirung ausgesprochen wird, ist weggelassen, und kein anderes an seine Stelle gesetzt. Was dann Parallelität, Parallelhewegung oder Bewegung ohne Drehung heisst, ist durch

nichts festgesetzt. Das Lehrbuch schweigt davon ganz, erhält somit womöglich die Einbildung, dass etwas verstanden sei, was nicht verstanden ist. Bliebe dieser Mangel in seiner Verhüllung auf die Grenzen der Anschauungslehre beschränkt, so würde er nur deren Leistung verringern, sonst jedoch unschädlich sein. In der Tat konnte der Verfasser, wenn es ihm ernstlich um die durch die Anschauung zu pflegende Fähigkeit des Ein- und Ueberblicks zu tun war, leicht den weiteren Schritt tun, welcher alles Dunkel aus der Bewegung mit und ohne Drehung entfernt, durch Aufstellung des Satzes, dass, wenn sich eine Figur in ihrer Ebene dreht, alle ihre Geraden gleiche Winkel erzeugen. Allein von dieser Absicht giebt es kein sonderliches Zeugniss, wenn man sieht, wie weiterhin die über dem Begriff der Parallelbewegung erhaltene Dunkelheit der Ausführung eines logischen Taschenspielerkunststücks beim Parallelensatz dienen muss. Nach den genannten Betrachtungen geht nämlich das Lehrbuch zur gewöhnlichen Form der Darstellung in Lehrsatz, Voraussetzung, Behauptung, Beweis über. Hier wird der nicht definirte Begriff der Parallelbewegung zu einem Beweise des Satzes verwandt, dass durch einen Punkt ausserhalb einer Geraden nur eine Parallele zu dieser möglich ist — einem Beweise der das Zu- beweisende, nur mit andern Worten, voraussetzt. Denn es ist klar, dass, wenn mehrere Parallelen durch einen Punkt gehen könnten, auch mehrere Parallelbewegungen möglich sein würden. Die Bestimmtheit der Parallelbewegung ist vorher nirgends ausgesprochen, und wird doch jetzt vorausgesetzt. Dass dem Verfasser, dem doch sonst Klarheit und scharfe Logik nicht fehlt, dies entgangen sein sollte, ist schwer zu glauben; ausserdem musste er durch Litteraturkenntniss wissen, dass jeder angebliche Beweis des Parallelensatzes falsch ist. Warum will er den Unsinn noch länger fortspinnen, von dem sich die meisten Lehrbücher frei gemacht haben? Die Hauptabschnitte des Buchs sind: Von der geraden Linie und der Bestimmung der Lage einer Ebene. Von den Winkeln. Von den ebenen Figuren im allgemeinen. Von Winkeln in den geradlinigen Figuren. Von ihrer Congruenz. Von der Gleichheit der Parallelogramme und Dreiecke. Von der Berechnung der geradlinigen Figuren. Von ihrer Aehnlichkeit. Der Kreis inVerbindung mit den ein- und umgeschriebenen regelmässigenVielecken und die Berechnung des Kreises. Von den Doppelverhältnissen. Von der Involution. H.

---

## Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Ueber die Integration der allgemeinen Riccati'schen Gleichung $\frac{\partial y}{\partial x}+y^2=X$ und der von ihr abhängigen Differentialgleichungen.

Von Dr. P. Helmling, ordentlichem Professor der reinen Mathematik an der Kaiserl. Universität in Dorpat. Dorpat 1879. Verlag C. A. Koch in Leipzig. 4⁰. 43 S.

Die Schrift ist zur Feier des funfzigjährigen Doctor-Jubiläums von Ferdinand Minding gedruckt. Sie zeichnet sich durch einen klaren, leicht verständlichen Vortrag aus und ist gewiss geeignet das Interesse in weiterem Kreise zu gewinnen, so dass wir ihre Verbreitung in Deutschland willkommen heissen können. Der Name der behandelten Gleichung, welcher eigentlich nur für den Fall, wo $X$ Potenz von $x$, gilt, wird hier, wie auch sonst Manche tun, auf beliebige Functionen $X$ ausgedehnt, so dass sie mit der allgemeinen linearen Gleichung 2. Ordnung gleichen Umfang hat. Die Schrift ist in 4 Teile geteilt. Der erste handelt von der Reduction von Differentialgleichungen auf die Riccati'sche; namentlich wird darin nach 2 Methoden gezeigt, wie die Integration linearer Gleichungen $n$ter Ordnung mit Coefficienten 2. Grades von einer Ricca'tischen Gleichung abhängt. Im 2. Teile werden die Fälle durchgegangen, in denen sich das Integral der Riccati'schen Gleichung in endlicher Form darstellt. Der dritte giebt Methoden Näherungswerte des Integrals in Form von Kettenbrüchen zu finden. Im 4. Teile (Anhang) werden die Integrale $\int e^{\varphi}\partial x$, $\int e^{-\varphi}\partial x$, wo $\varphi$ zunächst ganze Function von $x$ und nur positive Werte hat, oder auf solche einzuschränken ist, transformirt um Näherungswerte zu erhalten. H.

Einleitung in die Analysis. Von R. Götting, Oberlehrer am Gymnasium zu Torgau. Berlin 1880. J. A. Wohlgemuth. 188 S.

Die Schrift behandelt ausgewählte Themata der reinen Mathematik, welche die Grenzen der fundamentalen Algebra überschreiten, aber in der obersten Classe vieler Schulen als Unterrichtsgegenstände ganz oder zum Teil aufgenommen zu sein pflegen. Der Gesichtspunkt der Auswahl scheint der zu sein, dass gerade diese Themata eine grössere Gründlichkeit bedürfen, als ihnen nach Erfahrung des Verfassers gewöhnlich gewidmet wird. Nur in diesem Sinne, nur wenn man annehmen darf, dass die gegenwärtige Behandlung vielleicht in einigen Punkten wieder gut macht, was durch frühere Ungründlichkeit verdorben ist, könnte man den Titel „Einleitung" als Vorbereitung gelten lassen. Im übrigen aber ist, wenigstens zum grossen Teil, das Betreiben solcher Gegenstände ohne die Principien der Analysis eher eine Ablenkung von ihr als eine Einleitung in dieselbe zu nennen. Denn die Principien der höhern Analysis stützen sich allein auf die elementare Algebra; man sollte daher nicht die Vorstellung erwecken, als wenn zu ihrem Verständniss so complicirte

Specialrechnungen den Durchgangspunkt bildeten, was nur von ihrem Studium abschrecken kann. Die Hauptgegenstände des Buches sind die Combinationslehre mit Anwendung auf die Wahrscheinlichkeitsrechnung, specielle Reihen, sowol endliche als auch unendliche, verbunden mit der Theorie der Complexen. Diese werden sehr vielseitig erörtert, sie in irgend einer Beziehung oder Richtung erschöpfen zu wollen ist wol nicht beabsichtigt. Auf jeden Abschnitt folgen Aufgaben zur Uebung. H.

Anleitung zur Berechnung der Leibrenten und Anwartschaften sowie der Invaliden-Pensionen, Heiratsausstattungen und Krankencassen. Von Simon Spitzer. Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage. Wien 1881. Carl Gerold's Sohn. 186 S.

Das Buch dient den Vorträgen des Verfassers an der Wiener Handelsakademie zur Grundlage und ist 1858 in erster Auflage erster Auflage erschienen. Es ist in 8 Abschnitte geteilt, deren Gegenstände einzeln folgende sind: Das Verfahren der Wahrscheinlichkeitsrechnung durch Aufgaben mit ausführlicher Lösung dargetan; die Mortalitätstafeln, nämlich die von Deparcieux, die von Florencourt (bisher öfters in Citaten mit erstern verwechselt), die der 17 englischen Gesellschaften und die von Fischer ergänzt nach Angaben von Heym; die Leibrenten nach Brune nebst selbstberechneten Tabellen; die Anwartschaften bei Todesfällen nach Brune, Langheinrich und Mazal, beides Abhängigkeit vom Leben und Sterben einer Person; dann dito zweier Personen; die Invaliden-Pensionen mit Benutzung der Arbeiten von Heym, Wittstein, Behm und Zenner; die Heiratsausstattungen für Mädchen nach Florencourt und Brune; schliesslich die Krankencassen nach Heym. H.

Éléments de calcul approximatif. Par Charles Ruchonnet (de Lausanne). Troisième édition révue. Paris 1880. Gauthier-Villars. Lausanne, G. Bridel. Zürich, Orell Füssli u. C. 63 S.

Die 2. Auflage ist besprochen im 228. litterarischen Bericht. H.

La science de la quantité précédée d'une étude analytique sur les objects fondamentaux de la science. Par Lucien Buys, Capitaine du Génie, Répétiteur à l'école militaire de Belgique. Bruxelles 1880. C. Muquardt. 563 S.

Das Vorliegende ist ein Lehrbuch der reinen Mathematik von den elementarsten Anfängen des Zifferrechnens bis zur Differentialrechnung und deren Anwendung auf Maxima und Minima und auf einiges andere; doch ist es weit entfernt alle zugehörigen Zweige des mathematischen Schulunterrichts zu umfassen. Von andern Lehrbüchern unterscheidet es sich augenfällig dadurch, dass viele Gegenstände statt der gewöhnlichen gesucht philosophische und gelehrte Benennungen erhalten haben, die aber gerade nicht glücklich gewählt sind um das Gemeinte erkennen zu lassen. Ausser solchen Abweichungen macht eine Breite des Vortrags, die der Verdeutlichung nicht merklich zu gute kommt, das Lesen mühevoll, ohne dass der Leser, wenn es ihm gelingt, den Sinn zu finden, durch neue Gedanken belohnt wird. Mitteilung des Inhaltsverzeichnisses würde wegen Unverständlichkeit der Titel zwecklos sein. Dem Werke voraus geht eine philosophische Einleitung, welche die Begriffe der Erkenntnisslehre in Anlehnung an Descartes, Fichte und Krause fast nur nominell vorführt, ohne sich auf Erklärung und auf Untersuchung von Fragen einzulassen.

H.

Sur les dérivées d'ordre quelconque. Par F. Gomes Teixeira, Professeur à l'Université de Coimbra (Portugal). Aus G. Battaglini Giornale di Matematiche, vol. XVIII. 7 S.

Der Verfasser gelangt zu einem Ausdruck des $n$ten Differentialquotienten einer Function $u$ einer Function $y$ von $x$, indem er erst die Form feststellt, dann die specielle Einsetzung

$$u = y^k; \quad y = x + x^2 + \ldots x^n$$

macht und dann $x$ verschwinden lässt — einem Ausdruck den Bertrand auf anderm Wege bewiesen hat. Hiervon macht er Anwendung auf

$$y = (\varphi(x))^m, \quad y = a^{\varphi(x)}, \quad y = \sin\varphi(x)$$

Von der ersten Formel leitet er die inverse Entwickelung in Form einer Determinante ab. Nach gleicher Methode werden die Differentialquotienten von Functionen mehrerer Functionen dargestellt. H.

## Vermischte Schriften.

Nieuw Archief voor Wiskunde. Deel VII. Amsterdam 1880. Weytingh en Brave.

Der Inhalt ist folgender.

P. M. Heringa: Betrachtungen über die Anwendung der Mathematik auf die Naturwissenschaft.

J. van Heulen: Mechanische Betrachtungen über einige krumme Linien.

P. J. Hollmann: Einige Anwendungen der Theorie der singulären Integrale bei Differentialgleichungen 1. Ordnung.

F. J. van den Berg: Ueber zwei in Bezug auf ein Dreieck symmetrische Gruppen dreier Kreise, und über zwei solche Gruppen dreier geraden Linien.

L. Janse: Segeln auf grösstem Kreise.

J. W. Rasch: Die Messung eines Cylinders.

P. van Geer: Ueber die Bewegung von Systemen, die an Bedingungen gebunden sind, welche von der Zeit abhangen.

H. J. Krantz: Wertbestimmung des Ausdrucks:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \partial\varphi \sqrt{\cos\varphi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\partial\varphi}{\sqrt{\cos\varphi}}$$

J. H. Schäfer: Formeln zur Berechnung des einströmenden Wassers bei Ueberschwemmungen, mit Ebbe und Flut. (Fortsetzung des Artikels im vorigen Bande, wo der Name des Verfassers zu berichtigen ist).

J. H. van Leeuwen: Teilung des Winkels in eine beliebige Anzahl gleicher Teile.

C. L. Landré: Ueber die Function $\varphi$ in der Methode der kleinsten Quadrate. H.

Bulletin of the Philosophical Society of Washington. Published by the cooperation of the Smithsonian Institution. Washington.

Der genannte Verein ist 1871 gestiftet und versammelt sich jeden zweiten Sonnabend. Zur Veröffentlichung seiner Sitzungsberichte ist er 1874 geschritten. Mit diesen verbunden erscheinen Auszüge sowol aus Arbeiten der Mitglieder als aus eingesandten oder bereits in Journalen enthaltenen: vollständige Arbeiten in extenso werden in einem besonderen Anhang publicirt. Ueber die An[illegible] derselben entscheidet ein Comitee von 9 Mitgliedern. Es sin[illegible]zt 3 Bände erschienen: der erste umfasst die Jahre 1871 bis [illegible] Seiten,

der zweite 1874 bis 1878 auf 392 Seiten, der dritte 1878 bis 1880 auf 169 Seiten, die Anhänge besonders paginirt. Dem gesammten publicirten Inhalt zufolge widmet sich der Verein ausschliesslich den Naturwissenschaften; in den Statuten ist diese Beschränkung nicht ausgesprochen. Mathematik kommt nur sehr vereinzelt vor; als ein Beispiel ist etwa zu nennen: M. Baker, zur Geschichte des Malfatti'schen Problems — im 2. Bande. H.

Mathematische und physikalische Entdeckungen, gefunden und zusammengestellt von L. Graf Pfeil. Mit sechs lithographirten Tafeln. Berlin 1880. Gustav Hempel. 152 S.

Der Verfasser giebt hierin 14 seiner kürzern Schriften, auf den er den meisten Wert legt, zusammengestellt noch einmal heraus. Es sind die folgenden. Allgemeine Teilung des Kreises und Kreisbogens. Zur bequemeren Auffindung der Functionen kleiner Winkel aus Tafeln von 5 Decimalstellen. Zur Theorie der geraden Linie. Unter welchen Verhältnissen ist es für die Staatscasse vorteilhaft, ein deprimirtes Papiergeld oder Bauknoten gegen Verzinsung einzuziehen? Messung auf der kurzen Basis. Ueber Wasserhosen und über Duftanhang und Hagel. Einrichtung des Messtisches auf 3 Punkte. Zur Schultrigonometrie. Einige Wünsche, die Planimetrie betreffend. Der Zirknitzer See. Zur Bildung des Tons. Zur Wiederbelebung Scheintoter, insbesondere Ertrunkener und Erstickter. Zu Flugmaschinen. Kometische Strömungen auf der Erdoberfläche, eine Gegenkritik. H.

# Programm
# für den dritten Bressa'schen Preis.

---

Die K. Akademie der Wissenschaften zu Turin macht hiermit, den testamentarischen Willensbestimmungen des Dr. Caesar Alexander Bressa und dem am 7. December 1876 veröffentlichten diesbezüglichen Programme gemäss, bekannt, dass mit dem 31. December 1880 der Concurs für die im Laufe des Quadrienniums 1877—1880 abgefassten wissenschaftlichen Werke und in diesem Zeitraume geleisteten Erfindungen, zu welchem nur italienische Gelehrte und Erfinder berufen waren, geschlossen worden ist.

Zugleich erinnert die genannte Akademie, dass vom 1. Jänner 1879 an der Concurs für den dritten Bressa'schen Preis eröffnet ist, zu welchem, dem Willen des Stifters entsprechend, **die Gelehrten und Erfinder aller Nationen** zugelassen sein werden.

Dieser Concurs wird bestimmt sein, den Gelehrten oder Erfinder beliebiger Nationalität zu belohnen, der im Laufe des Quadrienniums 1879—82, „nach dem Urteile der Akademie der Wissenschaften in „Turin, die wichtigste und nützlichste Erfindung gethan, oder das „gediegenste Werk veröffentlicht haben wird auf dem Gebiete der „physikalischen und experimentalen Wissenschaften, der Naturgeschichte, der reinen und angewandten Mathematik, der Chemie, der „Physiologie und der Pathologie, ohne die Geologie, die Geschichte, „die Geographie und die Statistik auszuschliessen".

Der Concurs wird mit dem 31. December 1882 geschlossen sein.

Die zum Preise bestimmte Summe wird 12000 (zwölftausend) Lire betragen.

Digitized by Google

Keinem der sei es in Turin oder ausserhalb dieser Stadt ansässigen inländischen Mitglieder der Turiner Akademie wird der Preis zuerkannt werden können.

Der Präsident

**E. Ricotti.**

Der Secretär
*der Classe für physikalische und mathematische Wissenschaften.*

**A. Sobrero.**

Der Secretär
*der Classe für ethische, historische und philologische Wissenschaften.*

**Caspar Gorresio.**

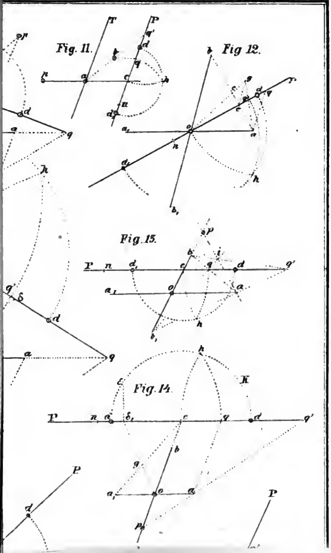


Fig. 11.
Fig 12.
Fig. 13.
Fig. 14.

Digitized by Google

Fig.16.

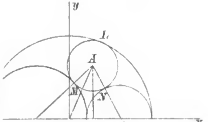
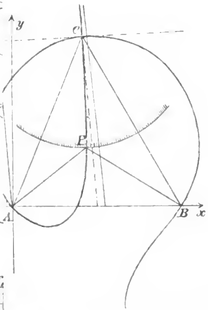
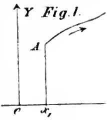
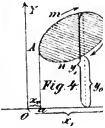



Fig 1.

tor: Lieu des centres de certains cercles.





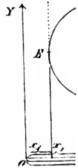
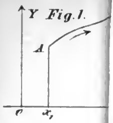
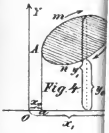
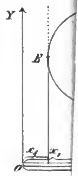



Fig. 9. Elli



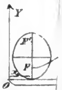




Fig. 9. Elli

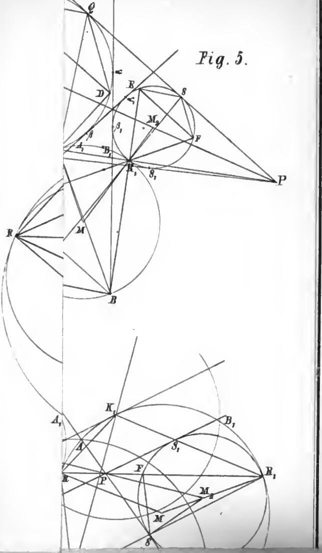
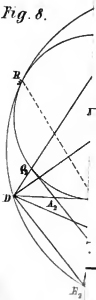
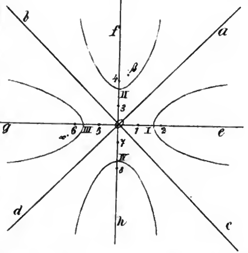



Fig. 5.

Fig. 8.




Niemöller: Integrale complexer Functionen.

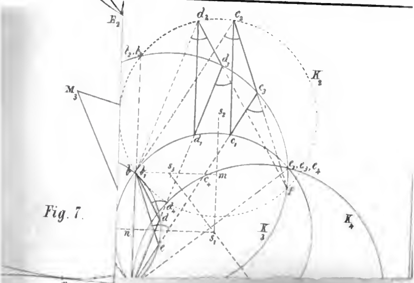



Fig. 7.

[illegible] Google

Fig. 1.

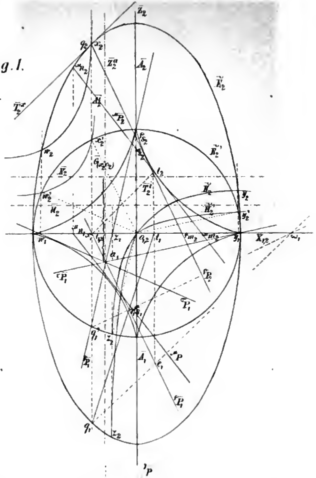
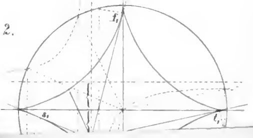
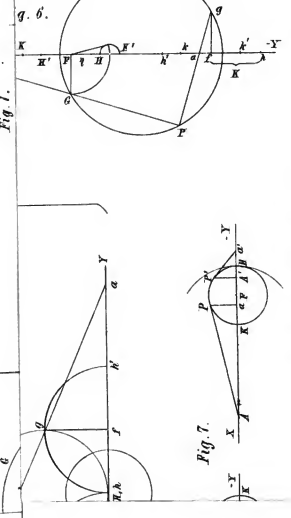


Fig. 2.






...tion der Cardinalpunkte eines Linsensystems.

Digitized by Google

To avoid fine, this book should be returned on
or before the date last stamped below

510.5
ul673
v.61

STORAGE ARE

To avoid fine, this book should be returned on
or before the date last stamped below

[redacted]
510.5
U673
v.66

STORAGE AREA

Digitized by Google